Història de la matemàtica: Grècia IIIb
(el segle d'or: Arquimedes, vida i obra)

Resultats, textos i contextos

Josep Pla i Carrera

Institut d'Estudis Catalans
Secció de Ciències i Tecnologia

Història de la matemàtica: Grècia IIIb (el segle d'or: Arquimedes, vida i obra)

Resultats, textos i contextos

Josep Pla i Carrera

Barcelona, 2023

Institut d'Estudis Catalans
Secció de Ciències i Tecnologia

Biblioteca de Catalunya. Dades CIP

Pla i Carrera, Josep, autor
Història de la matemàtica. Grècia IIIb (el segle d'or: Arquimedes, vida i obra) : resultats, textos i contextos. — Primera edició
Bibliografia. Índexs
ISBN 9788499656977
I. Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia. II. Títol
1. Arquimedes, aproximadament 287 aC-212 aC. 2. Matemàtica grega — Història.
3. Matemàtics — Grècia — Biografia
929Arquimedes
51(38)(091)

Classificació AMS: Primària: 01Axx, 01A20, 01A75 i 00B55.
Secundària: 01A05, 97A30, 26-03, 37-03 i 51-03

Projecte «*Història de la Matemàtica grega*», dut a terme sota la direcció de Pilar Bayer, membre de la Secció de Ciències i Tecnologia de l'Institut d'Estudis Catalans.

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: febrer del 2023

Assessoria lingüística: Margarida Bassols
Assessoria matemàtica: Joan Miralles
Text revisat lingüísticament per la Unitat d'Edició del Servei Editorial de l'IEC

Disseny de la coberta: Azcunce | Ventura

Imprès a Prodigitalk, SL

ISBN: 978-84-9965-697-7
Dipòsit Legal: B 1332-2023

DOI: 10.2436/10.2000.74.1

A Sebastià Xambó,
un apassionat de la docència,
que s'ha dedicat al coneixement i a la recerca
en l'àmbit de les matemàtiques,
posseïdor d'una gran estimació
per la història i la divulgació,
a més d'una gran capacitat de gestió.
Ha mostrat sempre un gran respecte
pels qui cultivem, amb rigor i seriositat,
aquesta disciplina universal.
Les seves afabilitat i generositat
són reconegudes i apreciades
per tots els qui gaudim de la seva amistat.

Josep

There is no scorn more profound,
or on the whole more justifiable,
than that of the men who make
for the men who explain.

GODFREY HAROLD HARDY*

---

* HARDY (1940), traducció catalana, p. 77: «No hi ha desdeny més profund o, en darrer terme, més justificat que el que senten els creadors pels qui en comenten les creacions.»

Ens hem permès repetir aquesta expressió de Hardy a cada llibre perquè la considerem absolutament desafortunada i la usem com a denúncia d'una manera de pensar errònia.

Sumari

There are things which seem incredible to most men who have not studied mathematics.

ARQUIMEDES[†]

[†] «Hi ha coses que semblen increïbles a la majoria dels homes que no han estudiat matemàtiques.» Citació que diversos autors actuals atribueixen a Arquimedes. Vegeu, per exemple, GUDER (1976), p. 358.

Introducció

Es habe nur drei epochebildende Mathematiker gegeben: Archimed, Newton, Eisenstein.

Carl Friedrich Gauss[‡]

Com ja hem dit a *Grècia IIIa*, el segle III aC és el segle de la matemàtica grega perquè s'hi desenvolupa la feina colossal de l'astronomia i la geometria. I, entre els gegants que la van dur a terme, sobresurt notablement Arquimedes de Siracusa. La seva vàlua es fa palesa, per exemple, en la gran quantitat de textos doxogràfics sobre la defensa de Siracusa que se li atribueixen.

Sense cap mena de dubte, l'aportació més notable d'aquest ínclit estudiós és haver-nos ajudat a comprendre moltes coses mitjançant el llenguatge de les matemàtiques. I haver-ho fet, com veurem més endavant, d'una manera moderna —mitjançant monografies.[§]

A més, pel que fa a la geometria del pla, aprofundeix el coneixement del cercle, lliga la seva àrea amb la longitud de la circumferència i dona fites de la relació entre aquest perímetre i el diàmetre.

[‡] «Només hi ha tres matemàtics que hagin fet època: Arquimedes, Newton, Eisenstein.» Cantor (1877), p. 774, atribueix la citació a Gauss. En línia a <https://de.wikisource.org/wiki/ADB:Eisenstein,_Gotthold>.

[§] Vegeu l'apartat 2.1.1 (pàgines 24-30).

També s'apropa a la paràbola i determina l'àrea d'un segment seu arbitrari. De primer, anticipant-se al *Mètode*,[¶] usa la llei de la balança, i, després, com escau als geòmetres grecs, l'estableix de forma geomètricament correcta.

Les seves aportacions esdevenen una ampliació de les d'Euclides. Per exemple, *Sobre l'esfera i el cilindre*, en què, un cop vist que es poden cubicar, es preocupa de les superfícies. I, *Sobre els conoides i els esferoides*, en què estudia alguns sòlids de revolució generats per les còniques en giravoltar. És a dir, s'interessa per les superfícies dels sòlids de revolució estudiats en els *Elements* i hi afegeix sòlids nous —els conoides i els esferoides.

A més a més, s'adona de la necessitat d'aprofundir el coneixement de les còniques perquè, malgrat que disposa de les obres d'Aristeu el Vell i d'Euclides, necessita alguns resultats que ells no havien establert. Fins a quin punt aquestes qüestions arquimedianes van influir en Apol·loni, com ho van fer sense cap mena de dubte les d'Aristeu i d'Euclides, és una qüestió que queda del tot oberta.[‖]

Un altre aspecte que val la pena destacar és la contribució en la introducció d'una corba nova, l'espiral d'Arquimedes, de la qual estudia les característiques i propietats. Tots aquests objectius l'obliguen a afinar les definicions i els postulats, i alhora a refinar alguns dels mètodes geomètrics emprats fins aleshores, en particular, el d'exhaustió. Per això, planteja la «doble exhaustió», per dins i per fora, i l'estén a l'ús de superfícies corbes —de fet, de sectors circulars, cosa que el porta, indefectiblement, a haver d'establir fites per a les sumes dels nombres, els seus quadrats i els seus cubs.

En l'estudi de determinats problemes del segon llibre de *Sobre l'esfera i el cilindre*, es troba davant la necessitat de resol-

[¶] Els títols grecs de les obres d'Arquimedes els donem a la taula 2.1 (pàgines 24-25).

[‖] Vegeu els paràgrafs 1.1.2a i 1.1.2c de Pla (2021), p. 5-6 i 9-11.

dre una cúbica, i obre així una porta molt important que serà transitada per alguns geòmetres posteriors.

Però, Arquimedes va més enllà, encara. Usa la geometria com una eina. Per exemple, en l'estudi de l'estàtica de les figures, establint la llei de la balança. I, en la hidrostàtica, plantejant el seu famós principi.

En totes i cadascuna de les seves monografies, ens sorprèn l'elegància que mostra, tant dins els paràmetres admesos per la matemàtica grega com fora d'aquests.

Actualment, sabem que disposava d'un mètode, diguem-ne heurístic, que ens ha arribat gràcies a la carta en la qual el comunica a Eratòstenes. Aquest mètode té relació amb l'atomisme, concretament pel fet d'usar l'equilibri que s'estableix en una balança entre figures planes o entre sòlids. Malauradament, aquesta missiva entre els dos savis va romandre desapareguda durant segles. Per això, malgrat les paraules del siracusà —«Estic fermament convençut que pot resultar una contribució gens menyspreable a la recerca matemàtica»—,[**] aquest mètode heurístic no va tenir cap mena d'influència en els matemàtics ulteriors.

Un altre aspecte que el preocupava també era establir la finitud de l'Univers. I, per fer-ho, donada la pobresa del sistema de numeració grec, en crea un que li permet designar nombres grans. Així pot arribar a comptar-ne els grans de sorra.[††]

També dedica l'atenció a qüestions que podríem considerar lúdiques, com ara el problema dels bous, i l'ostomaquió (§ 2.1.3*f*, pàgina 49).

Altres matemàtics de l'època hi estan directament vinculats, com Conó, Dositeu, Nicomedes i Eratòstenes, encara que Conó el precedeix. Les seves aportacions, molt inferiors a les d'ell, són, tanmateix, rellevants en el context històric i no po-

[**] Vegeu el text B.10a_1 (pàgina 513).
[††] Pla (2016*b*), § 1.3, p. 9-12.

dem ometre-les. En el cas d'Eratòstenes, tracta molts temes, alguns, com veurem, extremament interessants i rellevants.

En canvi, Dionísodor i Diocles hi estan vinculats conceptualment perquè estudien problemes que havien sorgit en algunes de les obres —o gestes— del geòmetra de Siracusa. I hi proposen solucions. Tots aquests autors els aplegarem en el volum *Grècia IIId*.[‡‡]

En una introducció a Arquimedes com aquesta, que vol ser breu, no cal afegir-hi res més. O potser sí: podríem reblar el clau dient, com ell, «Eureka!».

[‡‡] PLA (en premsa *c*).

Capítol 1

La vida i les gestes d'Arquimedes

No et fiïs mai de ningú que no tingui imaginació.
JOAN SALES[1]

Les obres d'Euclides i d'Apol·loni són dos autèntics tractats de geometria. Les del primer, com hem vist a bastament, aporten els fonaments de la geometria grega i alguns resultats aritmètics pitagòrics.[2] Les del segon, en canvi, proporcionen l'estudi aprofundit de les còniques, recerca iniciada per Aristeu el Vell i apregonada per Euclides,[3] com veurem en el volum següent.[4] Aquest treball va fer possible la revolució astronòmica realitzada, posteriorment, per Johannes Kepler.[5]

En canvi, l'obra d'Arquimedes està formada per un grapat de monografies —*papers*, com en diríem actualment— que són el resultat de les recerques dutes a terme per una ment amb una capacitat intel·lectual privilegiada i una imaginació matemàtica

1. SALES (1956), edició del 2012, p. 19.
2. PLA (2018) i (2020).
3. PLA (2021).
4. PLA (en premsa *b*).
5. KOYRÉ (1973), edició castellana, p. 44.

desbordant. En aquest sentit, podem dir que el seu autor era molt modern, característica que comparteix amb Hipòcrates de Quios.[6]

Figura 1.1. Un medalló amb el bust i el nom d'Arquimedes

La seva personalitat, de la qual tenim molt poques dades fidedignes, va ser molt apreciada i valorada pels seus conciutadans. Es fa difícil creure que ho fos només pels seus treballs teòrics sobre matemàtica i estàtica de sòlids i líquids. Més aviat hem de pensar que la seva fama es basa, d'una banda, en la seva pertinença, llunyana, a la nissaga reial i, de l'altra, en els seus invents extraordinaris. Aquesta activitat seva, però, posa damunt la taula la discussió sobre el seu platonisme —sobretot en qüestions físiques.[7]

Arquimedes —considerat el més gran dels matemàtics grecs— va tenir una influència enorme en els pensadors europeus del segle XVI. Efectivament, la caiguda de Constantinoble en mans dels turcs el 29 de maig de 1453 va provocar la fugida dels seus prohoms cap a Occident. I amb ells van retornar-hi algunes de les obres conservades a Orient, com ara les *Còniques* d'Apol·loni, que, en arribar a Europa, van ser estudiades amb un gran entusiasme pels erudits del Renaixement[8] i van constituir el punt de sortida de la matemàtica europea dels segles XVI i XVII.[9]

En aquest sentit, val la pena llegir el paràgraf inicial de la *Presentació* catalana del *Mètode*:[10]

6. Pla (2016*b*), § 3.4.7, p. 238-249, i B7.7, p. 484-496.

7. Pla (2016*b*), p. 334.

8. Algunes ja eren conegudes pels matemàtics àrabs que n'havien aprofundit els continguts.

9. Vegeu el recull d'estudis de Koyré, aplegats a Koyré (1973).

10. Les monografies d'Arquimedes es reuneixen a la taula 2.1 (pàgines 24-25).

> Hi ha una unanimitat sorprenent a reconèixer Arquimedes com el més important dels matemàtics de l'antiguitat. Les seves principals obres van ser impreses i traduïdes al llatí per primera vegada entre 1503 i 1558, i van exercir una influència decisiva en el pensament d'aquesta època. L'estudiós contemporani A. Koyré arriba a afirmar que: «Podríem resumir el treball científic del segle XVI en l'admissió i comprensió de l'obra d'Arquimedes.» I que: «És cert que l'assimilació de l'obra d'Arquimedes va servir de base a la revolució científica que es va realitzar durant el segle XVI.» En aquesta centúria, Galileu, Cavalieri, Kepler, Torricelli, Fermat, Pascal i molts altres van reconèixer el deute immens amb el «sobrehumà Arquimedes», l'obra del qual, pròdiga en resultats sorprenents i model d'exposició rigorosa, va constituir un sòlid punt de partida, tant per a la configuració de la nova física com per a la invenció del càlcul infinitesimal.[11]

Aquesta citació palesa dues qüestions: la importància i influència que Arquimedes va tenir en la gran revolució de la matemàtica i la física europees molts segles després de la seva mort, i l'abast d'aquesta influència: matemàtica i física alhora. La seva exposició, quan és rigorosa, és filla de la metodologia que havia imposat Euclides uns anys abans. En aquest sentit, Arquimedes és tan platònic i tan aristotèlic com Euclides. Però, malgrat això, en l'àmbit de la física, la seva recerca és molt més aristotèlica que platònica.

Aquesta vàlua indiscutible, la posen ben clarament de manifest els tres punts següents:

a) Les paraules del rei Hieró II: «Només concediré més honors dels que he concedit a Arquimedes a l'home que faci créixer dues espigues de blat allà on solament en creix una.»[12]

b) L'actuació del general romà Marcel, que, ple d'admiració per aquest gran geni, va ordenar que no el matessin perquè «consi-

11. González Urbaneja i Vaqué (1997), p. 7.
12. Citat a Babini (1948), p. 35.

derava que conservar-li la vida li proporcionava tanta glòria com la presa de la ciutat de Siracusa».[13] A més, «en assabentar-se de la sort d'Arquimedes, Marcel es va afligir [. . .] i adolorit, va donar l'esquena al que l'havia occit com si es tractés d'un sacríleg i va ordenar que els familiars d'Arquimedes fossin honorats per la pèrdua.»[14]

c) La instauració, l'any 1936, del que col·loquialment es coneix com la Medalla Fields.[15] Amb aquest nom s'honra el matemàtic canadenc John Charles Fields, que va ser clau en l'establiment del premi perquè el va finançar. Precisament per a distingir els guanyadors, el metge i escultor Robert Tait McKenzie va dissenyar una medalla que, a l'anvers, mostra un relleu d'Arquimedes[16] identificat amb el nom grec

FIGURA 1.2. Anvers de la Medalla Fields

13. VALERI MÀXIM (1471), llibre VIII, capítol VII, edició castellana, p. 178.

14. PLUTARC (1932-1946), volum segon, part tercera, *Marcel*, XIX, [8] i [12], edició catalana, tom VIII, p. 125 i 126.

15. El nom oficial és Medalla Internacional per Descobriments Excellents en Matemàtiques. És un premi que s'atorga a quatre matemàtics de menys de quaranta anys en l'International Congress of Mathematicians (ICM), de la International Mathematics Union (IMU), que se celebra cada quatre anys. Fins fa poc era considerat el guardó i l'honor més gran que un matemàtic podia rebre. D'altra banda, l'any 2002, en ocasió del segon centenari del naixement del matemàtic noruec Niels Henrik Abel, l'Acadèmia Noruega de Ciències i Lletres va crear el Premi Abel, un guardó internacional que s'atorga anualment a un o més investigadors d'aquesta disciplina per les seves contribucions científiques excepcionals en el camp de les matemàtiques i amb la intenció d'omplir el buit que les matemàtiques pateixen en els premis Nobel. Ara mateix, se'l considera el Premi Nobel dels matemàtics.

16. Una pregunta que ens podem fer és: disposem d'alguna estàtua o pintura d'Arquimedes prou creïble? La resposta és que no. Això no obstant, a PARUTA (1612), p. 141, hi ha la reproducció de dos medallons seus, el segon dels quals conté, a la cara, el bust d'Arquimedes i, a l'anvers, les lletres A R M D, acrònim del seu nom (figura 1.1, pàgina 2).

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ aureolat amb la frase llatina «Transire suum pectus mundoque potiri».[17]

Honor i glòria a l'insigne prohom siracusà!

1.1 Unes gotes de la vida d'Arquimedes

Sabem ben poc de la vida d'aquest geòmetra grec[18] i, en canvi, disposem d'un bon grapat d'anècdotes protagonitzades per ell.[19]

1.1.1 Les dades de la seva vida

No hi ha dubte que Arquimedes era natural de la ciutat de Siracusa, a l'illa de Sicília, i que va morir en mans d'un soldat de l'exèrcit romà durant la invasió de la ciutat dirigida pel general romà Marcel, durant la Segona Guerra Púnica, l'any 212 aC[20] (A.1.2a i A.1.2b_1, pàgines 186-195 i 195-196).[21]

La seva vida (287-212 aC) es va desenvolupar durant el regnat de Hieró II.[22]

---

17. 'Anar més enllà d'un mateix i dominar el món.'

18. Sabem, en canvi, que un tal Heràclides, amic d'Arquimedes que Eutoci esmenta en el *Comentari a 'De la mesura del cercle' d'Arquimedes* (*Σχόλια στο Κύκλου μέτρησις του Αρχιμήδη*), en va escriure una biografia que, per desgràcia, no s'ha conservat.

19. Disposem, tanmateix, de biografies d'Arquimedes a: Donkin (1867); Heath (1894), p. xv-xx; Babini (1948), p. 24-44; Dijksterhuis (1987), p. 9-32; Eecke (1960), p. vii-xxxi; Vera (1970), vol. ii, p. 9-13; Frajese (1974), p. 29-35; González Urbaneja i Vaqué (1997), p. 7-31; Ortiz-García (2005), p. 7-18. Però la nostra presentació es basa en l'excel·lent síntesi de Russo (2013). Vegeu l'apèndix A (pàgines 180-186). I, en Babini (1948) i Fernández (2012), uns textos de caràcter més divulgatiu i escolar.

20. Sis anys abans que els romans desembarquessin a Empúries per tallar el pas a Anníbal.

21. Pla (2021), B.6b_1, b_2 i b_3, p. 200-201.

22. Hieró II a Pla (2021), p. 62-64 i taula 4.1.

S'ha dit que Marcel desitjava que se li conservés la vida pel seu enorme prestigi i per la possibilitat que Roma pogués servir-se dels seus invents (A.1.1b_1, pàgina 184),[23] però tot plegat té molt de reconstrucció històrica de ficció.

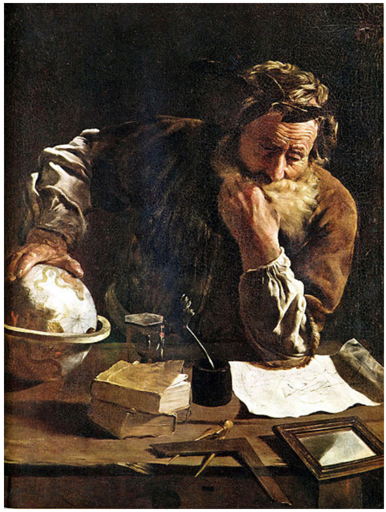


FIGURA 1.3. Representació d'Arquimedes de Domenico Fetti (1620)

La data del naixement és molt més imprecisa. Podria haver nascut l'any 287 aC. Regnava, doncs, Pirros de l'Epir.[24] Tanmateix, l'únic autor que proporciona aquesta dada és el bizantí Joan Tzetzes quan afirma que va morir a l'edat de setanta-cinc anys (A.1.1a_1, pàgina 180).

En la introducció de l'*Arenari* (B.8.2a, pàgina 463), Arquimedes afirma que és fill de l'astrònom Fídies,[25] que havia establert

FIGURA 1.4. Mort d'Arquimedes d'Édouard Vimont (1920)

Plutarc diu que era parent (*συγγενὴς*) del tirà de Siracusa, Hieró II (A.1.2a_5 [12], pàgina 191). Aquesta afirmació, tanmateix, contrasta amb la de Ciceró (A.1.3d_1, pàgina 202), que s'hi refereix com a «un home insignificant».

S'ha dit que Arquimedes desitjava que, en la seva tomba, s'hi esculpís un dels seus resultats relatius a l'esfera i el cilindre.

23. El primer a dir-ho va ser Plini el Vell i el fet és reafirmat per Ciceró (A.1.1b_3, pàgina 185).

24. Pirros de l'Epir a PLA (2021), p. 61-62 i taula 4.1.

25. Diu: «Φειδία δὲ τοῦ ἁμοῦ πατρὸς.»

I, precisament, Ciceró la va localitzar entre la bardissa quan era qüestor de Sicília (A.1.3d_2, pàgines 202-203).[26]

FIGURA 1.5. Ciceró troba la tomba d'Arquimedes, obra de Valenciennes

També sabem que el geòmetra siracusà va viatjar a Egipte (A.1.3b_1 i b_2, pàgines 198-199) i no és impossible pensar que, trobant-se a les terres del Nil, visités Alexandria, entrés en contacte amb els estudiosos del museu i en visités la biblioteca. Euclides, però, ja havia mort.

Arquimedes va conèixer Conó, que era, més o menys, de la seva edat i s'hi va relacionar. Va mantenir contactes amb Dositeu, probablement deixeble d'aquest. Ho sabem perquè, en les quatre monografies que li adreça i que s'han conservat —*Sobre l'esfera i el cilindre*, *Sobre els conoides i els esferoides*, *La quadratura de la paràbola* i *Sobre les línies espirals*—, li ofereix demostracions de proposicions que havia plantejat a Conó i que Dositeu li havia reclamat. És a dir, són monografies posteriors a la mort del primer, una circumstància que es fa palesa en les dues darreres. En concret, en la monografia de les espirals, Arquimedes es dol de la mort del «seu amic» Conó.

En la monografia de la paràbola, en canvi, fa referència al «mètode mecànic», un mètode de caire analític que, en un primer moment, li havia permès trobar les solucions dels problemes que s'anava plantejant i, un cop conegudes, establir-les sintèticament de manera correcta per mitjà de la geometria (vegeu B 2a_1, pàgines 226-227).[27] Aquest procés és una referència cla-

26. Tot i que els siracusans actuals en proposen una ubicació, se'n desconeix l'indret.

27. Per a més informació, ARQUIMEDES (2010), p. 64; (2016*a*), p. 31; (2016*c*), p. 148; (1997), p. 138; (2009*a*), p. 13.

ra al que avui coneixem com a *mètode d'Arquimedes* i que el geòmetra de Siracusa exposa de manera molt precisa en la monografia anomenada *Mètode*, adreçada a Eratòstenes (B.10a_1, pàgina 513), a qui també dedica el 'problema dels bous' (B.12, pàgina 558).[28] Això deixa ben clar que el coneixia i en reconeixia la vàlua intel·lectual.[29]

Taula 1.1 *Dades significatives durant la vida d'Arquimedes*

287 aC		Segons Tzetzes, data de naixement. Euclides té quaranta anys.
280 aC		Neixen Conó, Nicomedes, Filó de Bizanci i Crisip de Soli.
279 aC	Final del regnat d'Hicetes II.	
278 aC	Després de la victòria d'Asculum, el rei Pirros de l'Epir pacta amb els romans.	
276 aC		Neix Eratòstenes.
270 aC		Neix Geló II, fill de Hieró II.
268 aC		Neix Marc Claudi Marcel, el general que comandarà la presa de Siracusa en la qual Arquimedes troba la mort.
265 aC	Hieró II derrota els mamertins i es proclama rei de Siracusa.	Euclides mor quan Arquimedes té dotze anys.
264 aC	Comença la Primera Guerra Púnica. Siracusa s'alia amb Cartago contra Roma.	Neix Apol·loni de Perge.

28. A més del que s'exposa en aquest llibre, vegeu Arquimedes (1997), p. 138, pel que fa al mètode, i Arquimedes (2009*b*), p. 355, pel que fa al problema dels bous.

29. Recordem les dates d'aquests matemàtics: Euclides (325-265 aC), Arquimedes (287-212 aC), Conó (280-220 aC), Eratòstenes (276-194 aC) i Dositeu (?-∼230 aC).

TAULA 1.1 *Dades significatives durant la vida d'Arquimedes* (continuació)

264 aC	Hieró II firma un tractat de pau amb Roma.	
260 aC		Data probable de la formulació de la llei de la balança. D'acord amb la informació de la qual disposem, Arquimedes és el primer matemàtic que adapta la geometria als fenòmens de l'estàtica de sòlids i líquids.
250 aC		Neix Dionísodor de Caunos.
247 aC		Neix el general cartaginès Anníbal.
241 aC	S'acaba la Primera Guerra Púnica.	
240 aC	Comença la corregència de Hieró II i Geló II.	Neix Diocles de Carist. Eratòstenes elabora un mapa del món conegut.
230 aC		Neix Dositeu de Pelusium. Primers estudis d'Apol·loni.
220 aC		Mor Conó de Samos.
218 aC	Comença la Segona Guerra Púnica. Anníbal creua els Alps i envaeix Itàlia.	
216 aC	El 2 d'agost, Anníbal derrota l'exèrcit romà a la batalla de Cannes.	Mor Geló II.
215 aC		Mor Hieró II i assumeix la tirania el seu fill Jerònim.
213 aC	Marcel comença el setge de Siracusa.	Arquimedes pren part en la defensa de la ciutat assetjada.
	L'atac, però, és frenat gràcies als ginys de guerra d'Arquimedes.	Es donen les anècdotes de la politja, la catapulta i el mirall ustori d'Arquimedes.
212 aC	Siracusa cau en mans dels romans i és saquejada.	Mor Arquimedes.

Taula 1.1 *Dades significatives durant la vida d'Arquimedes* (continuació)

202 aC	S'acaba la Segona Guerra Púnica.	
80 aC		Ciceró troba la tomba d'Arquimedes a Siracusa.

Els textos A.1 (pàgines 180-208) aporten moltes informacions sobre les anècdotes, els fets i les descobertes dels ginys que se li atribueixen i que exposem en l'apartat 1.1.3 (pàgines 12-21). Però la primera pregunta que ens hem de fer és: podem intuir com era la personalitat de l'insigne geòmetra sicilià a partir d'aquests textos?

1.1.2 La personalitat d'Arquimedes

Sovint es presenta Arquimedes com un geòmetra teòric allunyat totalment de la realitat, i se'l compara, per la seva capacitat d'abstracció, amb Tales.[30] Però en els textos dels doxògrafs veiem una doble personalitat, pel que fa a aquesta qüestió.

D'una banda, és cert que, quan analitza un problema, hi dedica tota l'atenció —l'ànima, podríem dir. Per això, pot tenir un soldat romà amb l'espasa ensangonada al pati i no adonar-se'n. La recerca l'entusiasma i l'absorbeix, com posa de manifest la resolució del problema de Hieró II —sobre la quantitat d'or de la corona de l'orfebre—, davant de la qual exclama: «Eureka! Eureka!» (*Εὕρηκα! Εὕρηκα!*), i quan el rei l'interpel·la sobre la possibilitat d'aixecar pesos grans amb una sola mà i fa l'afirmació tan coneguda de: «Doneu-me un punt de suport i aixecaré el món.»[31]

Els escrits que ens n'han arribat —i que analitzarem amb més detall més endavant— mostren que era polifacètic —cap

30. Comparem l'anècdota de Tales (Pla (2016*b*), p. 67) amb la circumstància en la qual va trobar la mort Arquimedes.

31. *Δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω.*

qüestió matemàtica no li era aliena— i que oferia una presentació acurada, clara i precisa dels fenòmens, com correspon a un geòmetra autèntic i pur. Coneixia la geometria unificada dels *Elements* d'Euclides a la perfecció i també els problemes que quedaven fora d'aquesta sistematització, i, quan no disposava de les eines necessàries per a resoldre'ls, les creava. En definitiva, podia parlar de tu a tu amb els mestres del museu d'Alexandria —Conó, Dositeu i Eratòstenes—, amb els quals mantenia una bona amistat.

Era honest, com palesa el fet que exposés detalladament el mètode que l'havia ajudat a «intuir» els seus resultats i que el comuniqués a Eratòstenes.[32] Era generós quan explicava les seves demostracions als matemàtics del museu mitjançant les monografies que els enviava, algunes molt notables, importants i innovadores. No els va considerar mai competidors, sinó col·legues i amics.[33] Precisament, la seva amistat li va permetre mostrar-los un punt d'ironia, com es fa evident en les paraules que va adreçar a Eratòstenes.[34]

Però, d'altra banda, sabem que el preocupava la fabricació de ginys mecànics —físics— i que, amb aquests, va participar activament en el setge de Siracusa i va mantenir les tropes romanes, que atacaven la ciutat per mar i terra, totalment aturades. Les tècniques emprades es van mostrar enormement ferotges. La guerra sempre ho és, com ja vam indicar en parlar de l'*Odissea* d'Homer.[35] I Arquimedes, ben lluny de les paraules una mica farisaiques que força segles després diria Hardy,[36] va usar els coneixements que li proporcionava la geometria abstracta per a intervenir activament en la realitat de la

32. Vegeu la nota 28 (pàgina 8). Aquesta monografia va restar perduda fins que, l'any 1906, Heiberg va aconseguir aclarir el contingut ocult del conegut *palimpsest d'Arquimedes*.

33. Vegeu la nota 27 (pàgina 7).

34. González Urbaneja i Vaqué (1997), p. 140.

35. Pla (2016*b*), p. 174.

36. Hardy (1940), § 28, edició catalana, p. 115-117. Vegeu «La responsabilitat de la matemàtica i, de retruc, del matemàtic», p. 37-40.

guerra. Així s'allunya de l'esperit platònic que menysprea els coneixements aplicats a la realitat. Per tot això, de vegades, se'l té pel primer físic que fonamenta la física en la geometria i per un gran enginyer que s'anticipa a Heró.

I, tanmateix, és força curiós que solament ens n'hagin arribat monografies teòriques i sorprèn que no se n'hagi conservat cap escrit aplicat, plànol o gràfic, malgrat el poder civil i militar i la riquesa econòmica que comporten els seus ginys mecànics. Per això, com que no convenia que es divulguessin, Marcel va voler mantenir el seu autor sa i estalvi. No podem descartar, doncs, que aquestes gestes i aquests ginys formin part de la llegenda romàntica que la tradició doxogràfica ha assignat al personatge. Però això ens planteja un altre dubte sobre si s'hauria bastit una llegenda d'aquestes dimensions si només s'hagués dedicat a la geometria pura.[37]

1.1.3 Les anècdotes

Fem ara una presentació succinta de les anècdotes que s'han atribuït a l'insigne geòmetra, físic i enginyer remetent-nos als textos corresponents.

1.1.3*a* La mort d'Arquimedes

Com ja hem dit abans, Arquimedes va morir el 212 aC, durant la Segona Guerra Púnica, quan les forces romanes del general Marc Claudi Marcel van capturar la ciutat de Siracusa després d'un setge de dos anys.

D'acord amb els relats doxogràfics —el més popular dels quals és el de Plutarc— (A.1.2*a*, pàgina 186), Arquimedes havia dibuixat una figura i estava treballant en un problema geomètric mentre la ciutat era assaltada a sang i a foc per l'exèrcit

37. Tanmateix, no podem obviar que Dant, en el cant IV de *La divina comèdia* (*Divina commedia*) —ja dins de l'infern a la porta del qual hi ha la llegenda: «Lasciate ogni speranza, voi ch'entrate»—, no l'esmenta (A.1.1b_4, pàgina 185). En canvi, Vitruvi, a *De architectura*, el considera un dels grans geòmetres grecs (A.1.1b_5, pàgina 186).

romà. Un soldat, de nom desconegut,[38] li va ordenar que el seguís però Arquimedes no li va fer cas perquè abans —tal com li va dir— havia de resoldre el problema que tenia entre mans.

FIGURA 1.6. Mosaic romà, trobat entre les cendres d'Herculà

Plutarc brinda també una altra explicació menys coneguda de la mort del siracusà (A.1.2*a*, pàgina 186), en la qual suggereix que podria haver estat mort quan intentava rendir-se. Segons aquesta versió, el geòmetra transportava instruments matemàtics i va ser assassinat per un soldat que es va imaginar que eren objectes valuosos. El general Marcel es va enfurismar d'allò més quan ho va saber, perquè el considerava un científic valuós i molt útil per a Roma. Per això, sembla que havia ordenat taxativament que ningú no el ferís. En assabentar-se, però, de la seva mort, va anar a retre homenatge a la família de l'ínclit prohom.

FIGURA 1.7. La presumpta tomba d'Arquimedes

Segons aquestes narracions, les darreres paraules d'Arquimedes van ser: «No esborris els meus cercles» (*Μὴ μου τοὺς*

38. Però que apareix representat en moltes obres d'art (<https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Death/DeathIllus.html>), entre les quals val la pena posar en relleu el mosaic trobat a Herculà.

κύκλους τάραττε),[39] referint-se a les figures que havia dibuixat sobre la pols o la cendra i que estava analitzant. Si bé aquestes figures ens són desconegudes, la fama del savi —malgrat l'oblit de Dant—[40] ha perdurat més enllà dels seus dies i pels segles dels segles, com mostra el fet que hi hagi tants doxògrafs que se n'hagin preocupat.

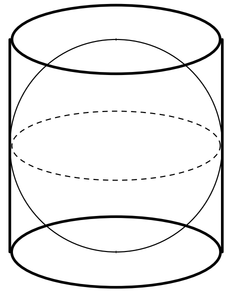


FIGURA 1.8. L'esfera inscrita en el cilindre

1.1.3*b* La tomba d'Arquimedes

El seu enorme prestigi va fer que, l'any 75 aC, l'orador romà Ciceró, que havia sentit històries sobre l'indret, el busqués mentre era qüestor a Sicília. La va trobar a Siracusa, prop de la porta d'Agrigent, en un estat descurat i colgada sota els arbustos. En fer-la netejar, hi va veure una inscripció (figura 1.8) que va reconèixer immediatament,[41] perquè representava una esfera inscrita en un cilindre (A.1.3d_1, pàgina 202).

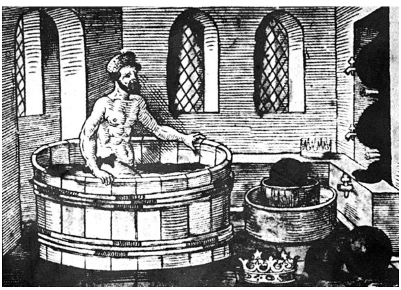


FIGURA 1.9. Arquimedes banyant-se

1.1.3*c* Eureka! (*Εὕρηκα!*)

El problema de la corona de Hieró que expliquem més avall, el preocupava i, dins la banyera, se li va ocórrer la manera de resol-

39. Aquesta exclamació és més coneguda en la forma llatina: «Noli tangere circulos meos.» Segons Valeri Màxim, l'expressió va ser: «Noli obsecro istum disturbare» —'Si us plau, no esborris això'. I, segons Tzetzes: «Company, aparta't dels meus dibuixos» (*Απόστεϑι, ὦ ἄνϑρωπε, τοῦ διαγράμματός μου*). Vegeu <https://books.google.es/books?id=BWp4TaA4cEC&pg=PA568&lpg=PA568&dq#v=onepage&q&f=false> i DIJKSTERHUIS (1987), p. 31.

40. Vegeu nota 37 (pàgina 12).

41. Recordem que l'esfera té un volum, i una àrea que val dues terceres parts el volum i l'àrea del cilindre que la circumscriu, incloses les bases [ECI 34, porisma, pàgina 319]. De fet, $\mathcal{V}_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ i $\mathcal{A}_{\text{esfera}} = 4\pi r^2$; $\mathcal{V}_{\text{cilindre}} = \pi r^2 \times (2r)$ i $\mathcal{A}_{\text{cilindre amb bases}} = (2\pi r) \times (2r) + 2\pi r^2$.

dre'l. Endut per l'excitació de la descoberta, nu com estava, va sortir-ne ben moll i va córrer pels carrers de Siracusa tot cridant: «Eureka! Eureka!»[42] (A.1.3*c* pàgina 200).[43]

Vegem, ara, com podem expressar analíticament aquest mètode tal com el descriu Vitruvi.[44]

> **Problema de Hieró II**. *La corona que m'ha lliurat l'orfebre pesa com l'or que li vaig donar perquè la fes. Però em pregunto si m'ha enganyat i ha barrejat l'or amb plata.*
>
> Considerem el pes p de la corona i suposem que està formada per un pes p_1 d'or i un pes p_2 de plata, és a dir, $p = p_1 + p_2$.
>
> La corona desplaça un volum d'aigua v.
>
> Si un pes p d'or desplaça un volum v_1 d'aigua, un pes p_1 d'or desplaça un volum $\frac{v_1}{p} \times p_1$.
>
> Si un pes p de plata desplaça un volum v_2 d'aigua, un pes p_2 de plata desplaça un volum $\frac{v_2}{p} \times p_2$.
>
> D'això es dedueix que el volum total v val:
>
> $$v = \frac{p_1}{p} \times v_1 + \frac{p_2}{p} \times v_2 = \frac{p_1 \times v_1 + p_2 \times v_2}{p_1 + p_2}.$$
>
> En definitiva,
>
> $$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2 - v}{v - v_1}.$$

▶ **Exercici 1**. Constateu la validesa dels passos del mètode analític que acabem d'exposar i deduïu-hi els valors de p_1 i p_2 en funció de v, v_1, v_2 i p. ◀

La resposta és: simplement es va adonar que, quan es ficava dins de la banyera, que estava plena fins dalt de tot, l'aigua sobreeixia. I, naturalment, n'eixia exactament un volum d'aigua igual al seu propi volum. I, com acabem de veure, aquest fet

42. Amb el significat «Ho he trobat!», que inclou l'acció «trobar» ($\epsilon\acute{\upsilon}\rho\iota\sigma\kappa\omega$).

43. Una part d'aquest text de Vitruvi l'hem usat com a text del frontispici de l'apèndix A (pàgina 179).

44. Recordem que les densitats de l'or i la plata són $19{,}30\,\mathrm{g/cm^3}$ i $10{,}49\,\mathrm{g/cm^3}$, respectivament. És a dir, donat un pes p concret, el metall menys dens ocupa un volum més gran.

és suficient per a resoldre el problema de la corona d'or. No ens cal ni recórrer al que anomenem el *principi d'Arquimedes* i que el siracusà enuncia —en forma de postulat— després de la proposició setena de *Sobre els cossos que floten.*[45] Ell es va adonar que l'aigua de sota d'una banyera plena d'aigua «aguanta» el volum d'aigua que ocupa la part superior. Per tant, l'aigua de sota aguanta un pes igual al de l'aigua que el cos desplaça. El dubte és: fa l'exclamació només per l'èxit d'haver trobat el camí per a resoldre el problema o perquè s'acaba d'adonar d'un principi de la hidrostàtica? Ens inclinem a creure que el seu entusiasme era degut al fet d'haver descobert aquest principi.

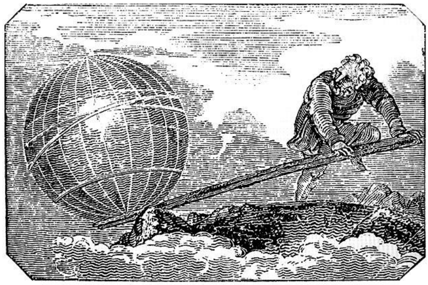


FIGURA 1.10. Arquimedes aixeca el món

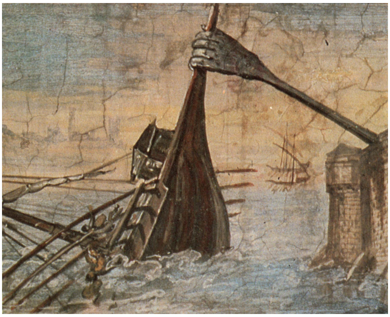


FIGURA 1.11. L'urpa d'Arquimedes

1.1.3*d* Un punt de suport permet aixecar el món

Si bé Arquimedes no va inventar la palanca, podem afirmar que va ser el primer geòmetra que va oferir l'explicació rigorosa del principi que entra en joc en accionar-la: la *llei de la palanca.* Segons Pappos,[46] motivat pel seu treball en aquest sentit, va eme-

45. «Suposem que cadascuna de les magnituds [que es troben en un líquid] desplaçades [cap amunt] són empeses enlaire segons la vertical que li passa pel centre de gravetat.» CFI, postulat 2 (B.9,1a_1, pàgina 488).

46. PAPPOS (1932), llibre VIII, proposició 10, edició francesa, vol. II, p. 836-837, i també el paràgraf XXXI, p. 873-878, que, com l'esmentada proposició, pertany al *Barulcó* (Βαρουλκός) d'Heró i que, probablement, es va afegir posteriorment. El títol prové dels termes *pes* (βασός) i *estirar*

tre la frase cèlebre: «Doneu-me un punt de suport i aixecaré el món» (*δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω*). Plutarc, per la seva banda, fa referència al *πολυσπάστου*,[47] un giny que permetia als mariners enlairar objectes que, d'una altra manera, haurien estat inamovibles.[48] Però Vitruvi, quan parla de les politges, no l'esmenta.

Disposem de diversos testimonis que fan referència a aquest fet (com ara A.1.1a_1 i b_5, pàgines 180 i 186). En particular, és interessant remarcar-ne aquells en els quals s'indica que, amb molt poc esforç, es pot aixecar un vaixell de tres pals, en clara referència a la politja i, més concretament, al polispast (en particular, A.1.1a_1, pàgina 181).

També se li atribueix una mena d'urpa (*ἁρπάγη ξείρ σιδηρᾶ*) o bec de grua (*στόμα εἰκάμενον γεράνου*) capaç d'alçar els vaixells propers a les muralles de Siracusa i estavellar-los contra aquestes (A.1.2a_5 [13], pàgines 191-192).[49]

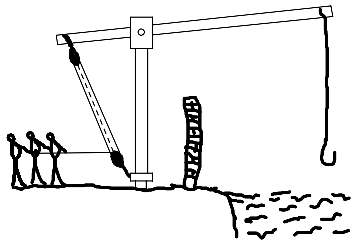


FIGURA 1.12. Esquema de l'urpa

1.1.3*e* El cargol

Es fa difícil creure que Arquimedes fos l'inventor del cargol.[50] Sembla molt més creïble pensar que a Egipte, on el diàleg amb l'aigua i les inundacions era mil·lenari ja devien haver trobat alguna mena de giny per a poar l'aigua.[51] En canvi, Eustaci de

(*ἕλκειν*).

47. PLUTARC (1932-1946), edició catalana, vol. VIII, p. 121. S'anomena també *bossell*. És un aparell de manutenció consistent en una o diverses politges col·locades dins un bloc de ferro o de fusta.

48. Vegeu l'article DOUGHERTY, MACARI i OKAMOTO (1824).

49. <http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Claw/illustrations.html>.

50. DALLEY i OLESON (2003).

51. Aquesta afirmació la podem sostenir amb els textos d'Estrabó i de Vitruvi (A.1.3 b_3 i b_4, pàgina 199).

de Tessalònica és taxatiu i afirma que Arquimedes va ser el primer a extreure aplicacions mecàniques del cargol en espiral o hèlix (A.1.3 b_7, pàgina 200).[52]

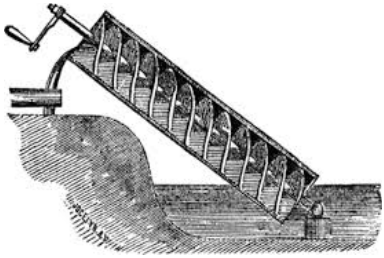


FIGURA 1.13. El cargol d'Arquimedes

Hi ha autors, però, —Ateneu de Nàucratis (A.1.3 b_5, pàgina 200) i Pappos (A.1.3 a_1, pàgina 197)— que van més enllà i suggereixen que el de Siracusa podia haver fet servir el cargol per a altres menesters diferents de l'extracció de l'aigua.

1.1.3*f* Els òrgans hidràulics

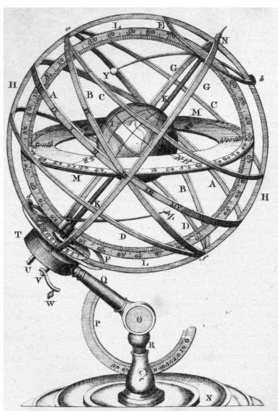


FIGURA 1.14. L'esfera armil·lar

No sembla gaire defensable que Arquimedes fos el creador dels òrgans hidràulics perquè, si bé Tertul·lià[53] li n'atribueix la invenció, Ateneu de Nàucratis, Plini el Vell i Vitruvi (A.1.3 b_6, pàgina 200) —que en dona una descripció força llarga— l'atribueixen a Ctesibi.[54] Tanmateix, podria ser que aquest mecànic perfeccionés un giny la invenció del qual es remuntés fins a Plató.[55]

---

52. Eustaci fa aquesta afirmació en els seus comentaris a la *Ilíada*.

53. TERTUL·LIÀ (1852), *Anima* (*De l'âme*), llibre II, XIV: «Considereu la meravella d'Arquimedes, aquesta màquina hidràulica on tantes rodes, tantes parts diferents, tants acoblaments, tantes sortides per a les veus, tants sons junts, tanta harmonia en els ritmes, tantes armadures de flautes formen un tot indivisible.»

54. Vitruvi li dedica el capítol setè, que titula «La màquina de Ctesibi per a poar aigua». És interessant veure la quantitat de vegades que esmenta les aportacions del «pare de la hidràulica».

55. EECKE (1960), p. XV-XVI.

1.1.3*g* *L'esferope*

Com ja hem indicat abans (pàgina 6), Arquimedes era fill d'un astrònom i, per tant, tenia coneixements d'astronomia. Per això no és sorprenent que intentés fer una representació del cel, és a dir, una esfera artificial o planetari. En tenim constància en un epigrama de Claudià (A.1.3d_1, pàgina 202) i en dos textos de Ciceró (A.1.3d_2 i d_3, pàgines 202-204). I, en aquest context, Pappos i Procle (A.1.3a_1 i a_2, pàgines 197-204) afirmen que l'únic llibre sobre mecànica que va escriure Arquimedes, *L'esferope* ($\Sigma\varphi\alpha\iota\rho o\pi\epsilon$)[56] —també conegut com a *Esfera armil·lar*—,[57] tracta d'aquesta qüestió.

1.1.3*h* Els miralls ustoris

Durant el setge de Siracusa, Arquimedes, entre molts altres ginys de defensa i d'atac, hauria ideat els miralls ustoris o ardents, que provocaven incendis mitjançant els rajos solars. Aquesta anècdota, però, planteja alguns dubtes que esmentarem ara per acabar la presentació d'aquesta secció.

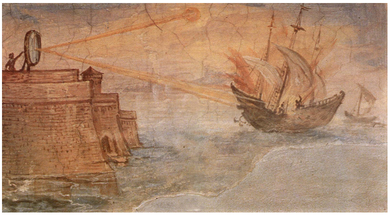


FIGURA 1.15. Una representació poètica dels miralls ustoris d'Arquimedes (1599-1600), de Giulio Parigi

1.1.3h_1 En les narracions del setge de Siracusa de Polibi, —la més creïble per la proximitat de l'autor amb els fets descrits—, de Tit Livi i de Plutarc (A.1.2a, pàgines 186-195), no hi ha cap referència a l'ús de miralls que cremessin les naus romanes concentrant els rajos solars sobre aquestes. En canvi, el text de Tzetzes (A.1.1a_1, pàgina 180) en parla de manera explícita: «Però el vell geòmetra va fer construir una mena de mirall hexagonal en el qual va col·locar petits miralls tetragonals a distàncies proporcionades a la mida del mirall.» I podem trobar altres textos que li atribueixen aquesta gesta (A.1.3e, pàgina 204).

56. AUJAC (1970) i (1976).

57. Els historiadors actuals afirmen que el pare de l'esfera armil·lar és Eratòstenes. En parlarem a PLA (en premsa c).

1.1.3*h*₂ Els miralls ustoris, però, plantegen una pregunta doble que cal respondre. Tenia Arquimedes els coneixements necessaris per a poder dissenyar aquesta mena de giny? I, en cas afirmatiu, tenien els manobres siracusans prou habilitat per a dur a bon port la seva implementació real? Aquestes preguntes es van plantejar al Renaixement i van suscitar una àmplia discussió.[58]

La qüestió és: Arquimedes va pensar en miralls plans mòbils de manera que tots els rajos que s'hi reflectissin fossin dirigits a un mateix punt o bé va recórrer a la propietat focal de la paràbola? No ho podem saber. Però podem afirmar que és molt probable que conegués la propietat focal de la paràbola, que estableix que «tots els rajos horitzontals que incideixen en la part còncava d'un mirall parabòlic es reflecteixen concentrant-se en el focus». Recordem que Diocles (240-180 aC) —que tenia vint-i-vuit anys quan Arquimedes va morir— va dedicar el tractat *Sobre els miralls ustoris* (*Περὶ πυρέιων*) a aquesta qüestió.

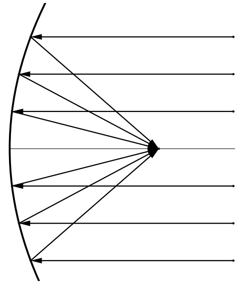


FIGURA 1.16. Propietat focal de la paràbola

Un aspecte ben diferent és que fossin capaços de fabricar-los. En el cas dels miralls plans, la quantitat enorme que se'n necessitarien no ho fa creïble. En el cas del mirall parabòlic, caldria fer un trencadís amb petits miralls plans que s'ajustés a la forma de la paràbola. A més, una altra qüestió problemàtica seria el càlcul de la grandària que hauria de tenir el mirall. Descartes, a la *Diòptrica*, nega categòricament la possibilitat de construir aquesta mena de miralls.[59]

58. Per a una informació més detallada, vegeu THUILLIER (1988), edició castellana, vol. I, p. 45-78.

59. DESCARTES (1637), p. 120-121; edició castellana, 1981, p. 162-163.

Per acabar, volem esmentar el comentari de François al text d'Antemi de Tral·les i el text de l'autor mateix:

> El quart i darrer problema mostra la construcció geomètrica d'un mirall còncau parabòlic quan se'n donen el diàmetre de l'obertura i el punt en el qual han d'incidir els raigs.
>
> Problema. *Construcció d'un giny capaç d'incendiar els objectes situats a una distància donada emprant els raigs solars.*
>
> Sembla inacceptable el mètode per a la construcció dels miralls ustoris perquè aquests miralls s'han de situar mirant el Sol en el moment en el qual es vol produir la crema. I així, si el lloc en particular no està en la mateixa alineació que els raigs solars, inclinant-se cap a un costat o cap a un altre, o trobant-se en una direcció oposada, és impossible aconseguir el que ens proposem. D'altra banda, la mida del mirall, que ha de ser proporcional a la distància necessària per a incendiar l'objecte col·locat al punt d'incidència dels raigs, ens porta a reconèixer que la construcció, segons el que estableixen els antics, és gairebé impracticable. Així doncs, d'acord amb les descripcions que coneixem, el problema proposat és impossible [de resoldre pels antics]. Ara bé, com que no volem llevar la glòria que es mereix Arquimedes, ja que hi ha un acord unànime sobre el fet que va cremar les naus enemigues amb l'ús dels raigs solars, estem obligats a admetre que el problema és possible. Per això hem volgut estudiar aquest assumpte pel nostre compte. I, després d'haver-lo examinat amb tota l'atenció de la qual som capaços, exposem la teoria que el mètode ens ha mostrat.[60]

60. Antemi de Tral·les (1777), p. 10-11.

Capítol 2

L'obra matemàtica d'Arquimedes

> L'imagination, dans un géomètre qui crée, n'agit pas moins que dans un poète qui invente. [. . .] De tous les grands hommes de l'antiquité, Archimède est peut-être celui qui mérite le plus d'être placé à côté d'Homère.
>
> JEAN LE ROND D'ALEMBERT[61]

> Inter omnia opera ad Mathematicas disciplinas pertinentia, iure optimo Principem sibi locum vindicare videntur Archimedis inventa; quæ quidem ipso subtilitatis miraculo terrent animos.
>
> EVANGELISTA TORRICELLI[62]

---

61. ALEMBERT (1751), edició electrònica de 2011, p. 33. «La imaginació no actua menys en un geòmetra que crea que en un poeta que inventa. [. . .] D'entre tots els grans homes de l'antiguitat, Arquimedes és, potser, el que més mereix figurar al costat d'Homer.»

62. TORRICELLI (1644), *Proemium*, p. 5. «Les troballes d'Arquimedes, que confonen les ànimes amb el miracle de la seva subtilesa, poden reivindicar el primer lloc entre tots els treballs referents a les disciplines matemàtiques.»

2.1 L'obra d'Arquimedes

L'obra d'Arquimedes consta d'un grapat de monografies —escrites en dòric,[63] el dialecte grec que es parlava a Sicília—[64] i ens planteja tres qüestions. La primera, la seva cronologia. La segona, la determinació de la manera com ens han estat transmeses. I la tercera, que tractarem en el paràgraf 2.1.3 (pàgines 44-50), l'agrupació conceptual d'aquestes monografies.

2.1.1 L'anàlisi de les monografies arquimedianes

Això no obstant, en l'anàlisi de l'obra de l'insigne geòmetra nosaltres seguirem el guió conceptual i no pas el cronològic, cosa que planteja una altra qüestió més: quin era l'establiment de la metodologia o de les metodologies que utilitza el siracusà en els treballs. En aquest paràgraf, donarem una resposta succinta a les tres primeres i deixarem la darrera per a l'apartat 2.1.2 (pàgines 30-44).

En la taula 2.1 oferim la llista de les monografies en ordre alfabètic i amb una sigla identificadora.[65]

TAULA 2.1. *Monografies d'Arquimedes en ordre alfabètic*

Sigla	*Títol (en català)*	*Títol (en grec)*
Ar	*Arenari*	*Ψαμμίτης*
CE	*Sobre els conoides i els esferoides*	*Περὶ κωνοειδέων και σφαιροειδέων*
CFI i II	*Sobre els cossos que floten*	*Περὶ τῶν ἐπιπλεόντων σωμάτων*
ECI i II	*Sobre l'esfera i el cilindre*	*Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνρου*
EPI i II	*Sobre l'equilibri de les figures planes*	*Περὶ ἐπιπέδων ισορροπιῶν*
LE	*Sobre les línies espirals*	*Περὶ ἑλίκων*

63. PLA (2016*b*), p. 7.

64. Llevat de les dues monografies més acurades, *Sobre l'esfera i el cilindre* i *La quadratura de la paràbola*.

65. Citarem les monografies usant-ne la sigla i no en repetirem el títol en grec.

TAULA 2.1. *Monografies d'Arquimedes en ordre alfabètic* (continuació)

Sigla	*Títol (en català)*	*Títol (en grec)*
Lm	*El llibre dels lemes*	*Βιβλία λημμάτων*[66]
MC	*De la mesura del cercle*	*Κύκλου μέτρησις*
Me	*Mètode*	*Περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος*
Os	*L'ostomaquió*	*Οστομᾶχιον*
Pb	*El problema dels bous*	*Πρόβλημα Βοεικόν*
QP	*La quadratura de la paràbola*	*Τετραγωνισμὸς παραβολῆ*

2.1.1*a* La cronologia de les monografies d'Arquimedes

No hi ha acord sobre les dates de realització de les obres d'Arquimedes perquè els teòrics han suggerit criteris diferents per a establir-les.[67]

El primer criteri el va aportar Giuseppe Torelli l'any 1792[68] i es basa en l'anàlisi de les informacions que contenen els preàmbuls d'algunes monografies,[69] criteri que es coneix com a *criteri filològic*.[70]

El segon criteri —*el deductiu*— es fixa en els resultats del corpus de cada monografia i la dependència que comporten, és a dir, en l'ús d'un resultat concret d'una d'aquestes establert en una altra.[71] Aquesta anàlisi la va proposar Jean Itard.[72]

66. Normalment, es designa en llatí amb el nom de *Liber assumptorum*.
67. En trobareu una explicació més àmplia a ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 25-33.
68. TORELLI (1792), p. XIII-XIV. Aquesta cronologia serà millorada per Heiberg i adoptada, entre altres autors, per Heath.
69. Cal indicar que l'aparició i l'estudi del palimpsest d'Arquimedes va obligar a fer una revisió dels criteris adoptats.
70. ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 25-27.
71. ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 27-29.
72. DEDRON i ITARD (1959), p 85-87.

El tercer criteri —*el metodològic*— va ser establert per Wilbur R. Knorr l'any 1978 en un ampli article.[73] Aquest criteri recorre als mètodes matemàtics usats en l'obra del siracusà i es fixa en el grau més o menys gran de dependència que tenen dels resultats euclidians i dels del mateix Arquimedes.[74]

El resultat de cada una d'aquestes propostes el recollim en la taula 2.2.[75]

TAULA 2.2. *Cronologies de les obres d'Arquimedes*

Man. A	*Heath*	*Itard*	*Knorr*
1. EC	1. EPI	1. EPI	*Obres de joventut*
2. MC	2. QP	2. QP	1. MC
3. CE	3. EPII	3. EPII	2. Ar
4. LE	4. Me	4. ECI i II	3. QP 18-24
5. EP	5. ECI i II	5. LE	4. EPI i II
6. Ar	6. LE	6. CE	
7. QP	7. CE	7. MC	*Obres de maduresa*
	8. CFI i II	8. Ar	5. QP 4-17
	9. MC	9. CFI i II	6. ECI i II
	10. Ar	10. Me	7. LE
			8. CE
			9. CFI i II
			10. Me

Val la pena indicar que es creu que són d'ell algunes monografies que no hem recollit en la taula 2.1 (pàgines 24-25) perquè s'han perdut.[76]

Pappos li atribueix:

a) Un llibre sobre l'esfera ($\Sigma\varphi\alpha\iota\rho o\pi\epsilon$).[77]

73. KNORR (1978*a*).

74. Hem d'indicar que els seus criteris no han estat acceptats plenament. Per exemple, VITRAC (1992) sosté que els de Knorr «són excessivament complexos i, de vegades, fins i tot cauen en el sofisma». ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 27-33.

75. L'hem manllevat d'ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 33. La lletra «A» de la primera columna de la taula fa referència a un manuscrit perdut. MASIÀ (2010), p. 27. Vegeu també la taula que ofereix MASIÀ (2010), p. 32.

76. HEATH (1894), p. XXXVI-XXXVIII.

77. Pàgina 19.

b) Un llibre sobre els semipoliedres regulars (*εμικανονικό πολύεδρος*).[78]

c) I *Sobre les balances* (*Περὶ ζυγῶν*), en el qual estableix el teorema següent: «Els cercles grans forcen (*κατακρατοῦσι*) els petits quan giravolten amb el mateix centre.»[79] No és gaire probable, però, que hi demostrés la proposició 6 de QP:[80] «Si un cos penja d'un punt i està en repòs, el centre de gravetat del cos i del punt de suspensió es troben en la mateixa vertical.»[81]

d) *Catòptrica* (*Κατοπτρικά*), en què, segons Teó d'Alexandria, va fer una observació sobre la refracció.[82]

e) *Principis* (*Αρχαί*), adreçada a Zeuxip, en la qual exposa el sistema d'enumeració de l'*Arenari*.

f) *Sobre els centres de gravetat* (*Κεντροβαρικά*), mencionada per Simplici en el *Comentari a 'De cælo'*, II, 508 a30).[83] Potser hi va establir el concepte de «centre de gravetat», que el siracusà no explicita a EP però al qual es refereix en la proposició 4.

g) Una monografia sobre l'Any Gran, segons Hiparc.[84]

La tradició àrab, al seu torn, li atribueix:

h) *El llibre dels lemes* (Lm), d'acord amb Tābit ibn Qurra.[85] El text conté una quinzena d'exercicis de geometria plana, entre els

---

78. Pappos (1932), llibre V, XIX, edició francesa, vol. I, p. 272-276.

79. Pappos (1932), llibre VIII, XI, edició francesa, vol. II, p. 841-842. Recordem que aquest problema preocuparà Galileu segles més tard. Galileu (1638), edició electrònica, p. 16-17.

80. Les sigles que hem atribuït a cada una de les monografies principals d'Arquimedes es troben en la taula 2.1 (pàgines 24-25).

81. Heath (1894), p. XXXVII.

82. Aquesta qüestió la va resoldre Willebrord Snel van Royen l'any 1621 i serà un dels motius de rivalitat entre Descartes i Fermat. Pla, Paradís i Viader (2008), p. 125-136 i 183-199.

83. Indiquem, de passada, que els comentaris d'Eutoci a algunes de les monografies d'Arquimedes són imprescindibles per a completar la comprensió del seu treball. Ortiz-García (2005), p. 71-87 i 357-434.

84. Heath (1894), p. XXI.

85. <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/BookOfLemmas/index.shtml>. I § 2.3.1 i B.11 (pàgines 139 i 549, respectivament).

quals retrobem superfícies planes limitades per arcs de circumferència i quadrables, en el sentit de les lúnules d'Hipòcrates de Quios.

i) I *L'ostomaquió* (Os), una mena de tangram.

S'ha dit també que havia establert la fórmula d'Heró, si bé la primera vegada que ens arriba explícitament és en l'obra d'aquest geòmetra.

2.1.1*b* La transmissió de l'obra arquimediana

Fem, ara, una presentació molt succinta[86] de les principals edicions i traduccions dels treballs d'Arquimedes.

Sembla que el primer erudit que va mirar d'aplegar les monografies disperses del siracusà va ser Isidor de Milet, i que les va traduir al grec vulgar (*κοινῆ*).[87]

Tanmateix, en va fer una recopilació força incompleta que va ser utilitzada per Eutoci en els seus comentaris sobre EC, EPi i MC, qui també diu que ha sentit a parlar de QP però que, en canvi, no esmenta LE, molt més interessant i innovadora.

Al segle IX, quan els matemàtics àrabs van descobrir l'obra d'Arquimedes, la van traduir, estudiar i comentar. Lleó de Tessalònica, pare del renaixement bizantí, en va confegir una nova recopilació basant-se en la d'Isidor. És, precisament, aquesta obra la que, mutilada i transformada, arriba a la cort dels Hohenstaufen durant el segle XII.[88]

---

86. Seguirem BABINI (1948), vol. II, p. 51-54. El lector interessat a aprofundir aquesta qüestió pot consultar VERA (1970), vol. II, p. 14-22, que fa una presentació molt interessant de cada obra. ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 66-88; HEATH (1894), p. XIII-XXVIII.

Vegeu <http://www.omnia.ie/index.php?navigation_function=3&europeana_query=Archimedes>.

87. Per a un estudi de la llengua grega en l'obra d'Arquimedes, MASIÀ (2012).

88. Els Hohenstaufen o els Staufer van ser una dinastia de reis germànics (1138-1254). Molts van ser coronats com a sacres emperadors romans i ducs de Suàbia.

Després de la mort de Manfred I (1266), el manuscrit de Lleó va passar a la cort vaticana. I l'any 1269 el flamenc Guillem de Moerbeke, basant-se en Arquimedes i en altres matemàtics, en va fer la traducció llatina, en la qual inclou CF. També Tartaglia havia establert una versió llatina de les obres d'Arquimedes que incloïa els dos llibres de CF.[89]

Els primers fragments editats de l'obra arquimediana daten de l'any 1501, moment en el qual apareix *De expetendis et fugiendis rebus* de Giorgio Valla.[90]

L'any 1544, sota els auspicis del papa Nicolau V, n'apareix la primera edició en grec i en llatí. Conté EC, CE, LE, MC, QP, Ar i EP. La va publicar, a Basilea, Thomas Gechauff Venatorius i va ser impresa per Johann Hervagius.[91]

D'altres obres arquimedianes en llatí són les de Federico Commandino (Venècia, 1558),[92] David Rivault (París, 1615)[93] i Christoph Sturm (Nuremberg, 1667).[94] També hem d'esmentar el text bilingüe grecollatí de Torelli (Oxford, 1792),[95] els alemanys de Carl Nizze (Stralsund, 1824)[96] i el francès de Peyrard (París, 1807).[97]

Fent un salt en el temps, l'any 1906, ja en el segle XX, Heiberg va trobar un palimpsest, és a dir, un manuscrit amb dos textos superposats, a Constantinoble. Contenia, com a escrit més recent o superior, un *Eucologi*. La superposició de les dues obres s'havia fet sense raspar la primera.[98] Només l'havien

89. Tartaglia (1543).
90. Valla (1501).
91. Venatorius (1544).
92. Commandino (1558).
93. Rivault (1615).
94. Sturm (1667).
95. Torelli (1792).
96. Nizze (1824).
97. Peyrard (1807). Hem seguit Ortiz-García (2005), p. 67.
98. Vegeu l'exposició divulgativa, no gaire aconseguida, de Netz i Noel (2007).

rentat. Per això, el manuscrit anterior o inferior era més o menys visible. Contenia EC, i gairebé tot LE, MC i EP. Però, sorpresa meravellosa, també incloïa gairebé tot CF i Me.[99] Apareixia allí, doncs, un manuscrit adreçat a Eratòstenes que es donava ja per perdut i en el qual Arquimedes explica un mètode heurístic a l'amic.

A la dècada dels setanta del segle XX en va aparèixer la traducció francesa, acompanyada del text grec de Heiberg, de Charles Mugler, actualment considerada una autèntica obra de referència.

Els textos —dels segles XIX, XX i XXI— sobre els quals hem treballat en l'elaboració d'aquest volum són:

En alemany, Gutenäcker (1828).
En grec i en llatí, Heiberg (1880-1881).
En anglès, Heath (1894).
En francès, Peyrard (1807), Eecke (1960) i Mugler (1970), (1971*a*), (1971*b*) i (1972).
En castellà (parcial), Vera (1970), vol. II, p. 23-297, i Ortiz-García (2005) i (2009).
En italià, Acerbi (2007).
En català, Masià (2012) i (2016).

2.1.2 La metodologia matemàtica d'Arquimedes

La majoria d'aportacions epistemològiques i metodològiques de la matemàtica grega es van plantejar —i algunes es van resoldre— a l'Acadèmia de Plató i al Liceu d'Aristòtil, com ja vam exposar amb prou detall en el seu moment[100] i vam completar de manera indirecta en l'anàlisi de l'obra d'Euclides.[101]

I, això no obstant, l'obra d'Arquimedes ens permet fer algunes reflexions d'ordre conceptual que recollim en aquest pa-

99. Heiberg (1880-1881).
100. Pla (2016*b*).
101. Pla (2021), § 2.2, p. 51-77.

ràgraf i que ens ajudaran, a més, a justificar l'ordenació que apliquem en la presentació ulterior de la seva obra.

2.1.2*a* Arquimedes, hereu de la tradició geomètrica precedent

Arquimedes coneix a la perfecció l'obra d'Euclides, en particular els *Elements*,[102] com veurem en els textos de l'apartat A.2 que reprodueixen les parts més rellevants de les monografies arquimedianes i que acompanyen la nostra exposició històrica.[103]

A més, en algunes monografies, com ara EC, CE i LE, el geòmetra de Siracusa segueix el guió fixat en els escrits euclidians, sobretot en els *Elements*. Així doncs, a EC, CE i LE, abans d'establir les proposicions, aferma les definicions dels objectes geomètrics que s'hi tracten, i, a EC i EP, els postulats, concretament cinc en el primer cas i set en el segon. Tot seguit, ofereix les proposicions que contenen problemes i teoremes.[104] Per tal d'emfasitzar aquest vincle, hem anotat en el marge dret de les seves demostracions els «elements» que usa el siracusà.

2.1.2a_1 Els postulats d'Arquimedes

Els dos postulats geomètrics més rellevants que planteja Arquimedes són el primer i el cinquè d'ECI perquè són geomètrics i generals,[105] és a dir, perquè el seu àmbit d'aplicació va més enllà de la monografia que els conté.

102. Vegeu, per exemple, les seixanta-nou proposicions que Arquimedes manlleva dels *Elements* i de *Dades* en la monografia EC. Masià (2012), p. 202-212. O noteu com fa esment al tractat de les còniques (pàgina 134).

103. En l'anàlisi veurem, d'una manera més acurada i concreta, l'ús de la seva metodologia, que ara exposem genèricament. Per a una exposició detalladíssima, el lector interessat pot consultar Heath (1894), capítols III, IV i V.

104. En el sentit descrit en Pla (2021), § 2.2.11, p. 95-96.

105. Els postulats d'EP estan completament vinculats a la temàtica de la monografia i fan referència a l'estàtica i a l'equilibri dels cossos.

ECI, postulat 1. Expressa la primera definició de *segment rectilini* de la literatura matemàtica grega. Diu:

> El *segment rectilini* és el més curt de tots els que comparteixen els mateixos extrems.

Establir-ho com a definició, com fa Adrien-Marie Legendre en els *Éléments de géométrie* (1849),[106] comporta els problemes d'haver de precisar què s'entén per *més curt*, ja que recorre a la noció de *distància entre dos punts*, i d'haver d'establir la manera com ho aplica.[107]

Sembla indiscutible, si més no des del punt de vista intuïtiu, que el concepte de «distància» té a veure amb el de *segment rectilini*. I això fa que s'eviti, doncs, un bucle.

El geni d'Arquimedes, però, hi troba una sortida. Imposa aquest concepte com a postulat i evita, d'aquesta manera, introduir-lo com a definició.

ECI, postulat 5. Estableix el que avui s'anomena el *postulat d'Arquimedes*, i ho fa en els termes següents:

> Donades dues línies, dues superfícies o dos sòlids diferents, l'excés del gran sobre el petit repetit un nombre de vegades [convenient] proporciona una línia, una superfície o un sòlid que supera una figura o l'altra.

D'antuvi, ens adonem que Arquimedes, més geòmetra que Euclides en l'exposició, evita el terme indefinit *magnitud*.[108]

Accepta, això no obstant, que una línia, una superfície o un sòlid es poden afegir a si mateixos un nombre finit de vegades i que el resultat és una línia, una superfície o un sòlid, respectiva-

106. LEGENDRE (1849), llibre primer, definició VIII, p. 1: «La *línia recta* és la més curta de les que uneixen dos punts qualssevol seus.»

107. S'ha dit que Teó d'Alexandria ja va indicar la necessitat d'imposar el «caràcter minimal» del segment rectilini com a definició.

108. PLA (2016*b*), p. 229 i 240, i notes 477 i 478. I PLA (2018), p. 48, nota 160, i p. 265-266, notes 795 i 797.

ment. I també que es pot sostreure una magnitud d'una de la mateixa classe.

D'aquest postulat se n'infereixen dos porismes:

1. El postulat d'Arquimedes. Donades dues magnituds diferents,[109] sempre hi ha un múltiple d'una que supera l'altra.

2. La convergència a zero de les parts n-èsimes d'una magnitud. Donades dues magnituds desiguals, sempre hi ha una part alíquota de la gran que és menor que la petita.

A més, admet també que una línia, una superfície i un sòlid es poden dividir en parts iguals i en parts desiguals, i que se n'obté una magnitud de la mateixa classe.

► **Exercici 2**. Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ dues línies, superfícies o sòlids, amb $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$. Proveu:

a) El postulat d'Arquimedes. Existeixen m i $n \in \mathbb{N}$ de manera que $m\,(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}) > \mathfrak{A}$ i $n\,(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}) > \mathfrak{B}$. [*Indicació.* Considereu les magnituds $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{B}$, i apliqueu-hi ECi, postulat 5.]

b) La convergència a zero. Existeix un $n \in \mathbb{N}$ de manera que $\frac{1}{n}\,\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$. [*Indicació.* Useu el més petit dels $n \in \mathbb{N}$, l'existència del qual està garantida per l'ítem *a*.] ◄

Amb aquest postulat —que necessita Dv 5 i del qual ja hem parlat—,[110] Arquimedes se situa de ple en la geometria tal com l'havia concebuda Èudox. Això li permet usar el mètode d'exhaustió en el sentit d'Euclides en el llibre XII,[111] però també el fet que una successió decreixent de línies, superfícies o sòlids, en la qual cada terme és més petit que la meitat de l'anterior, «tendeix a zero», com diríem ara. És a dir, que, donada una col·lecció $(\mathfrak{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de magnituds i $\mathfrak{E}$, totes de la mateixa classe,

si $\mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}_2 > \cdots > \mathfrak{A}_k > \cdots$ i, per a cada índex k, $\mathfrak{A}_{k+1} < \frac{1}{2}\mathfrak{A}_k$, hi ha un $n \in \mathbb{N}$ de manera que $\mathfrak{A}_n < \mathfrak{E}$.

109. Com ja hem indicat abans, en el llenguatge arquimedià, la magnitud només té a veure amb línies, superfícies i sòlids.

110. Pla (2018), p. 266, nota 798.

111. Pla (2018), Exii 2, 3, 4 i 5, p. 492-503.

Però el siracusà va més lluny i estén el mètode en dues direccions que creiem que val la pena posar en relleu:

1. Usa l'exhaustió interna —«per dins»— i l'exhaustió externa —«per fora»—, mentre que Euclides solament feia servir la primera.
2. Usa figures curvilínies —en concret, segments circulars—, quan li fan falta per a aplicar el mètode d'exhaustió, tal com veurem quan analitzem l'espiral a l'hora d'aprofundir els continguts de LE.

2.1.2a_2 L'ús de les raons i les proporcions

Òbviament, el fet de recórrer al mètode eudoxià obliga Arquimedes a usar la teoria de les proporcions tal com l'estableix Euclides en la definició Dv 5. Però no sempre dona els seus resultats en termes de proporció, sinó que, de vegades, utilitza la igualtat, com ara a MC 2, on estableix que $\mathfrak{T}_{\text{cercle}} = \mathfrak{S}_{\text{cercle}}$, i a QP 24, on diu que $\mathfrak{S}_{\text{paràbola}} = \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}_{\text{parabòlic}}$.[112]

En altres indrets, en canvi, sí que enuncia els seus teoremes en forma de proporció. Esmentem-ne dos que considerem molt interessants: els problemes ECii 4 i ECii 5. Es demana determinar el pla que talla una esfera de manera que la raó de *a*) les àrees i *b*) els volums dels segments que el pla hi determina sigui igual a una raó donada. Plantejats algebraicament, el primer problema proporciona una equació de segon grau i el segon una cúbica.

▶ **Exercici 3**. Siguin $d = 2\,r$ i ρ dos nombres reals donats. Considereu l'esfera de centre $(r, 0)$ i radi r. Determineu el punt $(x, 0)$, amb $0 < x < d$, de manera que el pla perpendicular a l'eix de les abscisses pel punt $(x, 0)$ talli l'esfera en: *a*) dues superfícies la raó de les quals és ρ; *b*) dos sòlids la raó dels quals és ρ.

Proveu que els ítems *a* i *b* equivalen a la resolució d'equacions alge-

112. Ho podria haver enunciat així: «La raó que hi ha entre la superfície de la paràbola, $\mathfrak{S}_{\text{paràbola}}$, i el triangle, diguem-ne, *parabòlic*, $\mathfrak{T}_{\text{parabòlic}}$, és la que hi ha entre 4 i 3.»

braiques de segon i tercer grau, respectivament. [*Indicació.* Vegeu § 5.2.4 *b* (pàgines 87-90) i, en particular, l'exercici 42 (pàgina 89).] ◀

A ECii 1 i ECii 5, Arquimedes accepta, sense demostració, que és possible construir dues mitjanes proporcionals.[113]

I es proveeix d'una eina nova —de fet, la manlleva— per a poder-les construir. Es tracta de la *neusi* ($\nu\epsilon\tilde{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$)o *inclinació*, que analitzarem més endavant quan parlem de Nicomedes.

És curiós observar que, de vegades, recorre a la *neusi* «sense que sigui necessari». Per exemple, a ECi 34, en què considera un polígon regular circumscrit i un inscrit semblants, els costats dels quals són β i γ. Necessita una raó entre segments que faci el paper d'arrel cúbica $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}$ de $\frac{\beta}{\gamma}$, amb $\beta > \gamma$. Però, de fet, en té prou amb què la raó que busca sigui $\frac{\beta}{\delta}$, en què δ és la primera de les dues mitjanes aritmètiques de β i γ.

▶ **Exercici 4**. Considereu dos segments $AB > CD$ i proveu l'existència de:

a) Els punts H i J, de manera que BH i BJ són dues mitjanes de AB i CD. És a dir, que, si feu BI igual a CD, satisfan $BJ - BI = BH - BJ = BA - BH$. [*Indicació.* Només cal que dividiu AI en tres parts iguals Evi 10.]

b) Un punt L que satisfaci que $\frac{AB}{BH} = \frac{BH}{BL}$ [Ev 12].

b_1) I, de retruc, *componendo* i *invertendo* [Ev 18 i Ev 7], que faci que $\frac{AB-BH}{AB} = \frac{BH-BL}{BH}$. Per tant, $AB - BH > BH - BL$ [Dv 5].

b_2) I que $BJ < BL$. [*Indicació.* Useu l'existència del punt J que compleix $AB - BH = BH - BJ > BH - BL$ [Ei 3].]

c) Un punt M, de manera que $\frac{BH}{BL} = \frac{BL}{BM} = \frac{AB}{BH}$ [Ev 12].

c_1) Raonant com abans, establiu que $BM > BI = CD$.

c_2) I que $\left(\frac{AB}{BH}\right)^3 = \frac{AB}{BM}$ [Dv 11].

d) Per tant, que $\left(\frac{AB}{BH}\right)^3 > \frac{AB}{CD}$ [Dv 5].

Si feu $\beta := AB$, $\gamma := CD$ i $\delta := AH$, haureu aconseguit $\frac{\beta^3}{\delta^3} < \frac{\beta}{\gamma}$. [*Indicació.* Mugler (1972), p. 35-36, o Thomas (1939), vol. ii, p. 120-121, nota *a*.] ◀

113. De ben segur que coneixia les construccions d'Arquites, Menecme i Plató. Pla (2016*b*), p. 256, 323-326 i 310-312, respectivament.

2.1.2a_3 Alguns comentaris a les definicions d'Arquimedes

En el sentit establert per la doctrina socràtica,[114] les definicions serveixen a Arquimedes per a introduir en cada monografia els objectes geomètrics —o d'una altra naturalesa— de nou encuny.

2.1.2$a_{3.1}$ Els conoides

Per exemple, a CE, introdueix el conoide rectangle, l'obtusangle i l'acutangle, que corresponen a les quàdriques de revolució que actualment coneixem com a *paraboloide*, *hiperboloide* i *el·lipsoide*. Aquests sòlids es generen quan es fa giravoltar una cònica, és a dir, una de les corbes que s'obtenen quan es talla un con amb un pla.

2.1.2$a_{3.2}$ Les còniques

Indiquem, encara que només sigui de passada, que Arquimedes genera les còniques com ho feien els geòmetres que l'havien precedit —Menecme, Euclides i Aristeu el Vell; talla cons diferents —rectes, obtusangles o acutangles— amb un pla paral·lel a l'eix. En canvi, Apol·loni ho fa des d'un altre punt de vista: divideix un mateix con amb plans diferents i obté cada mena de cònica segons que el pla sigui paral·lel a l'aresta, a l'eix, o ni a l'una ni a l'altre.[115]

2.1.2$a_{3.3}$ L'espiral

En la monografia LE introdueix la corba motiu de l'estudi: l'espiral d'Arquimedes, i ho fa amb la mateixa metodologia que Hípies havia fet servir per a estudiar la quadratriu,[116] és a dir, usant el moviment d'una semirecta que giravolta amb velocitat angular constant, mentre el punt de l'extrem es desplaça damunt la semirecta amb velocitat lineal també constant (pàgines 90 i 352).

114. Pla (2016*b*), § 4.1.2, p. 270-271.
115. Això ho veurem a Pla (en premsa *b*).
116. Pla (2016*b*), p. 251-253.

2.1.2$a_{3.4}$ La concavitat d'una corba

Potser els conceptes d'Arquimedes més notables per la seva generalitat són els de la monografia ECi. Per exemple, hi inclou una noció geomètrica —*topològica*, diríem avui—, la *concavitat d'una corba*. I, a més, hi amplia el ventall de corbes i superfícies dels *Elements* d'Euclides, amb la incorporació de les línies —i les superfícies— poligonals i mixtes.

2.1.2$a_{3.5}$ El rombe sòlid

Introdueix per primera vegada el rombe sòlid,[117] que usa com a «element» en moltes demostracions.

2.1.2$a_{3.6}$ El centre de gravetat i el pes específic

Amb tot, no trobem en la seva obra no geomètrica ni la definició de *centre de gravetat* (vegeu l'ítem *f*, pàgina 27) ni la de *pes específic* (vegeu les pàgines 126 i 128).

2.1.2a_4 La *neusi*

Com ja hem explicat a bastament en parlar del llibre I dels *Elements*,[118] Euclides només permet l'ús del regle i el compàs en les construccions geomètriques.

Però, altres geòmetres, per a poder resoldre la duplicació del cub i la trisecció de l'angle, es veuen obligats a recórrer a altres ginys o altres corbes.[119] Hi trobem, per exemple, la *neusi*, una tècnica que ja vam fer servir en la construcció de la tercera lúnula d'Hipòcrates de Quios.[120]

La preocupació per la resolució d'aquests problemes, en particular la trisecció de l'angle, que permet la construcció dels polígons regulars com ara l'enneàgon,[121] obliga els geòmetres grecs a estendre el camp de les eines constructives.

117. ECi, definició 6, pàgines 76 i 274.
118. Pla (2018), p. 82, nota 251.
119. Pla (2016*b*), p. 238-244, 251-253, 256-257, 310-312 i 323-327.
120. Pla (2016*a*), p. 247 i 261.
121. En grec, $\epsilon\nu\nu\epsilon\alpha\gamma\omega\nu o\nu$, $\epsilon\nu\nu\epsilon\alpha$, 'nou', i $\gamma\omega\nu o\nu$, 'angle'.

Per exemple, Arquimedes recorre a la *neusi* en dos moments de l'obra:

a) En el lema 8 de Lm, en què triseca l'angle.
b) A LE, en què l'usa d'una manera molt més àmplia.[122]

D'aquest mètode —i del giny de Nicomedes—, en parlarem amb més detall en el paràgraf de *Grècia IIId* dedicat al pare de la concoide.[123]

2.1.2*b* Arquimedes s'allunya de la tradició geomètrica precedent

A EIII 16 dels *Elements* ens vam trobar amb un objecte totalment atípic: l'angle de contacte,[124] l'originalitat del qual radica en el fet que és «més petit» que qualsevol angle rectilini. Això fa que, entre un angle rectilini i un angle de contacte, no hi hagi raó, en els termes establerts per Euclides a DV 4.[125] I, tanmateix, sembla que ell suposa que dos objectes geomètrics sempre n'han de tenir.[126]

Ara bé, gràcies al postulat d'Arquimedes, l'arquimedianitat dels objectes geomètrics queda absolutament garantida. Però, tal com hem indicat, el siracusà només parla de línies, superfícies i sòlids, i no ho fa pas de magnituds en general. Podríem admetre, doncs, que els angles no entren dins la categoria dels objectes geomètrics i així salvaríem aquesta dificultat. Tanmateix, es fa difícil creure que el concepte d'«angle» no sigui geomètric. Una cosa ben diferent és que Arquimedes no el consideri en els seus treballs d'una manera específica.

122. Vegeu KNORR (2007).
123. PLA (en premsa *c*), § 2.3.2, «Nicomedes i la concoide».
124. PLA (2018), p. 201.
125. PLA (2018), p. 266. Convé observar que no es tracta pas de comparar les superfícies que els angles tanquen, sinó els angles com a objectes geomètrics en si mateixos. Sobre la complexitat del concepte d'«angle», vegeu PLA (2018), p. 78, nota 220. I el text C 2.2*n* de PLA (2021), p. 232-237.
126. PLA (2018), p. 266, nota 798.

De fet, ens trobem en el terreny ontològic i epistemològic de la dualitat divisibilitat infinita / existència d'àtoms,[127] una dualitat que trenca, precisament, el postulat esmentat.

Doncs bé, el siracusà, en el *Mètode* (Me), una de les monografies que adreça a Eratòstenes i en la qual exposa el seu mètode heurístic per a la determinació dels resultats que després demostra de manera rigorosa en altres treballs, fa servir segments per a omplir superfícies, i superfícies per a curullar sòlids.

En aquest text —i també en la primera part de la monografia QP—, empra una metodologia «l'ús de la qual no val com a mètode demostratiu» que trenqui amb el rigor de la tradició dels geòmetres que l'han precedit.[128]

I, tanmateix, el mètode heurístic d'Arquimedes és molt complex i exigeix una capacitat d'anàlisi —en el sentit platònic del terme—[129] que fa difícil veure de quina manera es pot arribar a considerar.[130]

Sense cap mena de dubte, la descoberta d'aquest text, l'any 1906, és d'una importància enorme perquè fa palesa la unitat de pensament de l'ínclit geòmetra, unitat que el porta a recórrer, si cal, a propietats de naturalesa física —establertes a EP— que, combinades amb les de les superfícies i els cossos, fan que pugui determinar-ne l'àrea, el volum o el centre de gravetat.

127. Pla (2016*b*), p. 228-234, i el paràgraf 3.4.10, p. 253-255.

128. Tanmateix, al segle XVII, retrobarem un renaixement del mètode atomista aplicat a la resolució de problemes de càlcul integral en l'escola galileana i en Blaise Pascal.

129. Vegeu el paràgraf 1.2.10*a*, pàgina 132. I, pel que fa a l'anàlisi platònica, el paràgraf 3.2.1 de Pla (2021), p. 77.

130. Recordem que s'ha dit que, quan Galileu volia determinar superfícies de figures planes, les feia de cartolina, les retallava i les pesava amb una balança molt fina. I, quan volia determinar els volums dels sòlids, els submergia en un cubell ple fins dalt d'aigua i mesurava el volum d'aigua que havia sobreeixit.

2.1.2*c* Algunes aportacions aritmètiques

En el desenvolupament de les seves demostracions, de vegades, Arquimedes es veu en la necessitat d'emprar càlculs de naturalesa aritmètica, com ara la suma de progressions aritmètiques o geomètriques, de quadrats, de cubs, etc., i, fins i tot, la de termes trigonomètrics, que resol amb una gran simplicitat basant-se en les propietats geomètriques de les cordes d'una circumferència.

A més a més, en dues de les seves monografies, l'*Arenari* i *El problema dels bous*, l'aritmètica hi és amb dret propi.

2.1.2c_1 El sistema numèric de l'*Arenari*

Com ja vam comentar, el sistema numèric grec —a diferència del mesopotàmic i, de fet, semblantment a l'egipci— es basa en les lletres de l'alfabet grec i, en conseqüència, no permet expressar nombres grans.[131]

Per això, quan Arquimedes intenta comptar el número de grans de sorra de l'Univers, es veu obligat a recorre prèviament a un sistema de numeració força ric que funciona amb les anomenades *octades*, $P = 10^8$, que en constitueixen «la base de numeració».[132] Amb aquest sistema, els nombres que van de l'1 al $10^8 - 1$ formen el primer ordre del primer període. I, amb $P = 10^8$ —la unitat de segon ordre [del primer període]—, s'inicia el segon ordre que va del nombre P al $P^2 - 1 = 10^{16} - 1$. I així, successivament, l'ordre 10^8-èsim [del primer període] va del nombre P^{P-1} fins a $P^P - 1$. Tots aquests nombres formen el primer període. Un cop arribats aquí comença el segon període, que va de P^P fins a $10^8\, P^P - 1 = P^{P+1} - 1$. I així, successivament, fins a arribar a l'ordre 10^8-èsim del període 10^8-èsim.[133]

131. Pla (2016*b*), § 1.3, p. 9-12. I Pla (2016*a*), § 1.5 i § 2.4, p. 27-34 i 138-140, respectivament.

132. Molt sintètic, Dorce (2013), p. 163.

133. Ho explicarem, més detalladament, a § 2.2.8*c* (pàgines 121-122).

Dotat amb aquest sistema de numeració, demostra que l'Univers d'Aristarc, que és el que agafa com a model, no va més enllà de 10^7 unitats de l'ordre vuitè.

2.1.2c_2 Les arrels quadrades

Arquimedes usa les arrels quadrades[134] amb tota naturalitat. És molt probable que fes servir el que es coneix com a *fórmula d'Heró*.[135]

Ara bé, el siracusà les fita superiorment i inferiorment, és a dir, emprant la llei:

$$a \pm \frac{b}{2\,a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2\,a \pm 1}. \qquad (2.1)$$

▶ **Exercici 5**. Són correctes aquestes desigualtats? [*Indicació.* Els signes són tots + o tots −.] ◀

Curiosament, aquí introdueix, per primera vegada, el recurs a les fraccions contínues, d'una manera molt incipient, naturalment, però com una eina de càlcul força acurada.

Aquestes fites les trobem a MC, on tenen un paper molt rellevant a l'hora de delimitar superiorment i inferiorment el valor de la raó que hi ha entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre.[136]

També aproxima $\sqrt{3}$. I potser ho fa usant els nombres costat-diagonal, que són d'arrel pitagòrica,[137] tot i que no sigui fins a Teó d'Esmirna quan trobarem una descripció acurada del cas $\sqrt{2}$.[138]

---

134. Heath (1894), p. lxxxii-lxxxiv.

135. Vam indicar que aquest algorisme era conegut tant pels matemàtics egipcis com pels babilonis. Pla (2016*a*), p. 73 i 175-180.

136. Ho veurem, amb més detall, a § 2.2.7a_3 (pàgines 113-115). Vegeu també <https://pdfs.semanticscholar.org/5c6a/23ff8de9767ac2cf67bf78c42c8d67094ac1.pdf>.

137. Pla (2016*b*), p. 132.

138. Els exposarem en el volum *Grècia IV* (Pla (en premsa *d*)).

2.1.2c_3 La suma dels termes d'una sèrie geomètrica

A EIX 35, Euclides dona la recepta per a calcular la suma dels termes d'una progressió geomètrica. Però, què passa quan, en lloc d'una progressió geomètrica, allò que es vol sumar és una sèrie i no es vol trencar la limitació aristotèlica de l'infinit? Aquesta pregunta és rellevant perquè, per exemple, a QP 23 necessita valorar aquesta suma i ho fa establint el valor de la suma del romanent.

Ho resol «sumant» els termes de la sèrie

$$A, \frac{1}{4}\,A, \frac{1}{4^2}\,A, \ldots, \frac{1}{4^{k-1}}\,A, \frac{1}{4^k}\,A, \frac{1}{4^{k+1}}\,A, \frac{1}{4^{k+2}}\,A, \ldots$$

I ho fa afirmant i provant que

$$A + \frac{1}{4}\,A + \frac{1}{4^2}\,A + \ldots + \frac{1}{4^{k-1}}\,A + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^{k-1}}\,A\right) = \frac{4}{3}\,A. \quad (2.2)$$

Fixem-nos que, per tal de respectar la finitud imposada en la matemàtica grega per la doctrina aristotèlica,[139] afirma que la «suma» del romanent de la sèrie $\frac{1}{4^k}\,A + \frac{1}{4^{k+1}}\,A + \cdots + \frac{1}{4^{k+r}}\,A + \cdots$ val exactament $\frac{1}{3}\big(\frac{1}{4^{k-1}}\,A\big)$.

► **Exercici 6**. Proveu que, efectivament:
a) El valor del residu $\frac{1}{4^k}\,A + \frac{1}{4^{k+1}}\,A + \cdots$ és $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^{k-1}}\,A\right)$.
b) La fórmula 2.2 és correcta. ◄

2.1.2c_4 La suma dels termes d'una progressió aritmètica

Euclides no fa referència a la «suma» dels termes d'una progressió aritmètica ni tampoc a la dels seus quadrats.

Una aportació original d'Arquimedes consisteix a donar fites d'aquestes sumes. Així, per exemple, a LE 11, CE 21 i CE 22, estableix:

$$\left.\begin{array}{l} h + 2\,h + 3\,h + \cdots + n\,h > \frac{1}{2}n^2\,h \\ h + 2\,h + 3\,h + \cdots + (n-1)\,h < \frac{1}{2}n^2\,h \end{array}\right\} \quad (2.3)$$

139. PLA (2016*b*), p. 348-351.

I, a CE 2, considera la suma

$$S_n = (a\,h + h^2) + \Big(a\,(2\,h) + (2\,h)^2\Big) + \cdots + \Big(a\,(n\,h) + (n\,h)^2\Big)$$

i estipula les desigualtats següents:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n\,\left(a\,(n\,h) + (n\,h)^2\right)}{S_n} &< \frac{a + n\,h}{\frac{a}{2} + \frac{n\,h}{3}} \\ \frac{n\,\left(a\,(n\,h) + (n\,h)^2\right)}{S_{n-1}} &> \frac{a + n\,h}{\frac{a}{2} + \frac{n\,h}{3}} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

▶ **Exercici 7**. Proveu les desigualtats de les fórmules 2.3 i 2.4. ◀

2.1.2c_5 Una suma trigonomètrica

Utilitzant les propietats geomètriques de les cordes d'un cercle, Arquimedes determina els valors de les sumes de $n-1$ angles en progressió aritmètica, amb n parell ($n = 2\,k$) i primers termes $\frac{\pi}{4\,n}$ i $\frac{\alpha}{2\,n}$, en els quals $\alpha < \pi$. En concret, en les proposicions ECi 21 i ECi 22, hi trobem dues igualtats que, expressades en termes actuals, serien:

$$\sin\frac{\pi}{2\,n} + \sin\frac{2\,\pi}{2\,n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\,\pi}{2\,n} = \cot\frac{\pi}{4\,n}. \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} 2\left(\sin\frac{\alpha}{n} + \sin\frac{2\,\alpha}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\,\alpha}{n}\right) + \sin\alpha \\ = (1-\cos\alpha)\cot\frac{\alpha}{2\,n}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

▶ **Exercici 8**. Proveu les igualtats 2.5 i 2.6. [*Indicació.* Aquestes fórmules les hem manllevat, amb lleus modificacions, de LORIA (1895*b*), p. 296.] ◀

A més, necessita aquestes sumes per a establir les àrees dels sòlids de revolució descrits per polígons regulars amb un nombre parell de costats inscrits en un cercle, quan fa giravoltar el cercle per un diàmetre adequat, atès que aquestes sumes, multiplicades per $4\,\pi\,r^2 \sin\frac{\pi}{2\,n}$ i per $\pi\,r^2\,2\,\sin\frac{\alpha}{2\,n}$, donen $4\,\pi\,r^2\cos\frac{\pi}{2\,n}$ i $\pi\,r^2\,2\,\cos\frac{\alpha}{2\,n}(1-\cos\alpha)$, respectivament. I, quan $n \to \infty$, els cosinus tendeixen a 1 i obté les àrees que buscava.[140]

140. Ho exposem en la terminologia trigonomètrica actual per tal de fer-ho més entenedor. Els textos arquimedians corresponents es troben en les pàgines 312-313 i 313-314.

▶ **Exercici 9**. Sabríeu calcular les àrees de l'esfera i d'un segment d'esfera? [*Indicació.* Useu el càlcul integral.] ◀

És clar que el geòmetra de Siracusa no pot usar el concepte de «límit» i ha de recórrer al mètode d'exhaustió amb doble reducció a l'absurd.[141]

Observem que, en plantejar el càlcul de les àrees de sòlids de revolució, fa un pas més que Euclides.

2.1.2c_6 El problema dels bous

Per acabar aquesta presentació de les aportacions aritmètiques d'Arquimedes, fem un breu esment a «el problema dels bous». És un exercici ben curiós que ell mateix va plantejar a Eratòstenes.

En una illa hi ha una certa quantitat de bous i vaques de quatre colors: blancs (B, b), negres (N, n), marrons (M, m) i clapejats (C, c). Aquestes vuit quantitats estan lligades per set relacions lineals, expressades amb fraccions unitàries, com ara $B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) N + C$. El problema, que és diofàntic, resta indeterminat.

Aleshores, ell hi afegeix dues condicions:

$$B + N = \text{un nombre quadrat}[= p^2].$$

$$M + C = \text{un nombre triangular}\left[= \frac{q\,(q+1)}{2}\right].$$

Malgrat això, però, el problema roman indeterminat.

L'equació que en resulta, $Y^2 - 4729494\,X^2 = 1$, s'anomenarà, molts segles més tard, *equació de Pell*.

2.1.3 Les monografies agrupades conceptualment

Un cop repassades les aportacions metodològiques d'Arquimedes, arriba l'hora de fer una anàlisi de cada una de les monografies que hem esmentat més amunt. D'entrada, podem agrupar-

141. Pla (2016*b*), p. 321.

les pels seus continguts. Això ens porta, succintament, a la classificació següent:[142]

2.1.3*a* Planimetria

2.1.3a_1 *De la mesura del cercle* (MC)

Hi estableix el lligam entre l'àrea del cercle i el perímetre de la circumferència, i un «mètode iteratiu» per a acotar la raó existent entre la circumferència i el diàmetre.

2.1.3a_2 *La quadratura de la paràbola* (QP)

Hi estableix l'àrea d'un segment de paràbola i ho fa amb dues metodologies: l'una basada en la llei de la balança i l'altra en el mètode d'exhaustió.

2.1.3a_3 *Sobre les línies espirals* (LE)

Hi introdueix una corba nova —l'espiral—, hi analitza les àrees que tanquen les seves voltes diferents i hi dona una manera de «quadrar» el cercle.

2.1.3a_4 *El llibre dels lemes* (Lm)

Hi planteja una quinzena d'exercicis, alguns força elementals. Hi introdueix superfícies planes limitades per corbes —el *salinó* (*σάλινον*, 'saler') i l'*arbeló* (*ἄρβυλος*, 'ganivet de sabater'). I hi ofereix una manera de «trisecar» l'angle usant la *neusi*.

2.1.3*b* Estereometria

2.1.3b_1 *Sobre l'esfera i el cilindre* (EC)

Aquesta monografia és una de les que va adreçar a Dositeu i esdevé un autèntic complement dels *Elements* d'Euclides, ja que amplia l'estudi dels cons, els cilindres, els troncs de con i l'esfera. La novetat més important que ofereix és que n'analitza les superfícies i les compara.

142. Usem la paraula *planimetria* per a referir-nos a problemes que es plantegen i es resolen al pla. La paraula *estereometria* per a aquells que ho fan a l'espai.

Consta de dos llibres, amb quaranta-quatre i nou proposicions, respectivament, aquestes segones veritables problemes. Una proporciona la resolució d'una cúbica. La darrera —que demana la determinació d'un segment que tingui una raó donada amb el con de la mateixa base i la mateixa altura— inclou un diorisma. I la penúltima, força més difícil que les altres, conté l'ús de l'exponent fraccionari $\frac{2}{3}$. A més, hi trobem el resultat que Ciceró va veure inscrit a la tomba d'Arquimedes (pàgina 13).

Aquesta obra i la de la mesura del cercle (MC) completen l'estudi de les superfícies i els sòlids de la geometria elemental.

2.1.3b_2 *Sobre els conoides i els esferoides* (CE)

Aquesta monografia inicia l'estudi de les quàdriques de revolució, uns sòlids que van més enllà dels continguts dels *Elements*.

Això l'obliga a usar resultats de les còniques que, de vegades, no demostra. Hi descobrim, doncs, un bon coneixement d'aquestes corbes abans que de l'obra clau d'Apol·loni. En concret, un resultat interessant de CE és la comparació d'una el·lipse i el cercle de diàmetre l'eix més gran, cosa que fa que Arquimedes «quadri» l'el·lipse amb el cercle.

Les proposicions, en total trenta-dues, força complexes, les analitzarem més endavant.

2.1.3b_3 Els semipoliedres

Els àrabs li atribueixen l'estudi dels semipoliedres.[143]

2.1.3c Aritmètica o entreteniments aritmètics

2.1.3c_1 L'*Arenari* (Ar)

Arquimedes hi comparteix continguts d'astronomia. I, com ja hem dit, hi proporciona un sistema de numeració.

143. En parlarem en els paràgrafs § 2.3.4, B.14.1 i B.14.2 (pàgines 149, 577-581 i 581-583, respectivament).

2.1.3c_2 *El problema dels bous* (Pb)

Aquest problema mena a una equació de Pell molt difícil de resoldre.

2.1.3d Física

La resta de les monografies arquimedianes tracten de qüestions més físiques que no pas matemàtiques, concretament d'astronomia, estàtica i hidrostàtica.

2.1.3d_1 Astronomia

A l'*Arenari* hi ha alguns trets vinculats a determinades aportacions d'Aristarc.

Les dues monografies següents —EP i CF— inicien els estudis sobre qüestions d'estàtica, de les quals no tenim cap document anterior a Arquimedes. Ell hi fa esment per primer cop.

2.1.3d_2 Estàtica. *Sobre l'equilibri de les figures planes* (EP)

Aquesta obra consta de dos llibres prou senzills. El primer té set postulats i quinze teoremes, i el segon deu proposicions.

Malauradament, no hi trobem la definició de *centre de gravetat*. La primera definició d'aquest concepte l'ofereix Pappos al segle III i diu: «El centre de gravetat és un punt del pla o del sòlid que fa que l'objecte físic penjat d'ell no es mogui amb independència de la posició inicial.»[144]

Les EP I 6 i EP I 7 estableixen la llei de la balança: «Dos pesos, commensurables o incommensurables, s'equilibren a distàncies inversament proporcionals a ells.»[145]

Aquesta llei li permet determinar els centres de gravetat dels triangles, els paral·lelograms i els trapezis.

El segon llibre, en simbiosi amb QP, determina el centre de gravetat d'un segment de paràbola i d'un trapezi parabòlic.

144. A.1.3g_1 (pàgina 206).

145. Ernst Mach analitza si la llei de la balança ja es troba implícitament en els enunciats. Vegeu SCHLAUDT (2013).

2.1.3d_3 Hidrostàtica. *Sobre els cossos que floten* (CF)

La monografia sobre la hidrostàtica consta de dos llibres de nou i deu proposicions, respectivament. Segueix el model euclidià, amb dos postulats i dues proposicions.

No inclou, però, definicions. Un postulat es troba al començament, però l'altre està situat abans de la proposició CFI 7.

El primer postulat —que, de fet, és una definició— fa referència a la compressió de les parts d'un líquid uniforme i continu. Afirma que la part superior comprimeix la inferior segons la vertical, si el líquid no està comprimit.[146]

Basant-se en la naturalesa geomètrica de l'esfera, estableix que la Terra —considerada un líquid— ho és.

Les proposicions de CFI fan referència a les condicions d'equilibri d'un cos submergit en un líquid.

La setena proposició és el «postulat d'Arquimedes» dels líquids i inclou el «principi d'Arquimedes», que enuncia de manera explícita el segon postulat: «Tots els cossos submergits en un líquid es mouen cap amunt seguint la vertical. I l'empenta que reben en aquesta direcció és igual al pes del líquid que desallotgen.» (CFI 3)

Finalment, el segon llibre fa referència a les condicions d'equilibri d'un paraboloide de revolució.

Aquestes dues monografies, EP i CF —i, en particular, la segona—, són les més difícils de l'obra del siracusà. La seva comprensió requereix un cert esforç, en part a causa de l'ús que hi fa de la geometria.

És difícil saber si les idees de la darrera monografia són deutores de l'anècdota de la corona (pàgina 15) però no sembla forassenyat suposar-ho.

146. Aquest postulat, tanmateix, serà refusat per Eratòstenes (A.1.3f_1, pàgines 205–206) que, malgrat tot, com veurem a PLA (en premsa c), calcula el radi de la Terra.

2.1.3*e Mètode* (Me)

A l'obra *Mètode* (Me), Arquimedes comunica al bibliotecari d'Alexandria el mètode «heurístic» que fa servir per a trobar els resultats que després demostra *more geometrico* en diverses monografies.

Per exemple, volem determinar l'àrea o el centre de gravetat d'una superfície, i el volum o el centre de gravetat d'un sòlid però només una de les dues coses. Per fer-ho, equilibrem la superfície amb una àrea i un centre de gravetat coneguts [o un sòlid amb un volum i un centre de gravetat coneguts]. L'equilibri el pensem d'aquesta manera: en un braç de la balança hi ha l'àrea [o el volum] coneguda, concentrada en el seu centre de gravetat, i en l'altre braç hi ha la «suma de les parts atòmiques» —que són línies, en el cas de les superfícies[, i superfícies, en el cas dels sòlids]. Si coneixem el braç, podem determinar-ne l'àrea [o el volum]. Si coneixem l'àrea [o el volum], podem determinar-ne el braç i, de retruc, el centre de gravetat.

Realment, és un mètode heurístic digne d'un geni, ja que, per aplicar-lo, hem de ser capaços de determinar el valor de la «suma» dels àtoms en cada un dels casos que ens plantegem. I no és ni clar ni cert que trobem un camí planer per a fer-ho.

Vegeu-ne la genialitat en els tres exemples que hem aplegat en el paràgraf 2.2.10*c* (pàgines 134-138).

Si la troballa del text ja és digne d'admiració,[147] el contingut sobrepassa tota mena d'expectatives.

2.1.3*f L'ostomaquió* (Os), un entreteniment geomètric

De fet, *L'ostomaquió* és una monografia que estudia un problema de planimetria i ho fa d'una manera lúdica. Es tracta d'un gnòmon particular ideat per Arquimedes basant-se en certs angles concrets mitjançant figures que omplen un quadrat.

147. Netz i Noel (2007).

Ostomaquió prové de *οστομᾶχιον*, de *ὀστεον*, 'os', i *μάκη*, 'pugna'. I en el text trobem catorze peces que poden reconstruir un quadrat de 17.152 maneres diferents, encara que, de fet, són només 536, si prescindim de les rotacions i les simetries.

Cinc peces tenen una àrea igual a $\frac{1}{12}$ del quadrat, quatre $\frac{1}{24}$ d'ell, dos $\frac{1}{48}$, i cada una de les altres tres $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{6}$ i $\frac{7}{48}$. Totes són triangles menys les dues darreres, que són un quadrilàter i un pentàgon (figura Os 3*a*, pàgina 573).[148]

* * *

Un cop vista la diversitat i varietat dels temes de les monografies arquimedianes, havíem de prendre una decisió sobre la manera d'analitzar-les. Si la nostra obra hagués estat metodològica, ho hauríem fet per temes i, dins de cada tema, segons el grau de dificultat en la comprensió dels continguts. Però, atès que es tracta d'una història de la matemàtica, ens ha semblat que el més adequat és analitzar-les d'acord amb l'ordre cronològic, quan es van produir. Per tant, seguiran l'ordre de la columna Itard de la taula 2.2 (pàgina 26) i tancarem l'anàlisi amb Lm, Os, Pb i el dels semipoliedres.

2.1.4 Algunes observacions finals

Malgrat que les aportacions originals del siracusà són moltíssimes, com s'anirà veient en el corpus i en els textos, voldríem acabar amb algunes observacions a tall de síntesi.

2.1.4$\boldsymbol{a_1}$ La metodologia de l'exhaustió d'Èudox, que trobem abans d'Arquimedes, es basa en l'exhaustió per dins —en el sentit d'Antifont.[149] En canvi, Arquimedes l'amplia amb l'exhaustió per fora —en el sentit de Brisó.[150] De vegades, aquesta metodologia arquimediana s'ha anomenat *mètode de compressió*.[151]

148. Morelli (2009).
149. Pla (2016*b*), § 3.4.5, p. 235-236.
150. Pla (2016*b*), § 3.4.5, p. 236.
151. Heath (1894), capítol vii, p. cxlii-cxliv i cxlviii; Dijksterhuis (1987), § 8.20 a § 8.23, p. 130-132.

2.1.4*a*$_2$ La metodologia de la compressió li permet determinar la quadratura de la paràbola, de les voltes successives de l'espiral i de l'el·lipse, i, finalment, el càlcul dels volums dels el·lipsoides, paraboloides i hiperboloides de revolució. Aquests resultats posen de manifest la paternitat indiscutible d'Arquimedes del que, amb el pas dels segles, serà el càlcul integral.

2.1.4*a*$_3$ Un problema que havia preocupat tant els filòsofs com els geòmetres precedents era la «quadratura del cercle».[152] Euclides, a Exii 2,[153] proporciona, en el llenguatge de la teoria de la proporció d'Èudox, un resultat que estableix la invariància de la raó que hi ha entre el cercle i el quadrat del radi però no va més enllà. És a dir, no es planteja la naturalesa aritmètica o geomètrica d'aquesta raó. Arquimedes, en canvi, a MC, diu que el cercle equival al triangle rectangle de catets el radi del cercle i longitud la de la circumferència. Aquest resultat va en la línia de quadrar el cercle, ja que els triangles són quadrables.[154] La qüestió és, doncs, si, donat el radi del cercle, pot «linear» la circumferència, atès que el triangle té un catet que equival a la longitud del cercle. I, donada la invariància que hi ha entre aquesta longitud i el radi, mira de desxifrar com és aquesta raó i proporciona un mètode iteratiu per a determinar-la. Creu que, per aquest camí, aconseguirà la quadratura del cercle? No ho sabem però no ens sembla gaire imaginable.[155]

2.1.4*a*$_4$ Hipòcrates de Quios va aconseguir quadrar algunes figures curvilínies d'una certa mena, les lúnules.[156] En passar a l'espai, Arquimedes aconsegueix reduir les superfícies laterals a cercles, que són figures planes curvilínies, i els volums de sòlids limitats per superfícies corbades per altres sòlids més simples, però també limitades per superfícies corbades. Per exemple, l'esfera i el paraboloide equivalen a un con. Seguint Hipòcrates,

152. Pla (2016*b*), p. 148, 24-236, 434-435, 471, 478-482 i 494-495.
153. Pla (2020), p. 57, problema 29; p. 77, i també p. 488-494.
154. Pla (2016*b*), p. 144, i problema 6, p. 155-156.
155. Mugler (1970), p. xv.
156. Vegeu el paràgraf 3.4.7, ítem 4, de Pla (2016*b*), p. 244-248.

la qüestió bàsica és l'existència de sòlids amb la superfície corbada equivalents a un sòlid limitat per plans. I Arquimedes s'hi refereix explícitament en el *Mètode* (Me), en què afirma que n'ha trobat dos. Avui les anomenem l'*ungla cilíndrica* i la *volta cilíndrica*.[157]

2.2 Les monografies d'Arquimedes

Fem, ara, una anàlisi una mica més detallada de cada una de les monografies, seguint la cronologia d'Itard (taula 2.2, pàgina 26).

2.2.1 EPi: *Sobre l'equilibri de les figures planes* i

Ja hem considerat que aquesta obra és un tractat d'estàtica, és a dir, de matemàtica aplicada. Potser està inclòs en la doctrina platònica en el sentit exposat a *La república*.[158] Arquimedes elabora una estàtica geomètrica, és a dir, teòrica i d'una puresa màxima. Però, potser, és més encertat dir que fa una incursió mecànica a la geometria, atès que les propietats que estableix fan referència als «pesos» (*βάρεα*) i, en general, a les «magnituds» (*μεγέθαεα*). Entronca així amb el llibre v dels *Elements* d'Euclides.[159] Com que analitza l'equilibri de les figures planes, necessita el «centre de gravetat» (*κέντρα βασῶν ἐπιπέδων*).

El model que segueix és l'euclidià. La monografia comença amb vuit postulats —que engloben, ocultes, algunes definicions—, d'acord amb els quals estableix quinze proposicions.

157. Pàgines 130 i 532-548.

158. Vegeu A 1.2a_5 xvii [5] (pàgina 194). Recordem, tanmateix, que, en el *Fileb* 117, Plató, en classificar les ciències, obre la porta a les ciències aplicades:

Sòcrates. No és cert que les ciències es divideixen en dues branques, la que té com a objectiu les arts mecàniques i la que té com a objectiu l'educació de l'esperit o del cos? No és així?

Vegeu, també, Frajese (1963).

159. S'allunya, doncs, d'EC, en què no hi ha magnituds genèriques, sinó solament línies, superfícies i sòlids (pàgines 77 i 274-276).

Els postulats fan referència fonamentalment a tres qüestions: *a*) el comportament d'una balança —de fet, l'equilibri— atenent a la llargada dels braços i al fet que els pesos siguin iguals o diferents (EPI, postulats 1 a 3); *b*) el centre de gravetat de les figures, la seva situació en les figures de perímetre còncau (EPI, postulat 7), i *c*) el comportament geomètric de la posició d'aquest punt quan les figures són o bé superposables o bé semblants però no superposables (postulats 5 i 6).[160]

Les primeres proposicions estableixen els recíprocs dels primers postulats i es basen en la reducció a l'absurd. Però la proposició més notable d'aquesta primera part de la monografia és la «llei de la balança».

> EPI 6 i EPI 7. *Hi ha equilibri quan els pesos són inversament proporcionals als braços.*[161]

En la primera d'aquestes proposicions, els pesos —considerats magnituds— són commensurables. En la segona, incommensurables.

Seguidament, Arquimedes planteja i resol el nucli de la monografia: la determinació dels centres de gravetat de les figures poligonals planes: el paral·lelogram (EPI 9 i 10), el triangle (EPI 13 i 14) i el trapezi amb bases paral·leles (EPI 15).[162]

Val la pena que indiquem que usa «infinitèsims», no àtoms. És a dir, considera que un paral·lelogram es compon de paral·lelograms infinitament estrets, i un triangle, de trapezis de bases paral·leles infinitament properes.[163] I accepta que el centre de gravetat d'un paral·lelogram es troba damunt de la mitjana.

Mai no fa referència al centre de gravetat del cercle.

---

160. Pàgina 210.

161. Hi estableix una «condició suficient» per a l'equilibri (nota 580, pàgina 213). Pel que fa a la «condició necessària», vegeu l'exercici 11 (pàgina 55). Actualment, s'enuncia dient que «els productes dels pesos pels seus braços són iguals».

162. Pàgines 217, 218, 221, 223 i 224, respectivament.

163. Aquests objectes no són línies com a Me.

Aquest és, ras i curt, el contingut de la monografia EPI, força elemental i entenedora.

Per comprendre aquest ús purament geomètric, vegem ara com procedeix en la demostració de les proposicions EPI 6, 7 i 13.[164]

[EPI 6] *Dos pesos commensurables s'equilibren si els braços són inversament proporcionals a ells.*

Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ dos pesos —dues magnituds bàriques— penjats dels punts D i E (figura EPI 6, pàgina 214).[165]

Suposem que $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{CD}{CE}$.

Volem demostrar que C és el centre de gravetat [del sistema] de [pesos] A i B.

[*Demostració.*] Perllonguem el segment DE per les dues bandes amb els segments EL i DK, de manera que C és el punt mitjà de LK. [EI 2 o EI 3]

Ho fem, però, així: $EG = LE = CD$. [EI 2]

Aleshores, E és el punt mitjà de LG.

D'això en resulta que el punt D ho és del segment GK.

[vegeu el problema 10]

Per hipòtesi, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{CD}{CE}$. Per tant, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{LG}{GK}$. [EV 15]

I, atesa la commensurabilitat de $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, LG i GK també ho són. [EX 11]

Sigui N una mesura comuna de CD i CE.

Aleshores, $LG = m \times N$ i $GK = n \times N$.

Elegim ara un pes $\mathfrak{F}$, de tal manera que $\mathfrak{A} = m \times \mathfrak{F}$.

Aleshores, $\frac{LG}{N} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{F}}$ i $\frac{GK}{N} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{F}}$. [EV 22]

Ara considerem $\mathfrak{A}$ i LG dividits en parts iguals.

I, igualment, $\mathfrak{B}$ i GK.

---

164. De fet, les demostracions depenen d'alguns resultats establerts en el llibre EXI. En aquest cas concret, d'EX 11. Si volem fer una lectura més entenedora per a un lector actual, EECKE (1960), vol. I, p. 303-312.

165. Usem lletres alemanyes per a designar els pesos i aconseguir que la lectura de les expressions sigui més fàcil.

Col·loquem pesos iguals a $\mathfrak{F}$ a cada part N de LG i GK en el punt mitjà de cada part N.

La suma dels pesos $\mathfrak{F}$ col·locats a LG és $\mathfrak{A}$, i la dels col·locats a GK, $\mathfrak{B}$.

Els centres de gravetat de cada un dels sistemes són els punts E i D. [EPI, porisma 2]

Suposem que la suma $\mathfrak{A}$ es concentra a E i la $\mathfrak{B}$ a F.

Però el centre de gravetat de la suma de tots els pesos $\mathfrak{F}$ de LG i de tots els de GK és el punt mitjà C del segment LK.

Per fi, doncs, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{CD}{CE}$. ♠

▶ **Exercici 10**. Demostreu que:

a) D és el punt mitjà del segment GK. [*Indicació.* Resteu CG de $EG = CD$.]

b) Un cop refet el raonament anterior, constateu-ne la validesa, les mancances i les pressuposicions.

Exercici 11. Proveu que la condició «els braços són inversament proporcionals» és necessària per a l'equilibri de la balança. [*Indicació.* Useu la reducció a l'absurd.] ◀

Ara veurem la prova de la proposició següent. És quelcom palès que té llacunes.

[EPI 7] *Dos pesos incommensurables s'equilibren si els braços són inversament proporcionals a ells.*

Considerem dos pesos $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$[166] i $\mathfrak{C}$ col·locats en els extrems dels braços DE i EF, sent E el fulcre.

Si es dona la proporció $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{DE}{EF}$, el centre de gravetat del sistema format pels pesos $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ és el punt E.

[*Demostració.*] Si no ho és,[167] pot donar-se un d'aquests dos casos:[168]

a) el pes $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ és més gran que el que hi hauria d'haver en el punt F equilibrant el pes $\mathfrak{C}$ col·locat en el punt D,

166. Els passos de la demostració aclareixen les condicions a les quals estan sotmesos els sumands.

167. Hipotèsi de l'absurd.

168. Disjunció de casos.

b) el pes $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ és més petit que això.[169]

a) Suposem que $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ és massa gran per a poder equilibrar $\mathfrak{C}$ amb fulcre E.

La balança es decanta cap a l'extrem D.

Traiem de $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ una part prou petita [$\mathfrak{B}$][170] per tal que es mantingui el desequilibri,

però suficient perquè $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{C}$ siguin commensurables. [Ex 1][171]

Obtenim que $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} > \frac{DE}{EF}$. [Ev 5 i Ev 7]

En definitiva, no hi ha equilibri entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{C}$. [EPI 6] ♠

b) Si $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ és massa petit per a aconseguir l'equilibri amb fulcre E, resulta que $\mathfrak{C}$ és massa gran per a aconseguir-lo.[172]

Si acceptem aquest fet, només cal procedir com en l'ítem *a*. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ara exposarem la proposició més notable de la monografia i completarem les afirmacions del problema 6 (pàgina 153).

[EPI 13] *En tot triangle, el centre de gravetat es troba en el segment que uneix el vèrtex i el punt mitjà del costat oposat.*

Considerem el triangle $\triangle ABC$.

Tirem el segment AD [del vèrtex A] fins al punt mitjà de la base BC. [P 1 i EI 10]

Volem demostrar que el centre de gravetat del triangle $\triangle ABC$ es troba en el segment AD.

[*Demostració*.] Suposem que no és així[173]

i que el centre de gravetat [del triangle $\triangle ABC$] és el punt H.[174]

---

169. Arquimedes estableix el cas *a*. Seguidament, diu, «per les mateixes raons» (*διὰ ταὐτά*). La incommensurabilitat de $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ és simètrica, però no ho és pas la desigualtat entre $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$.

170. Aquest pas justifica que hagi anomenat $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ aquest pes.

171. Heus aquí la llacuna. Vegeu el problema 2 (pàgina 152) i la nota 164 (pàgina 54).

172. «Una cosa i l'altra són la mateixa cosa». Això és el que diu el text.

173. Hipòtesi de l'absurd.

174. Suposem que existeix el centre de gravetat.

Tirem el segment HI paral·lel al costat BC. [Ei 31]

Si dividim [la base] BD per la meitat iteradament, aconseguim un segment més curt que HI. [Ex 1]

Ara dividim BD i DC en parts iguals a aquest segment. [Ei 2 o Ei 3]

Per cada un dels punts de divisió, tirem un segment paral·lel a AD. [Ei 31]

[Aquests segments paral·lels tallen els costats AB i BC. [P 5]]

Tirem els segments EF, GK i LM. [P 1]

Són paral·lels a la base BC.[175]

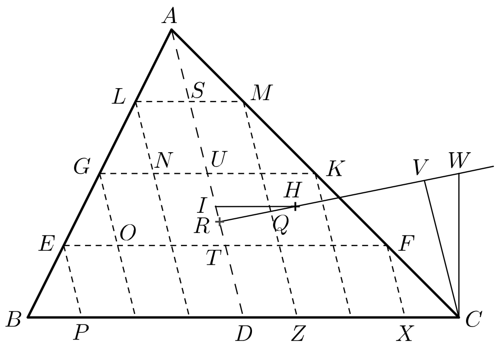


Figura 2.1. Vegeu EPi 13 (pàgina 222)

Els centres de gravetat dels paral·lelograms ▱MN, ▱KO i ▱FP es troben en els segments SU, UT i TD, respectivament. [EPi 9]

Per tant, el centre de gravetat de la figura conjunta [formada per aquests paral·lelograms] està situat en el segment SD. [EPi 4]

Ens imaginem que és el punt R.[176]

Unim RH [P 1]

i el prolonguem. [P 2]

Pel punt C, tirem el segment CV paral·lel al segment AD. [Ei 31]

La raó que hi ha entre el [triangle] $\triangle ADC$ i els construïts sobre els segments AM, MK, KF i FC[, semblants a aquest,] és la que hi ha entre CA i AM,

ja que els segments AM, MK, KF i FC són iguals. [Evi 19][177]

175. Ítem *a* del problema 6 (pàgina 153).
176. Nota 174. No ho tornarem a repetir.
177. Ítem *b* del problema 6 (pàgina 153).

Quan, en una pàgina, trobem una mateixa justificació diverses

I la raó que hi ha entre [el triangle] $\triangle ADB$ i els construïts sobre els segments AL, LG, GE i EB[, semblants a aquest,] és la que hi ha entre BA i AL. [EVI 19][173]

La raó que hi ha entre el triangle $\triangle ABC$ i els que són iguals al $\triangle ALM$ és la que hi ha entre AC i AM.

[EVI 6 i EV 12][178]

Però la raó dels segments AC i AM és més gran que la de VR i RH,

perquè la raó que hi ha entre AC i AM és la de VR i RQ.[179]

[EV 7]

Per tant, la raó que hi ha entre el triangle $\triangle ABC$ i la suma dels esmentats[, iguals al $\triangle ALM$,] és més gran que la de VR i RH.

En definitiva, *componendo*, la raó que hi ha entre els paral·lelograms $\varparallelogram MN$, $\varparallelogram KO$ i $\varparallelogram FP$ i els triangles que resten, és més gran que la de VH i HR. [EV 17 i EV 13][180]

Ara fem que la raó de WH i HR sigui la dels paral·lelograms i els triangles. [EVI 12][181]

Atès que del triangle $\triangle ABC$, amb centre de gravetat H, en sostraiem un pes —una magnitud— igual al conjunt dels paral·lelograms $\varparallelogram MN$, $\varparallelogram KO$ i $\varparallelogram FP$, amb centre de gravetat R,

el centre de gravetat del residu, format pels triangles que resten, es troba en la prolongació del segment RH.

I la raó entre RH i aquesta prolongació és la del pes sostret i el pes que queda. [EPI 8]

Per tant, el centre de gravetat és el punt W.

Però aquest fet és impossible,

ja que tots [els triangles] són en la mateixa banda [l'esquerra]

vegades, remetrem al número de la primera nota, a fi de no carregar la llista de notes amb *íbid*.

178. Ítem *c* del problema 6 (pàgina 153).
179. Ítem *d* del problema 6 (pàgina 153).
180. Ítem *e* del problema 6 (pàgina 153).
181. Ítem *f* del problema 6 (pàgina 153).

del segment paral·lel per W a AD[, i el centre de gravetat és a la dreta].

I això és el que volíem demostrar. ♠

▶ **Exercici 12**. Deduïu EPI 14: «El centre de gravetat d'un triangle és el punt en el qual es tallen dues mitjanes seves.» ◀

Val la pena indicar que Arquimedes recorre a EPI 14 en dues ocasions: A QP 6, en què afirma que l'ha establert amb el «mètode» —*ἐν τοῖς Μηχανικοῖς*—,[182] i, a Me 1, en què diu que l'ha demostrat *ἐν τοῖς ἰσορροπικοῖς*.[183]

En Arquimedes i en Euclides no hi trobem ni enunciada explícitament ni demostrada la propietat que estableix: «El centre de gravetat d'un triangle divideix la mitjana en dos segments la raó dels quals és 1 a 2.» I, tanmateix, el primer l'usa com la cosa més natural del món, com si fos ben coneguda, a EPI 15.[184]

▶ **Exercici 13**. Demostreu que, efectivament, el centre de gravetat del triangle divideix la mitjana en dues parts la raó de les quals és 1 a 2. [*Indicació*. És fàcil. Figura EPI 14 (pàgina 223). Uniu ED, i useu la semblança dels triangles $\triangle AHB$ i $\triangle EHD$ i el fet que els punts D i E són punts mitjans de BC i AC.] ◀

La determinació del centre de gravetat del trapezi de bases paral·leles —*τραπέζιον*— clou la monografia.[185]

La proposició EPI 15 és un porisma d'EPI 8 i EPI 14 que establim en els exercicis 13 i 14.

▶ **Exercici 14**. Proveu que:

a) Les prolongacions dels segments CD, FE i BA (figura EPI 15, pàgina 224) es tallen en un punt G.

a_1) Suposeu que el segment FE no passa per G [hipòtesi de l'ab-

182. Pàgina 230.

183. Me, lema 5, i Me 1 (pàgines 517 i 521). Nota 1499 (pàgina 521).

184. Pàgina 224.

185. Cal entendre que, com a EXII, el trapezi és un quadrilàter arbitrari que no és ni un quadrat, ni un rectangle, ni un rombe ni un romboide. Arquimedes imposa, doncs, la condició que les bases siguin paral·leles. Vegeu DI 22, PLA (2018), p. 80.

surd], el punt de tall de les prolongacions dels segments CD i BA.

a_2) Uniu G i F i veieu que $\frac{BZ}{ZC} = \frac{AE}{ED}$.

a_3) Deduïu-ne que la prolongació del segment EF passa pel punt G.

b) El centre de gravetat del trapezi —figura conjunta dels triangles $\triangle ABD$ i $\triangle BDC$— es troba en el segment PO [*Indicació.* És un porisma d'EPI 8.]

c) Els segments EF i OP es tallen. [*Indicació.* És un porisma del postulat 8 d'EPI.]

d) $\frac{PQ}{QO} = \frac{RQ}{QS}$. [*Indicació.* Useu els triangles $\triangle OQS$ i $\triangle PQR$.]

e) $\frac{2\,BC+AD}{2\,AD+BC} = \frac{2\,RQ+QS}{2\,QS+RQ}$. [*Indicació.* Feu servir les propietats de les proporcions del llibre V i alguna del llibre II o EVI 16.] ◀

El fet que la monografia EPI sigui la primera cronològicament —o, si més no, la primera de les que ens han arribat— fa que no ens sorprengui trobar, en l'obra d'Arquimedes, l'ús heurístic de la balança per a determinar àrees, volums i centres de gravetat.

2.2.2 QP: *La quadratura de la paràbola*

Aquest text és una carta adreçada a Dositeu, però el seu contingut està destinat a Conó.[186] Arquimedes diu que hi «quadra la paràbola»,[187] que el resultat és absolutament original i que l'ha intuït a partir de consideracions mecàniques. Per això, hi proposa dues demostracions: en la primera usa la mecànica abstracta; en la segona, la geometria i el mètode eudoxià d'exhaustió.

186. Aquesta carta adreçada a Dositeu s'anomena *La quadratura de la paràbola* (*Τετραγωνισμὸς παραβολῆ*) i, com ja hem indicat abans, l'abreujarem QP. Per a una traducció catalana, MASIÀ (2016), p. 143-179. Nosaltres solament en reproduirem una part.

187. Ens referim a aquesta carta com a *Τετραγωνισμὸς παραβολῆ*, però en l'època d'Arquimedes el terme *παραβολή* no s'usava per a expressar la corba, només apareixia en l'«aplicació d'àrees» (PLA (2016*b*), ítem *j*, p. 140 i 149). La corba es considerava com a secció del con rectangle —*ὀρθογωνίου κώνου τομά*. I, per a abreujar, s'usava l'expressió *τμᾶμα*. És a dir, Arquimedes obté la paràbola tallant un con recte amb un pla paral·lel a l'aresta.

La carta consta de tres parts ben diferenciades: l'exposició de les propietats de la paràbola [QP 1 a 5], la 'investigació' —*ἐθεωρήθη*— mecànica [QP 6 a 17] i la 'demostració' —*ἀποδείκνυται*— geomètrica [QP 18 a 24].

El resultat principal de la monografia té un enunciat simple:

> [QP 17 i QP 24] Sigui $\smile\!\!\!/\, ABC$ un segment de paràbola i AC una corda. Tirem la tangent a la paràbola que és paral·lela a la corda AC.
>
> Siguin B el punt de tangència. Unim B amb A i C. Obtenim un triangle $\triangle\, ABC$.
>
> [Quadratura de la paràbola] L'àrea $\mathfrak{a}\big(\smile\!\!\!/\, ABC\big)$ del segment de paràbola $\smile\!\!\!/\, ABC$ val $\mathfrak{a}\big(\smile\!\!\!/\, ABC\big) = \frac{4}{3}\triangle\, ABC$.

Dit d'una altra manera, «tot segment de paràbola és quadrable». És remarcable el fet que, des de les lúnules d'Hipòcrates de Quios, cap matemàtic no havia quadrat una àrea amb un costat corbat.

2.2.2*a* Les cinc propietats del segment de paràbola

Les tres primeres proposicions les atribueix a un text sobre còniques anterior, concretament d'Euclides (§ 2.1.2$a_{3.2}$, pàgina 36) o d'Aristeu,[188] actualment perduts. Remarquem que, concretament, QP 5 les demostra. Aquesta proposició és molt important per al desenvolupament del text.

QP 1. El diàmetre —*διάμετρος*—[189] o una paral·lela al diàmetre BD divideix la corda AC paral·lela a la tangent pel punt B en dues parts iguals, AD i CD. I recíprocament.[190]

188. Per a més detalls, consulteu Pla (2021), p. 5-6 i 130.

189. Recordem que el diàmetre és la recta que uneix els punts mitjans dels segments paral·lels a les cordes (CE 3).

190. Apol·loni de Perge (1963), Ci 46, a Pla (en premsa *b*), p. 197-198.

PQ 2. La tangent paral·lela a l'extrem de la corda talla el diàmetre [o un segment paral·lel al diàmetre] en un segment que el vèrtex divideix en dues parts iguals.[191]

PQ, 3. Les abscisses —$BD, BD', \ldots$— són com els quadrats de les ordenades —$DA, D'A', \ldots$[192]

► **Exercici 15**. Considereu la paràbola $Y = p\,X^2$ en un sistema ortogonal d'eixos cartesians. Feu un segment arbitrari que uneixi dos punts de la paràbola. La corda determina amb la corba un segment de paràbola. Tireu dues paral·leles a la corda. Observeu que els punts mitjans dels tres segments paral·lels estan alineats i el segment que passa per aquests —el diàmetre— talla la paràbola en un punt, el vèrtex.

Si $\smile\!\!/\, ABC$ és el segment de paràbola, AC n'és la corda, B el vèrtex i DB el diàmetre. Aleshores:

a) Si $AD = DC$, el segment ST paral·lel a AC és el segment tangent a la paràbola pel punt B.

b) Si CV és el segment tangent a la paràbola pel punt C i V és el punt pel qual talla el diàmetre DB, aleshores $DB = BV$.

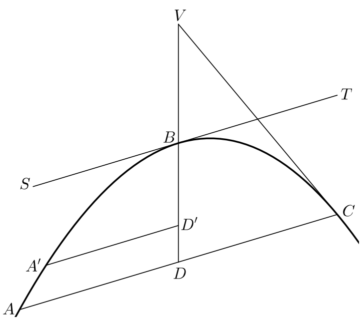


Figura 2.2. QP 1, 2 i 3

c) Si $A'D'$ és un segment paral·lel a AD, aleshores $\frac{BD}{BD'} = \frac{AD^2}{A'D'^2}$. ◄

QP 4. Sigui AB la base d'un segment de la paràbola $\smile\!\!/\, APB$ i P el vèrtex del segment (figura QP 4, pàgina 228).

Si una paral·lela al diàmetre[193] per un altre punt R talla AB per O i AP per F, aleshores AV és a VO com OF a FR.

► **Exercici 16**. Proveu QP 4. [*Indicació.* Useu QP 3.] ◄

QP 5. Sigui $\smile\!\!/\, ABC$ un segment de paràbola i AB la corda (figura QP 5, pàgina 229). Pels punts A i C, tirem AF paral·lel al dià-

191. Apol·loni de Perge (1963), C I 35, a Pla (en premsa *b*), p. 176-177.

192. Apol·loni de Perge (1963), C I 20, a Pla (en premsa *b*), p. 152-153.

193. Recordem que el diàmetre talla totes les cordes paral·leles a la corda AB pel punt mitjà.

metre i CF tangent a la paràbola pel punt C. En el triangle $\triangle FAC$, tirem un [segment] LK paral·lel a AF. La paràbola el talla [en dues parts] que tenen la mateixa raó que les parts que el segment LK, paral·lel a AF, determina en el segment AC, parts de AC i de KL de la banda del punt A i corresponents en la proporció.

▶ **Exercici 17**. Sabríeu demostrar les proposicions QP 4 i QP 5? [*Indicació*. Vegeu els textos B.2b_4 i B.2b_5 (pàgines 228 i 229).] ◀

2.2.2*b* La manera com s'equilibren els trapezis i els triangles d'un segment de paràbola

En aquest punt, Arquimedes inicia un seguit de proposicions en les quals equilibra triangles i trapezis amb una certa àrea (de QP 6 a QP 13).

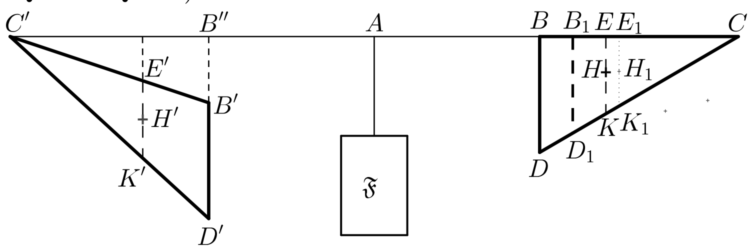


FIGURA 2.3. QP 6, 7, 8 i 9

Per exemple, les proposicions QP 6, 7, 8 i 9 equilibren un triangle *a*) rectangle $\triangle CBD$ o *b*) obtusangle $\triangle C'B'D'$, que pot tenir un costat a l'eix de la balança o bé penjar verticalment per un vèrtex de l'eix que es troba en el pla del triangle, amb una àrea $\mathfrak{F}$.

a) L'àrea $\mathfrak{F}$ està suspesa en l'extrem A d'una balança AC, i el catet BC del triangle rectangle està suspès en els extrems B i C, sent B el punt mitjà de AC. Aleshores, el pes $\mathfrak{F}$ que, col·locat en el punt A, equilibra el triangle és igual a una tercera part del triangle (QP 6).

b) L'àrea $\mathfrak{F}$ està suspesa en l'extrem A d'una balança AC', i el triangle obtusangle $\triangle B'C'D'$ d'angle obtús en el punt B', base

$B'D'$ i altura $B''C'$, que és igual a la meitat del braç de la balança, ho està dels punts C' i B''. Aleshores, el pes $\mathfrak{F}$ que, col·locat en el punt A, equilibra aquest triangle és igual a una seva tercera part (QP 7).

c) Anàlogament, en el cas que el triangle $\triangle B'C'D'$ tingui l'angle obtús en el punt B' (QP 9).

La proposició QP 8 estableix el resultat quan el triangle penja d'un punt que no és el mitjà, com en el cas del triangle [rectangle] B_1D_1C de la figura anterior. Suposem que l'àrea $\mathfrak{T}$ del triangle és a una àrea $\mathfrak{K}$ com AB a BB_1. Aleshores, l'àrea $\mathfrak{K} < \mathfrak{F} < \mathfrak{T}$.[194]

A més, Arquimedes ofereix resultats anàlegs per a trapezis de bases paral·leles i dos angles rectes o no rectes.

▶ **Exercici 18**. Sabríeu enunciar i demostrar les proposicions anàlogues a les anteriors per a trapezis? ◀

2.2.2*c* L'àrea d'un segment de paràbola, mecànicament

L'àrea d'un segment de paràbola val quatre terceres parts de la del triangle de la mateixa base i la mateixa altura i Arquimedes ho prova mecànicament. Amb eines mecàniques com ara les balances, pot establir el que desitja, és a dir, que l'àrea $\mathfrak{P}$ del segment de paràbola $\smile BHC$ és una tercera part de l'àrea $\mathfrak{T}$ del triangle $\triangle BCD$ i, de retruc, quatre terceres parts del triangle $\triangle BH'C$,[195] que té la mateixa base i la mateixa altura que el segment de paràbola (figura QP 16, pàgina 238). Són les proposicions QP 16 i QP 17.[196]

▶ **Exercici 19**. Proveu que:

a) Tots els trapezis d'una columna de la figura QP 16 (pàgina 238)

194. Els textos B.2c_1, B.2c_2 i B.2c_3 (pàgines 230, 231 i 232) proporcionen les demostracions de QP 6, 8 i 10.

195. Recordem que el segment tangent a la paràbola per H' és paral·lel a BC.

196. Vegeu els textos B.2c_6 i B.2c_7, pàgines 236 i 239.

són iguals. Per exemple, els trapezis de la columna de base MN i costats laterals les paral·leles a B per M i N, determinats per les secants que ixen del punt C, és a dir, CK, CI, CG, CE i CD.

b) L'àrea $\mathfrak{T}$ del triangle $\triangle\, BCD$ és quatre vegades l'àrea $\mathfrak{T}'$ del $\triangle\, BH'C$.

> [Demostració de QP 16.]
>
> Volem establir que $\mathfrak{P} = \mathfrak{F}$.[197]
>
> *b*) Suposem que $\mathfrak{P} > \mathfrak{F}$.
>
> b_1) $n\,(\mathfrak{P} - \mathfrak{F}) > \mathfrak{T}$.[198]
>
> b_2) $\frac{1}{n}\,\mathfrak{T} < \mathfrak{P} - \mathfrak{F}$. O sigui: $\frac{1}{n}\,\mathfrak{T} + \mathfrak{F} < \mathfrak{P}$.
>
> b_3) L'àrea $\frac{1}{n}\,\mathfrak{T}$ —que és l'àrea del triangle $\triangle\, BCE$— és la suma $\mathfrak{S}'$ dels trapezis que passen per la paràbola i un triangle,
>
> en concret, dels trapezis ⏢$EFME$, ⏢VL, ⏢HR i ⏢HP i del triangle $\triangle\, PCS$. [ítem *a*]
>
> Per tant, $\mathfrak{S}' = \frac{1}{n}\,\mathfrak{T}$.
>
> b_4) $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}' > \mathfrak{P}$, com mostra la figura. D'això en resulta que: $\mathfrak{S} + \frac{1}{n}\,\mathfrak{T} > \mathfrak{P}$.
>
> b_5) Però el nombre n l'hem triat de manera que $\frac{1}{n}\,\mathfrak{T} + \mathfrak{F} < \mathfrak{P}$. [ítem *a*]
>
> Per tant, $\frac{1}{n}\,\mathfrak{T} + \mathfrak{F} < \mathfrak{P} < \mathfrak{S} + \frac{1}{n}\,\mathfrak{T}$. O sigui que $\mathfrak{S} > \mathfrak{F}$.
>
> b_6) Però, per QP 14 i QP 15, tenim que $\mathfrak{F} > \mathfrak{S}$. Hem arribat a una contradicció en el supòsit que $\mathfrak{P} > \mathfrak{F}$.
>
> *b*′) També ho faríem de manera anàloga en el supòsit que $\mathfrak{P} < \mathfrak{F}$.[199] ♠

Exercici 20. Demostreu l'afirmació de la nota 643 (pàgina 235). [*Indicació.* Useu QP 5 i l'operació entre raons, *componendo*, Ev 18.] ◀

Com hem vist en la demostració anterior, Arquimedes necessita provar que el pes $\mathfrak{T}$ del triangle $\triangle\, BDC$ és més petit que el triple de la suma $\mathfrak{S}$ [dels pesos] dels trapezis externs

197. Figura QP 16 (pàgina 238).

198. Usem $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{P}$ per a designar les àrees de la superfície —que equival a la tercera part del triangle $\triangle\, BCD$— i del segment de paràbola de la figura.

199. És una demostració per exhaustió i per doble reducció a l'absurd.

del segment de paràbola $\smile BHD$ i un triangle, i més gran que tres vegades la suma $\mathfrak{S}'$ [dels pesos] dels trapezis interns del segment de paràbola $\smile BHD$ i un triangle. I és precisament per confirmar això que recorre a la balança i als pesos que equilibren aquests trapezis i rectangles (QP 14 i el problema 9, pàgines 233 i 155, respectivament).[200]

2.2.2*d* L'àrea d'un segment de paràbola, geomètricament

Aquí establim el resultat de l'ítem anterior usant recursos demostratius acceptats en geometria. La idea d'aquesta demostració és un calc de la que fa Euclides a Exii 2 per establir que la raó entre un cercle i el quadrat del seu diàmetre és fixa.[201]

La demostració geomètrica d'Arquimedes es basa en els quatre fets següents:[202]

1. Els triangles «adequats» —de la mateixa base i la mateixa altura que un segment de paràbola— cobreixen més de la meitat del segment.
2. Cada un d'aquests triangles val una octava part del triangle anterior.
3. Cal sumar, doncs, la sèrie

$$\mathfrak{T} + \frac{\mathfrak{T}}{4} + \frac{\mathfrak{T}}{4^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{T}}{4^k}T + \frac{\mathfrak{T}}{4^{k+1}} + \cdots$$

Però, com que no és possible sumar una sèrie, Arquimedes dona el valor del residu del seu $\mathfrak{R}_{k+1} := \frac{1}{4^{k+1}}\,\mathfrak{T} + \cdots$.

I, per veure que és correcte, suma enrere.

4. Aquesta suma li permet establir la impossibilitat de les dues desigualtats: *a*) $\mathfrak{P} > \frac{4}{3}\mathfrak{T}$ i *b*) $\mathfrak{P} < \frac{4}{3}\mathfrak{T}$. I d'això infereix la igualtat $\mathfrak{P} = \frac{4}{3}\mathfrak{T}$ que és, precisament, el que vol establir.

---

200. Per a una presentació més actual de la demostració, Frajese (1974), nota 13, p. 496-498.

201. Per aprofundir la idea, Pla (2016*b*), p. 320. I per a una explicació més acurada, Pla (2021), p. 57 i 58, i la nota 947, p. 493.

202. Textos B.2*d* (pàgines 241-248).

És una demostració d'una gran nitidesa i elegància!

Vegem-la més detingudament.

▶ **Exercici 21**. En el segment de paràbola $\smile ABC$, de base AC, tirem el diàmetre BD o un segment paral·lel a aquest. La tangent IJ o $I'J'$ a la paràbola pel punt B o F és paral·lela a la base AC o AB, respectivament. Si pels extrems tirem segments paral·lels al diàmetre, obtenim paral·lelograms com ara ▱ $AIJC$ o ▱ $AI'J'B$ (figura QP 18 a 21).

Proveu que:

a) QP 18. Si pel punt mitjà de la base —per exemple, D o H— tirem un segment paral·lel al diàmetre —DB o FE, respectivament—, el vèrtex del segment —B o F— és el punt pel qual el segment paral·lel al diàmetre talla la paràbola. [*Indicació.* Useu QP 1.]

Com a porisma, deduïu que cada un d'aquests vèrtexs proporciona l'altura del segment de paràbola corresponent.

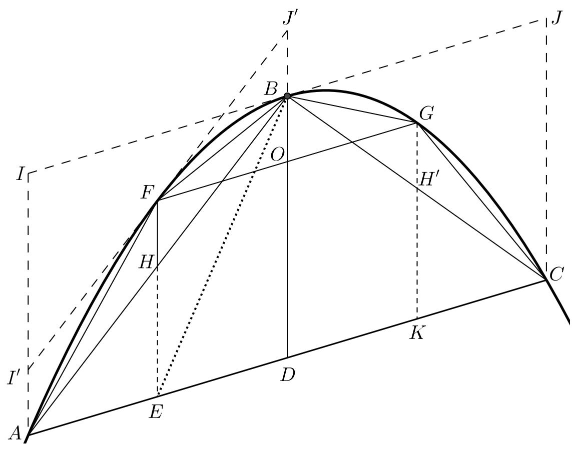


FIGURA 2.4. QP 18 a 21

b) QP 19. El segment BD és igual a quatre terceres parts del segment FE. [*Indicació.* Useu QP 3 per a veure, per exemple, que BD és igual a quatre vegades FH.]

c) QP 20. El triangle $\triangle ABC$ és més gran que la meitat del segment de paràbola $\smile ABC$. [*Indicació.* Vegeu PLA (2021), p. 57.]

Els triangles exhaureixen, doncs, el segment parabòlic. [EXII 1]

d) QP 21. El triangle $\triangle ABC$ equival a vuit vegades el $\triangle AFB$. [*Indicació.* Useu els fets següents:

d_1) $DA^2 = 4\,OF^2$, o sigui, $DA = 2\,OF, BD = 4\,BO$. A més, $FE = 3\,BO$ i, de retop, $BD = \frac{4}{3}\,EF = 2\,EH$.

d_2) $FH = \frac{1}{3}\, EF$.
d_3) Per EVI 1, $\frac{\triangle AFB}{\triangle ABE} = 2$ i $\frac{\triangle BGC}{\triangle CKB} = 2$.
d_4) $\triangle AFB = \frac{1}{2} \triangle AEB$, i $\triangle AEB = \triangle BED$.
d_5) Anàlogament, amb el segment circular $\frown BGC$.]

Exercici 22. Anomenem $\mathfrak{T}$ l'àrea del triangle $\triangle ABC$. Aleshores, d'acord amb l'ítem d de l'exercici anterior, els triangles $\triangle AFB$ i $\triangle CGB$ junts tenen una àrea igual a $\frac{\mathfrak{T}}{4}$. Iterant, omplim el segment de paràbola $\smile ABC$ amb les àrees $\mathfrak{T}$, $\frac{\mathfrak{T}}{4}$, $\frac{\mathfrak{T}}{4^2}, \ldots, \frac{\mathfrak{T}}{4^k}$. [*Indicació.* Feu-ho amb el llenguatge actual.]

Demostreu que $\mathfrak{T} + \frac{\mathfrak{T}}{4} + \frac{\mathfrak{T}}{4^2} + \cdots + \frac{\mathfrak{T}}{4^k} + \frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{T}}{4^k} = \frac{4}{3}\mathfrak{T}$. [*Indicació.* Feu-ho amb el llenguatge d'Arquimedes, en concret QP 22.] ◀

Ara Arquimedes disposa de totes les eines per a demostrar, per exhaustió i doble reducció a l'absurd, la quadratura de la paràbola (QP 23): «Tot segment de paràbola equival a quatre terceres parts el triangle de la mateixa base i la mateixa altura.»

[Demostració de QP 23.] Anomenem $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}$ i $\mathfrak{A}_i, i = 1, \ldots, k$, les àrees del segment de paràbola $\smile ABC$, del triangle $\triangle ABC$ i de $\frac{\mathfrak{T}}{4^i}$. I $\mathfrak{S}_k$, la suma $\mathfrak{T} + \frac{\mathfrak{T}}{4} + \cdots + \frac{\mathfrak{T}}{4^k}$.

Sabem que $\mathfrak{S}_k + \frac{1}{3}\mathfrak{A}_k = \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$.[203]

Volem demostrar que $\mathfrak{P} = \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$.

Si no és així,[204] tenim una d'aquestes dues possibilitats:
a) $\mathfrak{P} > \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$.
b) $\mathfrak{P} < \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$.

a) Suposem que $\mathfrak{P} > \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$. Aleshores, afirmo que existeix un $k \in \mathbb{N}$, de manera que $\mathfrak{P} > \mathfrak{S}_k > \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$.

En efecte, considerem $\mathfrak{E} = \mathfrak{P} - \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$.

Com que els triangles exhaureixen el segment de paràbola,[205] $\mathfrak{P} - \mathfrak{S}_k < \mathfrak{E} = \mathfrak{P} - \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$ per a un cert $k \in \mathbb{N}$. [EXII 1]

Per tant, $\mathfrak{S}_k > \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$.

Però això és impossible perquè la suma $\mathfrak{S}_k$ dels k triangles és més petita que l'àrea $\mathfrak{S}_k + \frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{T}}{4^k} = \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$. ♠

203. Exercici 22.
204. Hipòtesi de l'absurd.
205. Ítem c de l'exercici 21 (pàgina 67).

b) Suposem que $\mathfrak{P} < \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$. Existeix, doncs, un $k \in \mathbb{N}$, de manera que $\mathfrak{A}_k (:= \frac{\mathfrak{T}}{4^k}) < \frac{4}{3}\,\mathfrak{T} - \mathfrak{P}$. [EXII 1][206]

Ara bé, $\mathfrak{T} + \mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_k + \frac{1}{3}\mathfrak{A}_k = \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$.

Per tant, $\frac{4}{3}\,\mathfrak{T} - \big(\mathfrak{T} + \mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_k\big) = \frac{1}{3}\mathfrak{A}_k < \mathfrak{A}_k < \frac{4}{3}\,\mathfrak{T} - \mathfrak{P}$.

És a dir, $\mathfrak{P} < \mathfrak{S}_k$.

I això és impossible perquè l'àrea $\mathfrak{S}_k$ està inscrita en el segment de paràbola $\mathfrak{P}$. ♠

En definitiva, doncs, per exclusió dels dos casos analitzats, tenim que $\mathfrak{P} = \frac{4}{3}\,\mathfrak{T}$.

I així hem quadrat el segment de paràbola. ♠[207]

2.2.3 EPII: *Sobre l'equilibri de les figures planes II*

Aquesta monografia està dedicada a determinar el centre de gravetat d'un segment de paràbola (EPII 1 a 8, pàgines 250-260) i d'un trapezi parabòlic limitat per segments paral·lels a la base (EPII 9 i 10, pàgines 71-73). Un cop analitzats els continguts de les dues monografies precedents, aquesta preocupació no ens pot estranyar gens; ben al contrari, palesa una unitat de pensament en l'il·lustre geòmetra siracusà.

En aquest tractat, Arquimedes continua la línia de les dues monografies precedents, és a dir, de les seves obres primerenques, i alhora posa de manifest una manera de procedir d'una gran originalitat, perquè fa evident com n'és de particular el procés del seu raonament: amb un vincle molt íntim entre la matemàtica absolutament teòrica i rigorosa i l'aplicada, i amb l'ús, de vegades, de l'aplicada per a aconseguir èxits en la teòrica o «pura».

EPII 1. És un cas particular d'EPI 6 i 7 (pàgines 213 i 215), concretament dels segments parabòlics. Diu: «Si $\mathfrak{P}_1$ i $\mathfrak{P}_2$ són dos segments parabòlics, i H_1 i H_2 els seus centres de gravetat, el

206. De fet, si anomenem $\mathfrak{A}_k$ a $\frac{\mathfrak{T}}{4^k}$, veiem amb facilitat que, per passar de $\mathfrak{A}_{k-1}$ a $\mathfrak{A}_k$, a $\mathfrak{A}_{k-1}$ n'hi llevem més de la meitat.

207. KLINE (1972), edició castellana, vol. I, p. 157-160.

centre de l'àrea conjunta és el punt C de H_1H_2, per al qual es compleix la igualtat $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2} = \frac{CH_2}{CH_1}$.»

Més endavant analitza una sèrie de figures —polígons— inscrites en el segment parabòlic de forma adequada (recognoscible, $\gamma\nu\omega\rho\acute{\iota}\mu o\varsigma$). El triangle adaptat és el que té la mateixa base i la mateixa altura que el segment parabòlic, és a dir, la mateixa base que el segment parabòlic i el vèrtex en el punt pel qual el segment tangent a la paràbola és paral·lel a la base. Si considerem la successió de triangles adaptats a cada una de les cordes del segment parabòlic, obtenim el «polígon adaptat» al segment de paràbola.[208]

En aquest punt, Arquimedes s'adona de la llei dels senars:[209] els segments BN, NM, ML i LD són com els nombres $1, 3, 5$ i 7.

▶ **Exercici 23**. Proveu: *a*) EPII 1 i *b*) la llei dels senars (B.3*a*, pàgina 249). [*Indicació.* Vegeu EPII 1 (pàgina 250) i el problema 10 (pàgina 155).] ◀

És un lema previ a EPII 2 que diu que el centre de gravetat de la figura adaptada inscrita es troba en el diàmetre BD.

EPII 3. Els centres de gravetat dels segments parabòlics semblants són en els diàmetres respectius i respecten la proporcionalitat.

▶ **Exercici 24**. Demostreu:

a) En dos segments parabòlics semblants —la raó de la base i el diàmetre és la mateixa— els polígons adaptats també ho són.

b) L'afirmació «és evident que no tan sols els segments dels diàmetres sinó també els [segments] paral·lels tenen la mateixa raó» de la demostració d'EPII 3 (pàgina 252).

1. QP 3 (pàgines 227-228). $\frac{GN^2}{BN} = \frac{FM^2}{BM}$ i $\frac{G'N'^2}{B'N'} = \frac{F'M'^2}{B'M'}$.

2. Invertim les raons de la segona proporció i fem la composta de les dues terme a terme.

3. Per l'ítem 3 del problema 10, pàgina 155, $\frac{NM}{BN} = \frac{1}{3}$ i $\frac{N'M'}{B'N'} = \frac{1}{3}$.

---

208. Considereu el triangle $\triangle ABC$ o el polígon ⬠ $AEFGBHIKC$ de la figura EPII 2 (pàgina 251).

209. Galileu l'usarà per a establir la llei de la caiguda de greus.

Apliquem Nc 1, *componendo* i *permutando* [Ev 18 i 16]: $\frac{B'N'}{BN} = \frac{B'M'}{BM}$.

4. El que obtenim ho apliquem al resultat de l'ítem 2: $\frac{GN^2}{G'N'^2} = \frac{FM^2}{F'M'^2}$. [*Indicació.* Useu el fet que, si les raons dobles són iguals, les inicials també.] ◀

EPii 4. El centre de gravetat del segment parabòlic és en el segment BD. La demostració, per reducció a l'absurd, segueix el guió d'EPi 13, relatiu al del centre de gravetat del triangle.

A continuació, el geòmetra presenta unes proposicions d'una gran elegància —en particular, EPii 6—,[210] que són «elements» per a l'EPii 8, on determinarà el centre de gravetat del segment parabòlic.

Concretament, diu:

EPii 8. El centre de gravetat d'un segment parabòlic divideix el diàmetre de manera que la part més propera al vèrtex és igual a tres vegades la meitat de la més propera a la base.

Les dues darreres proposicions —EPii 9, element d'EPii 10, i EPii 10— proporcionen el centre de gravetat d'un trapezi parabòlic determinat per dues cordes paral·leles a la base. La primera la donarem de manera algebraica però sense alterar el text d'Arquimedes en el problema 13 (pàgina 157). La segona, *in extenso*, a EPii 10 (pàgina 266).

EPii 9. Considerem quatre segments rectilinis en proporció contínua. Sigui $[x]$ un segment rectilini de manera que la raó que hi ha entre aquest i les tres cinquenes parts de l'excés del gran sobre el tercer és com la que hi ha entre el més petit i l'excés del gran sobre el petit. I sigui $[y]$ un altre segment de manera que la raó que hi ha entre aquest i l'excés del gran sobre el tercer és com la que hi ha entre els segments formats per dues vegades el gran, dues el segon, sis el tercer i tres el quart, i el segment format per cinc vegades el primer, deu el segon, deu el tercer i cinc el quart.

210. Fixeu-vos de quina manera usa l'exhaustió.

Afirmo que aquests dos segments junts fan dues cinquenes parts del gran.[211]

▶ **Exercici 25**. Proveu EPII 9. [*Indicació.* Aïlleu x i y, sumeu-los i tingueu present que $ad = bc$. Vegeu el problema 13 (pàgina 157).] ◀

EPII 10. El centre de gravetat d'un trapezi parabòlic[212] es troba en la part del mig de cinc parts iguals de la part del diàmetre del segment parabòlic que pertany al trapezi parabòlic.[213] I el divideix fent que la raó que hi ha entre la part que es troba més a prop de la base i l'altra sigui la mateixa que la que hi ha entre el sòlid que té com a base la meitat de la base gran [del trapezi parabòlic] i com a altura el doble de la més petita i la gran juntes, i el que té com a base el quadrat de costat la meitat de la base petita i altura el doble de la gran més la petita.

▶ **Exercici 26**. Sabríeu establir aquest resultat? ◀

En concret, la proposició EPII 10 proposa el següent:[214]

Considerem el trapezi parabòlic ⌓ $ADEC$ determinat, tallant el segment parabòlic ⌣ AMC amb els segments rectilinis paral·lels AC i DE.[215]

Si el segment MF és el diàmetre del segment parabòlic ⌣ AMC, anomenem *diàmetre* del trapezi parabòlic ⌓ $ADEC$ el segment GF que queda determinat per les bases. Indiquem, ara, per b_1 i b_2, les bases gran i petita. El centre de gravetat I del trapezi parabòlic es troba en el diàmetre GF.

---

211. En un llenguatge més formal, aquest enunciat diu:
a) a, b, c, d amb $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$ i $a > b > c > d$.
b) $\frac{x}{\frac{3}{5}(a-c)} = \frac{d}{a-d}$.
c) $\frac{y}{a-c} = \frac{2\,ad+2\,b+6\,c+3\,d}{5\,a+10\,b+10\,c+5\,d}$.
d) $x + y = \frac{2}{5}\,a$.

212. Arquimedes afirma: *ἀπό ὀρθογωνίου κώνον τομάς ἀφαρούμενος* per a referir-se al trapezi parabòlic.

213. *Τάν δίχα τέμνουσαν τάς εύθείας πάσας τάς παρὰ τὰν βάσιν αὐτοῦ ἀγομένας.*

214. FRAJESE (1974), p. 440.

215. Òbviament, és mixtilini: les bases AC i DE són rectes, i els costats $\overparen{AD}$ i $\overparen{CE}$ corbats.

Precisant una mica més, podem veure que el punt I divideix la cinquena part central del diàmetre GF, HK, en dues parts HI i IK, de manera que $\frac{HI}{IK} = \frac{b_1^2\,(b_1+2\,b_2)}{b_2^2\,(2\,b_1+b_2)}$.[216]

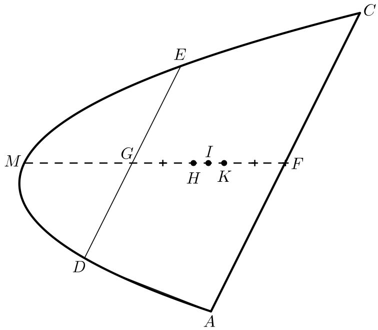


FIGURA 2.5. EPII 10

La demostració d'Arquimedes és llarga i embolicada.[217]

Ens hem volgut entretenir en aquestes tres monografies seves que, segons Itard, són les primeres que va escriure de les que ens han arribat perquè fan evident l'originalitat i la profunditat del seu pensament. En les monografies que presentarem tot seguit serem menys generosos en l'exposició, sobretot d'aquelles que ja tenen traducció catalana.[218]

2.2.4 ECI i II: *Sobre l'esfera i el cilindre I i II*

Aquesta monografia és una carta adreçada a Dositeu i, probablement, la més ben estructurada des d'un punt de vista metodològic. Segueix, fil per randa, les petjades d'Euclides en els *Elements*. S'inicia amb sis definicions i cinc postulats, i consta de dos llibres amb cinquanta i deu proposicions, respectivament.[219]

2.2.4*a* Comentari

De fet, és un text que complementa el llibre XI de l'obra euclidiana, en el sentit que determina els volums i les àrees de figures sòlides rodones de revolució i també dels seus segments

216. La figura 2.15 és una rèplica de la figura EPII 10 (pàgina 267).
217. VERA (1970), vol. II, p. 201-204; MUGLER (1971*a*), p. 120-125.
218. MASIÀ (2010) i (2016).
219. Per a la traducció acurada en català, MASIÀ (2010). Nosaltres seleccionarem només els textos que contenen els resultats més rellevants.

—cosa molt notable i innovadora. Cap no apareix en els *Elements*. I, en cinc lemes que precedeixen la proposició ECI 17, recull les proposicions EXII 11, 12, 13, 14 i 15, que ens recorden el lligam existent entre els cons i els cilindres d'una mateixa base o una mateixa altura, i entre els cilindres i els cons semblants.

2.2.4a_1 Introducció

En una breu exposició,[220] Arquimedes posa de manifest que, un cop aconseguida la quadratura de la paràbola —un resultat que ja havia enviat a Dositeu—, podia demostrar «alguns resultats que no s'havien establert abans (*ἀνελέγκων*)». I n'enumera quatre:

1. L'àrea de l'esfera equival a quatre vegades la del seu cercle màxim (*τοῦ μεγίστου κύκλου*).[221]
2. L'àrea d'un segment esfèric equival a la d'un cercle de radi el segment que uneix el vèrtex (*κορυφῆ*) del segment amb un punt de la circumferència del cercle que és la base del segment.[222]
3. El volum d'un cilindre amb la base igual al cercle màxim d'una esfera i l'altura el seu diàmetre equival a tres vegades la meitat de l'esfera.[223]
4. L'àrea d'aquest cilindre equival a tres vegades la meitat de la de l'esfera.[224]

► **Exercici 27**. Proveu les proposicions anteriors. ◄

«Aquestes són les propietats inherents als objectes geomètrics» (*αὐτὴ τή φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα*). I la seva exposició pot ser compresa amb facilitat pels lectors atents perquè segueix les pautes que ja havia emprat Èudox per a establir els volums de la piràmide i del con.

---

220. B.4.1a (pàgines 271-273).
221. ECI 33.
222. ECI 42 i ECI 43.
223. ECI 34.
224. ECI 34.

El mateix Arquimedes reconeix que li hauria agradat haver publicat aquests resultats en vida de Conó, perquè diu: «Crec que hauria estat capaç de comprendre'ls i opinar amb justícia sobre aquests», en una mostra de respecte envers aquest alexandrí del qual Virgili afirma:

> Al costat hi ha dues figures, Conó.
> I... de qui és l'altra,[225]
> que amb el compàs descriu, per a tothom, tot l'Univers
> amb els mesos de sega i d'arada?[226]

2.2.4a_2 Definicions (*Ἀξιώματα*)

Com ja hem indicat a la pàgina 31, Arquimedes proporciona sis definicions relatives a les corbes.[227]

ECI, definició 1. Expressa la idea que les corbes tenen límits —*καμπύλαι γραμμάι πεπερασμέναι*.[228]

I, en concret, considera les que es troben en un mateix costat d'un segment rectilini.

ECI, definició 2. Introdueix el concepte novell de «concavitat» —*κοίλη*— d'una corba en la mateixa direcció —*ἐπὶ τὰ αὐτάκοίλη*.

La definició no és gaire clara,[229] però la idea és que es trobi corbada pel mateix costat de qualsevol segment entre dos punts de la corba.[230]

ECI, definicions 3 i 4. Estén la definició anterior a les superfícies.

---

225. S'ha dit que podria referir-se a Èudox, que va ser el primer a descriure el moviment dels planetes. Però per què no podria haver estat Arquimedes, que va comptar els grans de sorra de l'Univers? O d'Eratòstenes, que va determinar la grandària de la Terra? De Conó i d'Eratòstenes, en parlarem més acuradament a PLA (en premsa *c*).

226. VIRGILI (1956), bucòlica III 40-43, edició catalana, p. 144.

227. B.4.1*b* (pàgines 273-274).

228. Entén que no són rectilínies o que es componen de parts rectilínies i no rectilínies però respecta una de les característiques euclidianes.

229. PEYRARD (1807), p. 448.

230. El terme *mateix costat* l'hem trobat ja a P 5. PLA (2018), p. 83.

ECɪ, definició 5. Afirma que un sector sòlid és el sòlid limitat per la superfície d'un con amb el vèrtex en el centre d'una esfera i per la part d'esfera que talla.[231]

ECɪ, definició 6. Afirma que un rombe sòlid és la figura limitada per dos cons de la mateixa base, amb els vèrtexs en una banda i a l'altra de la base i els eixos respectius alineats.

2.2.4a_3 Postulats (*Λαμβανόμενα*)

Com ja hem dit en el paràgraf 2.1.2a_1 (pàgina 31), Arquimedes estableix cinc postulats, dos dels quals —el primer i el cinquè— són realment notables:[232]

ECɪ, postulat 1. Afirma que, entre totes les corbes planes [simples] que tenen els mateixos extrems, n'hi ha una que és mínima [en longitud]: el segment rectilini.[233]

ECɪ, postulat 3. Afirma que, entre totes les superfícies còncavesen una mateixa direcció amb el mateix pla base, el pla és la més petita [en àrea].

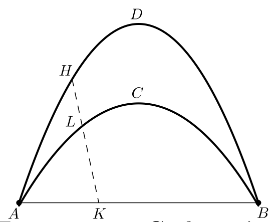


Figura 2.6. Corbes còncaves d'una mateixa banda, l'una ficada dins l'altra

Els postulats 1 i 3 d'ECɪ disposen una comparació entre línies i superfícies còncaves amb la mateixa direcció i els mateixos extrems. La que està totalment ficada dins de l'altra és més petita.[234]

La figura adjunta palesa el sentit que atorguem a les «corbes còncaves d'una mateixa banda amb els mateixos extrems», en què els punts A i B determinen un segment AB, la base. I l'una és dins dec l'altra quan qualsevol segment rectilini amb un extrem a la base i l'altre a la corba més allunyada queda dividit

231. És una generalització del concepte de «sector circular», Dɪɪɪ 10. Pʟᴀ (2018), p. 186.

232. B.4.1c (pàgines 274-276).

233. Subreptíciament, el de Siracusa admet que podem considerar que les línies —i també les superfícies i els sòlids— són comparables.

234. És a dir, té la longitud, l'àrea, més petita.

en dues parts. L'una es troba entre la base i la corba interna, i l'altra entre les dues corbes, la interna i l'externa.[235]

ECI, postulat 5. Proporciona el caràcter de postulat al principi d'exhaustió. En concret, estableix que l'excés de la línia, la superfície o el sòlid més gran sobre la línia, la superfície o el sòlid més petit,[236] afegit a si mateix [un nombre finit de vegades], supera l'un o l'altre.[237]

Els postulats permeten, a Arquimedes, enunciar un porisma relatiu als perímetres dels polígons inscrits en un cercle abans d'establir les proposicions.

[Porisma.] El perímetre d'un polígon inscrit en un cercle —entès com la longitud total dels costats del polígon— és més petit que la [longitud] de la circumferència.[238] [ECI, postulats 1 i 2][239]

2.2.4a_4 Proposicions

Les altres proposicions notables són les que posa de manifest en la introducció (pàgina 74). Tanmateix, volem posar en relleu les ECI 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 14, 15, 16, 21-27 i 28-32.[240]

ECI 1. El perímetre d'un polígon circumscrit a un cercle és més gran que la [longitud de la] circumferència [del cercle].[241]

235. Pot ocórrer que una part de les corbes es trobi damunt la base. Vegeu FRAJESE (1974), nota 16, p. 77. Una descripció semblant val per al cas de les superfícies amb un pla base comú.

236. Observem que, com ja hem indicat abans (pàgina 32), Arquimedes evita l'ús genèric del terme *magnitud*.

237. Arquimedes postula l'enunciat que Euclides demostrava a Ex 1 usant la definició Dv 5 que, de fet, no era una definició, sinó un postulat. Vegeu PLA (2018), nota 798, p. 266; (2019), p. 23.

238. D'ara endavant, usarem el mot *circumferència* tant per a referirnos a la corba com a la seva longitud.

239. Euclides usa les àrees dels polígons regulars per a exhaurir el cercle. Arquimedes, en canvi, fa servir els perímetres. Vegeu MC 3 (pàgines 111 i 459-462).

240. B.4.1d (pàgines 276-325).

241. El que correspon al porisma anterior per a polígons circumscrits.

ECɪ 2. Donats dos segments rectilinis diferents —$AB > D$—, és possible trobar-ne dos —$r > r'$— que facin que $\frac{r}{r'} < \frac{AB}{D}$.

ECɪ 3 i ECɪ 5. Donades dues magnituds diferents —$\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, amb $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$— i un cercle, podem trobar un polígon inscrit i un de circumscrit [regulars] de manera que les raons dels seus costats ℓ i L i de les [seves] àrees $\mathfrak{S}$ i $\mathfrak{s}$ compleixin $\frac{\ell}{L} < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ i $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{s}} < \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, respectivament.

▶ **Exercici 28**. Proveu:

a) L'afirmació de la pàgina 279: «Considerem dos segments rectilinis H i KL, en què H és més gran. Pel punt L, tirem LM perpendicular a LK [Eɪ 11]. Sempre podem determinar M de manera que KM sigui igual a H.»

b) La que estableix Eutoci.

c) $\frac{PQ}{CN} < \frac{MK}{KL}$ (pàgina 280). ◀

ECɪ 4 i ECɪ 6. Donades dues magnituds diferents —$\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, amb $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$— i un sector circular, podem trobar un polígon inscrit i un de circumscrit [regulars] de manera que la raó dels seus costats i de les seves àrees ℓ, L i $\mathfrak{S}, \mathfrak{s}$ compleixin $\frac{L}{\ell} < \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ i $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{s}} < \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$.

ECɪ 8. L'àrea —ἐπιφάνεια— d'una piràmide circumscrita a un con isòsceles, treta la base, equival a la del triangle de base el perímetre [de la base] de la piràmide i l'altura el costat [la generatriu] del con.

ECɪ 14. L'àrea d'un con [sense la base] és igual a la del cercle que té com a radi la mitjana proporcional de la generatriu i del radi de la seva base.

▶ **Exercici 29**. Proveu ECɪ 14. [*Indicació.* Vegeu la demostració següent.] ◀

[Demostració d'ECɪ 14]

[*Construcció*]

Siguin $\mathfrak{A}$ la base del con de radi C i generatriu D,
E la mitjana proporcional de C i D,
i $\mathfrak{B}$ un cercle de radi E. ♣

L'àrea $\mathfrak{S}$ del con equival a la del cercle $\mathfrak{B}$.[242]

242. En la figura d'Arquimedes ECɪ 14 (pàgina 304), no hi trobem el

[*Demostració.*] Suposem que són possibles dos casos.[243]]

a) Si $\mathfrak{B} < \mathfrak{S}$,[244] circumscrivim un polígon regular $\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{B}}$ a $\mathfrak{B}$ i, tot seguit, n'hi inscrivim un de semblant al circumscrit, $\mathfrak{p}_n^{\mathfrak{B}}$, per tal que $\frac{\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{p}_n^{\mathfrak{B}}} < \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}}$ [ECI 5].

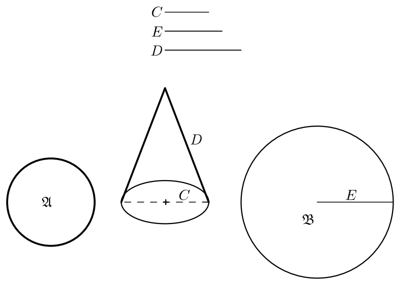


FIGURA 2.7. ECI 14

Considerem un polígon semblant en el cercle $\mathfrak{A}$.

Aleshores, tenim les igualtats: $\frac{\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{B}}} = \frac{C^2}{E^2} = \frac{C^2}{C \times D} = \frac{C}{D} = \frac{\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{S}_{\text{piràmide sense base}}}$ [per construcció, EXII 1 i EVI 1].[245]

Per tant, $\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{S}_{\text{piràmide sense base}}$ [EV 9].

Ara bé, $\frac{\mathfrak{P}_n^{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{p}_n^{\mathfrak{B}}} < \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}}$.

Per tant, $\frac{\mathfrak{S}_{\text{piràmide sense base}}}{\mathfrak{p}_n^{\mathfrak{B}}} < \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}}$. I això és impossible. ♠

▶ **Exercici 30**. Justifiqueu:

a) La darrera igualtat de la cadena d'igualtats de la demostració.

b) La darrera afirmació de la demostració.

Exercici 31. Proveu que l'altra hipòtesi $\mathfrak{B} > \mathfrak{S}$ també mena a contradicció. [*Indicació.* Vegeu HEATH (1921), vol. II, p. 37.] ◀

ECI 15. L'àrea d'un con sense la base és a la de la base com la generatriu al radi de la base.

▶ **Exercici 32**. Proveu-ho. ◀

ECI 16. Si tallem un con isòsceles per un pla paral·lel a la base, la superfície de la part del con limitada pels plans paral·lels sense les bases equival a un cercle de radi la mitjana proporcional de la part de generatriu que queda delimitada pels dos plans

---

con i totes les lletres són iguals.

243. Disjunció de casos.

244. Hipòtesi de l'absurd.

245. Ítem *a* de l'exercici 30.

paral·lels i la suma dels radis dels cercle delimitats per aquests plans.

▶ **Exercici 33**. Proveu-ho. ◀

Tot seguit, Arquimedes proporciona cinc lemes ($\lambda\tilde{\eta}\mu\mu\alpha$) que constitueixen els «elements» d'algunes de les proposicions d'ECɪ i ECɪɪ.[246] Són lemes que fan referència a la proporcionalitat que hi ha entre cons i entre cilindres. En concret:[247]

[Lema 1]. Els cons que tenen una mateixa altura són entre si com les bases respectives.

I els cons que tenen bases equivalents són entre si com les seves altures.[248]

[Lema 2]. Si tallem un cilindre per un pla paral·lel a la base, els cilindres són proporcionals als eixos respectius.[249]

[Lema 3]. Els cons amb la mateixa base que els cilindres tenen la mateixa raó.[250]

[Lema 4]. Les bases dels cons equivalents són inversament proporcionals a les altures. I els cons que tenen les bases inversament proporcionals a les altures són equivalents.[251]

[Lema 5]. Els cons que tenen els diàmetres de les bases proporcionals als eixos són entre si com la raó triple dels diàmetres de les bases.[252]

---

246. Frajese (1974), p. 120-121.
247. Text B.4.1*e* (pàgina 310).
248. De fet, són Exɪɪ 11 i Exɪɪ 14, respectivament, amb lleugeres modificacions.
249. És Exɪɪ 13.
250. Cal que tinguin també la mateixa altura. No es correspon amb cap de les proposicions dels *Elements* d'Euclides, però se sustenta indirectament sobre Exɪɪ 10.
251. Correspon a Exɪɪ 15. És un lema transcendent que ja s'aplica a ECɪ 17, una proposició que nosaltres recollim en el text B.4.1f_1 (pàgina 311) i que plantegem ara com a exercici.
252. Correspon a Exɪɪ 12, en què el resultat s'estableix també per a cilindres —que Arquimedes no recull. Es basa òbviament en la definició

▶ **Exercici 34**. Demostració d'ECI 17.

Considerem dos cons isòsceles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$. Suposem que l'àrea de la superfície [lateral] d'un equival a l'àrea de l'altre i que la perpendicular tirada pel centre de la base del primer a la seva generatriu és igual a l'altura de l'altre. Veurem que tenen el mateix volum.

[*Indicació.* Considerem dos cons isòsceles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$.

Siguin AG i DH les seves altures.

I sigui el segment HK perpendicular a la generatriu DE pel centre H de la base del con $\triangle DEF$.

Feu les figures.

Si la superfície lateral del con $\triangle DEF$ equival a la base del $\triangle ABC$,

$\frac{\text{base del } \triangle BAC}{\text{base del } \triangle DEF} = \frac{\text{àrea lateral del } \triangle DEF}{\text{base del } \triangle DEF}$ [EV 7].

$\frac{\text{àrea lateral del } \triangle DEF}{\text{base del } \triangle DEF} = \frac{DH}{HK}$ [ECI 15 i EVI 4].

Però, [per hipòtesi], $HK = AG$.

Per tant, $\frac{\text{base del } \triangle BAC}{\text{base del } \triangle DEF} = \frac{\text{altura del } \triangle DEF}{\text{base del } \triangle DEF}$ [EV 11 o NC 1].

Conseqüentment, les bases dels cons $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ són inversament proporcionals a les altures corresponents.

I els cons $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$, equivalents [ECI lema 4].]

Exercici 35. Demostreu ECI 18. Sigui $\diamond ABCD$ un rombe sòlid format per dos cons isòsceles de base comuna el cercle de diàmetre BC i altura AD. Feu un con $\triangle GHK$ de base equivalent a l'àrea lateral del con $\triangle ABC$ i altura igual al segment perpendicular DE pel punt D a AB o a la seva prolongació. És a dir, l'altura HL del con $\triangle GHK$ serà igual a DF. I veiem que el con $\triangle GHK$ equival al rombe sòlid $\diamond ABCD$. ◀

A l'hora d'investigar l'àrea ($\mathfrak{S}_{\text{esfera}}$) i el volum ($\mathfrak{V}_{\text{esfera}}$) d'una esfera, i l'àrea ($\mathfrak{S}_{\text{segment esfèric}}$) i el volum ($\mathfrak{V}_{\text{segment esfèric}}$) d'un segment esfèric de radi r, Arquimedes inscriu un polígon regular $\mathfrak{P}_{2n}$ de $2n$ costats en un cercle màxim de l'esfera o del segment esfèric i fa girar la figura al voltant del diàmetre.

DXI 24. L'expressió «la raó triple» és la mateixa que empra Euclides, *ἐν τριπλασίονι λόγῳ*, en clara referència a la definició DV 10.

Després mesura l'àrea i el volum dels sòlids que obté (ECI 21 a 27). I seguidament, els polígons regulars de $2n$ costats circumscrits (ECI 28 a 32).

És molt interessant analitzar les proposicions ECI 21 i ECI 22 (pàgines 312 i 313), en les quals estableix una identitat trigonomètrica amb eines geomètriques mitjançant una demostració d'una gran simplicitat i elegància.

[Esquema de la demostració d'ECI 21 i ECI 22]

En l'esfera $ABA'B'$ hi inscrivim el polígon regular de $2\,n$ costats $ABCDEFA'F'E'D'C'B'$.

Unim AA', BB', CC', DD', EE' i FF', i $B'C, C'D, D'E, E'F$ i $A'B$ [P 1].

Procedim de manera anàloga en el cas del segment esfèric $ABCDEE'D'C'B'$, en el qual considerem el segment AE en lloc del segment $A'B$.

A continuació, usem ara la semblança dels triangles adequats [EVI 4] per a establir:

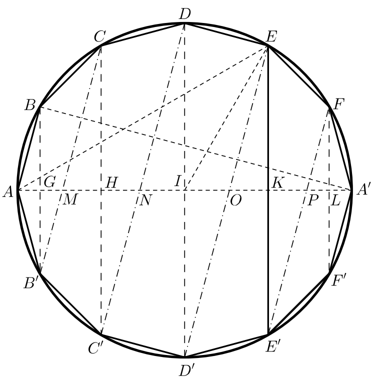


FIGURA 2.8. ECI 21 i ECI 22

a) En el cas de l'esfera completa:

$$\frac{BG}{GA} = \frac{A'B}{BA} \text{ i } \frac{BG}{GA} = \frac{B'G}{GM} = \frac{CH}{HM} = \frac{C'H}{HN} = \frac{DI}{IN} = \frac{D'I}{IO} = \frac{EK}{KO} = \frac{E'K}{KP} = \frac{FL}{LP} = \frac{F'L}{LA'}.$$

b) En el cas del segment esfèric:

$$\frac{BG}{GA} = \frac{A'B}{BA} \text{ i } \frac{BG}{GA} = \frac{B'G}{GM} = \frac{CH}{HM} = \frac{C'H}{HN} = \frac{DI}{IN} = \frac{D'I}{IO} = \frac{EK}{KO}.$$

I després apliquem EV 12 —la suma dels antecedents és a la dels consegüents com un antecedent a un consegüent:

En el cas a, tenim que: $\frac{BB'+CC'+DD'+EE'+FF'}{AA'} = \frac{A'B}{BA}$.

En el cas b, tenim que:

$$\frac{BB'+CC'+DD'+EK}{AK} = \frac{BB'+CC'+DD'+\frac{1}{2}\,EE'}{AK} = \frac{A'B}{BA}.$$

♠

[Conseqüències dels resultats anteriors]

Quan la figura gira al voltant del diàmetre AA', el sòlid es compon de cons i de troncs de cons.

Arquimedes ha establert per a un cas i l'altre,[253] en llenguatge més actual i introduint π, que

a) les àrees dels cons ABB' i AFF' equivalen a $\pi\, AB \times BG$ i $\pi\, A'F \times FL$;

b) l'àrea del tronc de con $BCC'B'$ equival a $\pi\, BC \times (BG + CH)$. I les altres àrees anàlogament.

Ara bé, el polígon és regular, és a dir, $AB = BC = \cdots = C'B' = B'A'$.

En definitiva, la suma de les àrees del sòlid inscrit val:

En el cas *a*, $\pi\, AB \times (\frac{1}{2}BB' + \frac{1}{2}(BB' + CC') + \cdots) =$
$= \pi\ AB \times (BB' + CC' + DD' + EE' + FF')$. [ECɪ 24]

En el cas *b*, $\pi\ AB \times (BB' + CC' + DD' + \frac{1}{2}EE')$. [ECɪ 35]

En definitiva, l'àrea del sòlid inscrit val $\pi\, A'B \times AA'$ o $\pi\, A'B \times AK$, respectivament.

I, aleshores, les àrees són més petites que $\pi\, AA'^2$ o $\pi\, AA' \times AM$, és a dir, $\pi\, AE^2$. [ECɪ 25 i ECɪ 37] ♠

Un cop fet tot això, Arquimedes analitza el que passa amb els polígons regulars de $2\,n$ costats circumscrits. I obté que les àrees són més grans que $\pi\, AA'^2$ o que $\pi\, AE^2$, respectivament. [ECɪ 30 i ECɪ 40][254]

I, usant les proposicions ECɪ 32 i ECɪ 41, estableix que les àrees respectives són $\pi\, AA'^2$ i $\pi\, AE^2$ perquè «les àrees de les figures inscrites i circumscrites són com la raó doble dels costats corresponents».

▶ **Exercici 36**. Proveu que:

a) $\sin\frac{\pi}{2\,n} + \sin\frac{2\,\pi}{2\,n} + \cdots + \sin\frac{(2\,n-1)\pi}{2\,n} = \cot\frac{\pi}{4\,n}$.

b) $2\left(\sin\frac{\alpha}{n} + \sin\frac{2\,\alpha}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\,\alpha}{n}\right) + \sin\alpha = (1 - \cos\alpha)\cot\frac{\alpha}{2\,n}$,
en què α és l'angle $\widehat{AIC}$.

253. Són les proposicions ECɪ 14 i ECɪ 16.

254. El cas del segment esfèric és complex.

Deduïu-ne que, de fet, heu calculat la suma trigonomètrica: $\sin\theta + \sin 2\,\theta + \cdots + \sin(n-1)\,\theta$.

Quin és el valor d'aquesta suma?

c) L'expressió $\int_0^\theta \sin x\,dx = 1 - \cos\theta$. [*Indicació.* Multipliqueu els dos membres per $\frac{\alpha}{n}$ i preneu límits quan $n \to \infty$. El membre de l'esquerra s'assimila a $\text{lím}_{n\to\infty} \sum_1^n \sin x_i\, \Delta x_i$, en què $x_i = \frac{i\,\alpha}{n}$ i $\Delta x_i = \frac{\alpha}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ i $\Delta x_n = \frac{\alpha}{2\,n}$. I el de la dreta val $1 - \cos\alpha = (1-\cos\alpha)\,\text{lím}_{n\to\infty} \frac{\alpha}{2\,n} \cot \frac{\alpha}{2\,n}$.]

Exercici 37. Useu les fórmules trigonomètriques de l'exercici 36 per a deduir les àrees i els volums de l'esfera i del segment esfèric. [*Indicació.* Vegeu Heath (1921), p. 41-42.] ◀

En la proposició EI 33 afirma que l'àrea d'una esfera equival a quatre vegades la del seu cercle màxim. I en la EI 34 dona l'equivalència entre el volum de l'esfera i el d'un con.

I, com a porisma d'EI 34, expressa el resultat que, segons Ciceró, estava gravat a la tomba del siracusà. En concret:

> EI 34. [El volum d']una esfera equival a quatre vegades [el d]el con de base igual al cercle màxim de l'esfera i altura el diàmetre de l'esfera.
>
> EI 34, porisma. El volum i l'àrea d'una esfera equivalen a $\frac{2}{3}$ del volum i de l'àrea [lateral] del cilindre de base el cercle màxim de l'esfera i altura el seu diàmetre.[255]

Oferim, ara, els textos que corresponen a les proposicions EI 33 i EI 34 per l'interès indiscutible que tenen, tot i ser incomplets. La raó és que, per fer-ho amb tota correcció —és a dir, sense ometre cap «element»—, hauríem de transcriure els que van d'ECI 17 a ECI 21 i els que van d'ECI 23 a ECI 33, i això excediria els nostres propòsits.[256] Tanmateix, per tal de posar de

255. Analitzarem aquest resultat en l'ítem c_2 del paràgraf 2.2.10 (pàgines 135-136) quan fem l'anàlisi de la monografia Me. Vegeu també el paràgraf B.10c_2 (pàgines 521-526).

256. El lector interessat pot consultar aquests textos en català a MASIÀ (2010), p. 108-141.

manifest, una vegada més, la manera de fer d'Arquimedes, n'oferim la síntesi següent:[257]

> ECɪ 33. Sigui $\mathfrak{S}$ l'àrea de l'esfera i $\mathfrak{A}$ una superfície equivalent a quatre vegades el cercle màxim.
>
> Volem veure que $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}$.
>
> *a*) Per fer-ho, podem establir que $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}} = 1$ per doble reducció a l'absurd.
>
> a_1) Si $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}} > 1$ [hipòtesi de l'absurd],
> inscrivim i circumscrivim polígons regulars amb el mateix nombre de costats.[258]
>
> La superfície $\mathfrak{P}$ del polígon circumscrit és més gran que la de l'inscrit $\mathfrak{p}$, i aleshores $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}} > 1$ per molt que creixi el nombre de costats [ECɪ 25 i ECɪ 30].
>
> D'altra banda, aplicant Dv 7, $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}} > \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}$[, ja que $\mathfrak{P} > \mathfrak{S}$ [ECɪ 28] i $\mathfrak{p} < \mathfrak{A}$ [ECɪ 25].
>
> La situació és la que mostra la figura 2.9. La raó $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}$ s'ha de trobar a la dreta de la raó $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}$, amb independència del nombre de costats. I, per tant, també a la dreta de l'1.
>
> Ara bé, Arquimedes aconsegueix establir que n'hi ha una que «s'infiltra» entre 1 i $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}$. És a dir, n'hi ha una per a la qual $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}} < \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}$.
>
> Però això és absurd.
>
> Per tant, no és possible que $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}} > 1$ i, de retruc, tampoc no ho és que $\mathfrak{S} > \mathfrak{A}$. ♠
>
> a_2) Anàlogament, estableix la impossibilitat que $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}} < 1$, és a dir, que $\mathfrak{S} < \mathfrak{A}$. ♠
>
> En definitiva, $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}} = 1$. ♠
>
> *b*) La part delicada de la demostració és la que munta Arquimedes a l'hora de trobar els dos polígons $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{p}$, la raó $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}$ dels quals s'infiltra.

257. Frajese (1974), p. 15-19 i 152-153.
258. Seguint les petjades d'ECɪ 23 a ECɪ 28.

b_1) Comença agafant dos segments B i C diferents de manera que $\frac{B}{C} < \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}$ [ECI 2].

Fa giravoltar les figures poligonals i obté uns sòlids $\mathfrak{S}$ i $\mathfrak{s}$. I estableix que $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{s}} < \frac{B}{C}$.

b_2) Però sabem que $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{s}} = \frac{L^2}{l^2}$, en què L i l són els costat de $\mathfrak{P}$ i $\mathfrak{p}$, respectivament [ECI 3].

Necessita, doncs, establir que $\frac{L^2}{l^2} < \frac{B}{C}$ [EV 13].

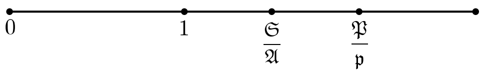


FIGURA 2.9. ECI 33. Explicació heurística

b_3) Si vol que $\frac{B}{C}$ sigui equivalent a la raó de dos quadrats, ha de determinar el segment D, mitjana proporcional de B i C [EVI 13].

Obté que $\frac{B}{D} = \frac{D}{C}$ i, de retruc, $\frac{B}{C} = \frac{B^2}{D^2}$ [EV 11].

b_4) Ha d'establir que $\frac{L^2}{l^2} < \frac{B^2}{D^2}$, ja que, conseqüentment, té que $\frac{L}{l} < \frac{B}{D}$.[259]

I, en conseqüència, $B > D$, atès que $B > C$,
cosa que és un porisma d'ECI 3 que, al seu torn, ho és d'ECI 2.

b_5) I de tot això en resulta que $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}} = \frac{L^2}{l^2} < \frac{B^2}{D^2} = \frac{B}{C} < \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}$. Absurd! ♠

c) Procedirem anàlogament en el cas $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}} < 1$. ♠

▶ **Exercici 38**. Vegem que:

a) La mitjana proporcional de segments és única.

b) Si $\frac{B}{D} = \frac{D}{C}$, aleshores $\frac{B}{C} = \frac{B^2}{D^2}$. [*Indicació.* D'una banda, tenim que $\frac{B}{D} = \frac{D}{C}$ implica $\frac{B^2}{D^2} = \frac{D^2}{C^2}$ [per EVI 16a i EVI 1].]

D'una altra, tenim que $\frac{B^2}{\square(B,C)} = \frac{\square(B,C)}{C^2} = \frac{B}{C}$ [EVI 1 i EV 11].

Ara usem el fet que la mitjana proporcional de dues àrees és única, cosa que acceptem de manera natural com a extensió de l'ítem a.

O sigui que $D^2 = \square(B,C)$.

I, de retruc, $\frac{B^2}{D^2} = \frac{B^2}{\square(B,C)} = \frac{B}{C}$.]

c) $\frac{L^2}{l^2} < \frac{B^2}{D^2}$, ja que, en conseqüència, té que $\frac{L}{l} < \frac{B}{D}$. ◀

259. Vegeu l'exercici 38 (pàgina 86).

La demostració d'ECI 34 és absolutament anàloga a la d'ECI 33 i n'ometem els detalls.[260]

A ECI 36 estableix el volum de l'esfera independentment de l'àrea.[261]

En les proposicions ECI 42 i ECI 43, Arquimedes estableix que l'àrea del segment esfèric equival a la d'un cercle el radi del qual és igual al segment que va del vèrtex del segment a un punt de la circumferència de la base [del sector]. Fa la demostració en el cas del sector esfèric més petit que mitja esfera [ECI 42] i en dedueix l'altre cas [ECI 43] com a porisma.

És a dir, en la figura ECI 21 (pàgina 312) les àrees dels sectors esfèrics $A'EKE'$ i $AEKE'$ són iguals a les dels cercles de radis $A'E$ (que no ha dibuixat) i AE, respectivament.

En definitiva, la demostració d'Arquimedes no depèn, doncs, del fet que el segment esfèric sigui més petit o més gran que mitja esfera [ECI 43].

► **Exercici 39**. *a*) Proveu ECI 42.
b) Deduïu-ne ECI 43 com a simple porisma. ◄

El llibre ECI el tanca la proposició ECI 44, que ofereix el volum d'un sector esfèric. Aquest volum equival al d'un con que té una base equivalent a l'àrea del segment esfèric corresponent i una altura igual al radi de l'esfera.

► **Exercici 40**. Demostreu ECI 44. ◄

Aquesta exposició posa de manifest la complexitat d'aquest llibre i, alhora, l'avenç que comporta respecte del XII dels *Elements* d'Euclides.

2.2.4*b* El llibre ECII és molt més curt, té només sis problemes i tres teoremes.

La seva estructura demostrativa és molt diferent de la del primer llibre, en el qual la part intuïtiva dels resultats plantejats

260. Frajese (1974), p. 155-157.
261. Masià (2010), p. 142-143.

es troba en el *Mètode*. Ara, en canvi, en alguns casos, comença fent l'«anàlisi» del problema —és a dir, el suposa resolt— i observa a on el porta aquesta pressuposició. I, tot seguit, n'estableix la «síntesi».[262]

ECII 2 completa la recerca del llibre anterior, en establir el volum d'un segment esfèric com ara EAE'.

És un simple porisma d'ECI 44 que, com hem dit, proporciona el volum del sector esfèric $OEAE'$. Per tant, només cal sostreure'n el volum del con EAE', ja que, òbviament, EAE' és exactament el resultat d'aquesta sostracció.[263]

Ara bé, Arquimedes va més lluny. Vol que aquest volum sigui equivalent al d'un con que tingui la mateixa base que el segment. Per tant, només n'ha de precisar l'altura.[264]

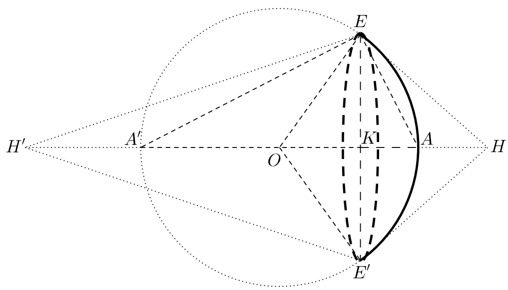


FIGURA 2.10. ECII 2

I afirma que, «si HK és l'altura del con EAE' equivalent al segment esfèric EAE', la raó entre aquesta altura i la del segment és la que hi ha entre el radi de l'esfera i l'altura del segment esfèric complementari junts i aquesta darrera altura». És a dir, $\frac{OA'+A'K}{A'K} = \frac{HK}{AK}$ (figura ECII 2).[265]

► **Exercici 41**. Considerem que el volum del sector esfèric $OEAE'$ val $\frac{1}{3}\pi\, AE^2 \times r$, on $r = OA$. Deduïu-ne el volum del segment AEE. [*Indicació*. Val $\frac{\pi}{3}(AE^2 \times r - EK^2 \times OK)$.]

Determineu l'altura d'un con de base un cercle equivalent a l'àrea del segment esfèric [sense la base] i volum equivalent al del segment es-

262. ECII 1 (pàgines 327-330).

263. En efecte, $EAE' = OEAE' - EAE'$.

264. Hem representat que és un sòlid, cosa que no fa pas la figura original (pàgina 331).

265. I, anàlogament, per al con $EH'E$ equivalent al segment esfèric $EA'E'$, $\frac{H'K}{A'K} = \frac{OA+AK}{AK}$.

fèric. [*Indicació.* Feu $AK = h$. Usant la relació $\frac{AB^2}{BK^2} = \frac{AA'}{A'K}[= \frac{2\,r}{2\,r-h}]$, aconseguiu una altura igual a $h\,\frac{3r-h}{2r-h}$. Per què? Quin resultat dels *Elements* necessiteu? La resta és un simple exercici de càlcul.] ◀

Assolit aquest punt —és a dir, el coneixement de l'àrea i el volum d'un segment esfèric—, Arquimedes planteja dos problemes d'enunciat anàleg però que menen a dos resultats ben diferents. L'un és resoluble amb regle i compàs, ja que algebraicament porta a una equació de segon grau. L'altre, en canvi, no ho és perquè condueix a una cúbica. Aquests problemes constitueixen el contingut d'ECII 3 i ECII 4.

El primer problema demana que tallem una esfera amb un pla a fi i efecte que la raó entre les àrees dels segments esfèrics sigui una raó donada. El segon ho fa en el cas dels volums.[266]

▶ **Exercici 42**. *a*) Resoleu els dos problemes anteriors i observeu que, en el primer, obteniu una equació quadràtica, mentre que en el segon n'obteniu una de cúbica. [*Indicació.* Heu de comparar els radis $A'E$ i AE (figura ECI 21, pàgina 312)) i les altures HK i $H'K$ (figura ECII 2, pàgina 88).]

b) En el primer cas, què heu de fer per a determinar el punt pel qual el pla talla el diàmetre AA'?

c) En el segon cas, trobeu una cúbica de la forma $x^2\,(a-x) = b^2\,c$. Sabríeu fer-ho tallant una paràbola i una hipèrbola equilàtera?

d) Creieu que importa el valor atribuït a la raó $\rho = \frac{m}{n}$, amb $m, n \in \mathbb{N}$? És a dir, penseu que heu d'establir algun diorisma sobre ρ per tal que el problema tingui solució? ◀

El llibre ECII es tanca amb el problema novè, que és de «maximització»:[267]

ECII 9. D'entre tots els segments esfèrics d'una mateixa àrea el més gran és la semiesfera.

266. És natural esperar que el primer sigui quadràtic i el segon cúbic.

267. Fixada una àrea, trobareu el sòlid —en aquest cas, entre els segments esfèrics— de volum màxim. Que lluny que som, però, dels màxims sotmesos a condicions, dels multiplicadors de Lagrange i del càlcul de variacions.

▶ **Exercici 43**. Demostreu-ho. ◀

Amb els dos problemes suara esmentats, aparentment anàlegs i alhora tan diferents, i amb aquest problema de màxims donem per acabada la presentació del llibre segon d'EC.

2.2.5 LE: *Sobre les línies espirals*

2.2.5*a* Comentari

La necessitat de resoldre els tres problemes clàssics no resolubles amb regle i compàs —és a dir, la duplicació del cub, la trisecció de l'angle i la quadratura del cercle— havia portat els matemàtics anteriors a Arquimedes a crear corbes que ho permetessin.[268] Però, per als grecs, la geometria no accepta el moviment, és estàtica.[269] I, tanmateix, com ja hem vist, no sempre el podien evitar perquè no sempre aconseguien donar la descripció d'una corba com a lloc geomètric de punts del pla determinats per una propietat geomètrica. De vegades, els calia recórrer a l'espai i jugar amb interseccions de figures sòlides. Per exemple, obtenien les còniques tallant un con amb un pla,[270] i la corba d'Arquites, que determina dues mitjanes proporcionals, tallant un cilindre, una esfera i un tor.[271]

2.2.5a_1 Les definicions de *Sobre les línies espirals*

En el pensament grec i, en particular, en el postaristotèlic, els únics moviments permesos eren el rectilini i el circular uniformes.[272] Són aquests moviments els que van fer servir per a des-

268. Pla (2016*b*), § 3.4.9, p. 253-261.

269. Recordem la divisió pitagòrica de les ciències: estàtica/dinàmica i discreta/contínua. Pla (2016*b*), p. 108.

270. Pla (2016*b*), § 4.2.5, p. 323-328. També les observacions fetes a § 2.1.2a_3 (pàgina 36), i Pla (en premsa *b*).

271. Pla (2016*b*), p. 256-259.

272. La descripció aristotèlica de l'Univers separa el comportament dels cossos en moviments de dues menes: el comportament sublunar i el superlunar. En el primer solament és possible el moviment rectilini uniforme; en

criure la quadratriu,[273] i els usa Arquimedes en la descripció de l'espiral [d'Arquimedes] en la monografia *Sobre les línies espirals* (*Περὶ ἑλίκων*) —«la meravellosa obra *Les espirals d'Arquimedes*»,[274] en paraules de Galileu.[275]

> [LE, definició 1] Si un segment rectilini gira en un pla amb moviment circular uniforme al voltant d'un dels extrems, que es manté fix, fins a retornar a la situació inicial,[276] i alhora un punt d'aquest segment s'hi mou amb moviment rectilini uniforme, començant el moviment per l'extrem fix, el punt descriu una espiral en el pla.

Aquesta primera definició de LE, Arquimedes l'enuncia després d'haver establert onze proposicions relatives al cercle i a les tangents a la seva circumferència.

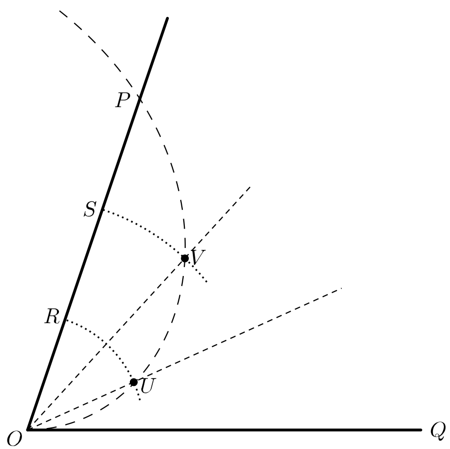


FIGURA 2.11. LE 1. L'espiral d'Arquimedes

Considerem el segment rectilini OQ i, quan faci falta, una prolongació. Imaginem que aquest segment gira al voltant de l'extrem O, que es manté fix. Mentre el segment gira, del lloc O surt un punt que llisca sobre el segment. Ambdós moviments es fan amb una velocitat constant. Suposem que, quan el segment es troba en la posició OU, el punt es troba en el lloc U del segment i, quan el

el segon, el circular uniforme. Vegeu, molt senzill però molt clar, el capítol primer de BUTTERFIELD (1958).

273. PLA (2016*b*), § 3.4.9, p. 253-261.

274. Citat per FRAJESE (1974), p. 313.

275. ARQUIMEDES (2009*b*). En l'obra EDWARDS (1979), p. 54-62, es troba una exposició molt acurada i elegant de les aportacions més notables sobre les espirals d'aquesta monografia.

276. Després d'haver donat una volta, o dues, o més.

segment es troba en OP, el punt ho fa en P. I això en cada instant t. Aleshores, és evident que el punt descriu la corba $\smile OUVP\ldots$

Si l'analitzem amb nomenclatura actual, ens trobem que la descripció d'Arquimedes porta de manera natural a les coordenades polars. En efecte, en un temps t, el punt haurà recorregut un radi vector ρ i el segment haurà girat un angle $\hat{\theta}$. Suposem que v i w designen les velocitats rectilínia i angular, respectivament. Aleshores, tenim que:

$$\rho = v\,t, \hat{\theta} = w\,t.$$

I, de retruc,

$$\rho = a\,\hat{\theta}, \text{ en què } a = \frac{v}{w},$$

cosa que és l'expressió de l'espiral en coordenades polars.

Arquimedes atribueix la corba a Conó, que l'hauria creat per a dividir un angle en tres parts iguals.

▶ **Exercici 44**. *a*) Doneu l'equació de l'espiral d'Arquimedes en coordenades a_1) polars, a_2) paramètriques i a_3) cartesianes.
b) Proveu que l'espiral serveix per a trisecar l'angle. [*Indicació.* Useu: b_1) la descripció d'Arquimedes i b_2) les coordenades polars.] ◀

Veiem que l'espiral és útil per a trisecar l'angle.

[*Demostració.*] Suposem que tenim un angle $\widehat{QOP}$. Col·loquem el segment que genera l'espiral damunt de OQ fent que l'extrem fix coincideixi amb el punt O (figura LE 1). Ara generem l'espiral fins que talla el costat OP de l'angle donat. Unim OP. El dividim en tres parts iguals pels punts R i S, pels quals tirem arcs de circumferència de radis OR i OS, respectivament. Aquests arcs tallen l'espiral pels punts U i V. Unim OU i OV. L'angle $\widehat{QOU}$ és una tercera part de l'angle donat i el $\widehat{QOV}$ dues terceres parts. Per tant, l'angle $\widehat{POV}$ també val una tercera part de l'angle donat. ♠

Analitzem l'estructura de la monografia. Consta de dues parts, la primera de les quals precedeix la introducció de l'espiral, que és l'objectiu del treball. Conté «elements» geomètrics i aritmètics en la segona part, en la qual Arquimedes estudia les propietats de la corba. I tot plegat, com és habitual en ell, va precedit d'una introducció, en aquest cas adreçada a Dositeu.

S'hi plany per la mort del seu amic Conó, que considera una gran pèrdua personal i un greuge notable per a la matemàtica. Repassa els resultats més rellevants de les monografies EC i CE i recorda que les dues darreres proposicions d'ECII en substitueixen dues que, com ja havia fet notar a Dositeu, eren errònies. També ens fa saber que la corba protagonista de la monografia l'havia creat Conó, fet que recorda Pappos en l'inici de la proposició 21 del llibre IV de *La col·lecció matemàtica*. I tanca la monografia amb el que avui anomenem el *postulat d'Arquimedes*, que ja havia esmentat, però, a QP i que havia establert, com a cinquè postulat, a EC.[277] Esdevé un «element» indispensable de la proposició LE 4, de màxima importància en el treball.

2.2.5a_2 Les proposicions de *Sobre les línies espirals*

Les dues primeres proposicions analitzen el comportament d'un punt que es mou amb velocitat uniforme en un segment rectilini. En concret, diuen:

LE 1. Si P es mou amb moviment rectilini uniforme, els espais recorreguts són proporcionals als temps emprats, és a dir, $\frac{e_1}{e_2} = \frac{t_1}{t_2}$.

LE 2. Si P_1 i P_2 es mouen amb moviment rectilini uniforme de velocitats v_1 i v_2, en un temps determinat recorren espais e_1 i e_2 que satisfan $\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2}$.[278]

La proposició quarta, com ja hem dit, és nuclear. Afirma que és possible intercalar un segment entre un altre i un arc de circumferència arbitraris. És un teorema d'apropament indefinit.

277. Textos B.5a, B.2a_1 i B.4.1c_5 (pàgines 349, 226 i 276).

278. És la primera vegada que trobem enunciada la llei de comportament del moviment rectilini uniforme en termes matemàtics.

Les proposicions LE 5, 6, 7, 8 i 9 són problemes geomètrics que es resolen per *neusi*, és a dir, per inserció o per inclinació. Determinen algunes relacions que s'han de satisfer entre dos segments de línies, un dels quals és un segment rectilini que es manté constantment entre dos objectes geomètrics donats, és a dir, amb un en un extrem i l'altre en l'altre.[279]

Per exemple, a LE 5, necessita col·locar un segment donat E entre la circumferència i la prolongació del diàmetre AC, a fi i efecte d'aconseguir que el segment que queda situat entre la circumferència i la tangent paral·lela a l'esmentada prolongació tingui amb el radi una raó més petita que la que hi ha entre l'arc de circumferència determinat pel seu extrem i el punt de tangència, i la circumferència sencera (figura LE 5, pàgina 358).

Les dues proposicions LE 10 i LE 11 són aritmètiques, fan referència a progressions aritmètiques i clouen la primera part de la monografia.

Abans de la proposició LE 12 trobem les definicions relatives a l'espiral i als seus elements geomètrics.

LE 13 necessita el concepte intuïtiu de segment tangent a l'espiral.

I LE 14 estableix que els radis vectors de l'espiral —els segments que uneixen el punt d'inici amb el punt de l'espiral—[280] són entre si com els arcs de circumferència descrits. Aquesta proposició és l'«element» necessari per a fonamentar LE 18, que proporciona la manera com l'espiral rectifica una circumferència. I, de retruc, gràcies a la proposició MC 1,[281] quadra el cercle.[282]

---

279. Per a una descripció més acurada, vegeu la que fem en el paràgraf 2.3.2 de Pla (en premsa *c*), dedicat a la concoide de Nicomedes.

280. Emprem el terme *radi vector* perquè simplifica el text i la seva comprensió.

281. B.7.1 (pàgina 456).

282. Aquest fet fa pensar que Eutoci no coneixia aquesta monografia perquè quan afirma que Arquimedes havia trobat «un segment rectilini equivalent a la circumferència d'un cercle donat» recorre a la *Vida d'Ar-*

En concret, estableix que: per un punt P de l'espiral $\circlearrowleft OPS$, tirem un segment tangent i un altre, OQ, perpendicular al radi vector OP. Considerem el punt T que talla el segment tangent. Aleshores, el PT té la mateixa longitud que l'arc $\widehat{PR}$ de la circumferència de centre O i radi OP, interceptat pel radi vector i l'eix polar.

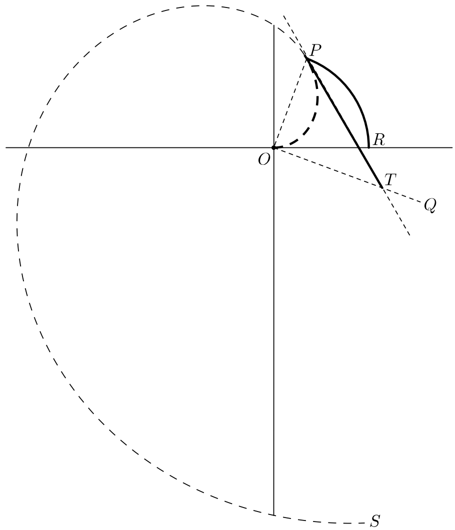


FIGURA 2.12. LE 18. Rectificació d'un arc de circumferència

► **Exercici 45**. Useu:
a) El paral·lelogram de velocitats, per a justificar l'argument d'Arquimedes en el punt P de coordenades cartesianes $(0, a\,\frac{\pi}{2})$.
b) El resultat anterior —de la longitud de la subtangent polar OT— i MC 1 per a quadrar el cercle.

Exercici 46. Determineu la tangent a l'espiral d'Arquimedes en un punt, usant: *a*) el paral·lelogram de velocitats, *b*) les coordenades polars i *c*) les coordenades cartesianes. [*Indicació.* Vegeu el paràgraf que conté la nota 288 (pàgina 98).]

Doneu-ne l'equació de la recta tangent en coordenades polars i cartesianes. ◄

De tot això en resulta que l'espiral, com la quadratriu, permet resoldre els dos problemes clàssics de la trisecció de l'angle i la quadratura del cercle.

Per aconseguir-ho, seguint el camí de la monografia MC, recorre al mètode d'exhaustió i a LE 4, és a dir, al postulat d'Arquimedes. Empra, doncs, una demostració potent que ens

quimedes d'Heràclides. HEIBERG (1880-1881), vol. III, p. 228.

planteja la pregunta següent: com va intuir aquest resultat? La resposta no la trobem pas a Me.[283]

Les properes proposicions rellevants són les que estableixen les àrees d'una volta de l'espiral [LE 24] i de dues [LE 27].

En concret, LE 24 afirma que l'àrea limitada per una volta $\circlearrowright OCDA$ de l'espiral i el radi vector OA és a la del cercle de radi OA com 1 a 3.[284] Val la pena indicar que és precisament la demostració d'aquesta proposició la que necessita la suma que s'ha establert a LE 10 i que té a veure amb la suma dels quadrats dels termes d'una progressió aritmètica.[285]

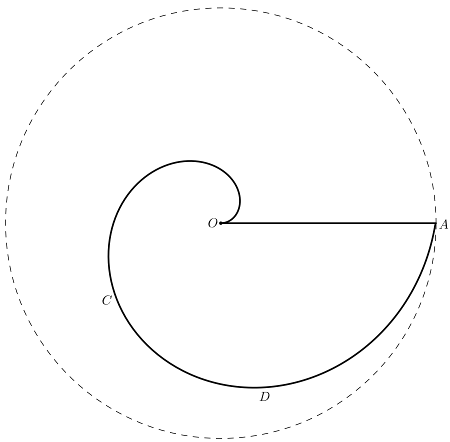


FIGURA 2.13. LE 24. Àrea d'una volta d'espiral

El mètode que segueix Arquimedes és el següent. Divideix el cercle en n parts iguals, considera els radis de cada secció i obté n sectors circulars limitats per radis de la circumferència. Cada un d'aquests radis talla l'espiral en un punt P i determina el corresponent radi vector de l'espiral OP. Tira arcs de circumferència $\widehat{P_2OP_1}$ de radi OP que tenen l'amplada de dos dels segments del cercle gran, un a l'esquerra, $\widehat{P_2O}$, i l'altre a la dreta, $\widehat{OP_1}$ (vegeu els arcs puntejats de traç gruixut de la figura LE 4). L'arc de l'esquerra està inscrit en el corresponent sector de l'espiral, mentre que el

283. Frajese parla d'«el convenciment de la simplicitat de les lleis de la geometria». Vegeu la introducció de FRAJESE (1974) i la p. 315.

284. Podríem tornar-nos a fer la pregunta que ens hem fet abans, però la resposta seria idèntica.

285. És la que enuncia, sense demostració, a CE, lema (B.6c_1, pàgina 426).

de la dreta el circumscriu. Aleshores, usant les fitacions de les sumes,

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \text{ i } 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2,$$

aconsegueix el resultat enunciat, per exhaustió i pel mètode de doble reducció a l'absurd.

Amb quina naturalitat i elegància arriba l'insigne geòmetra a traslladar, a l'univers de les coordenades polars, la tècnica de tancament eudoxià que havien usat els seus predecessors, com hem vist a bastament en altres indrets i, inicialment, en el llibre XII dels *Elements* d'Euclides.[286]

De la mateixa manera que ho hem fet en el recull de textos d'altres monografies, segmentarem la presentació en ítems. El primer conté les proposicions LE 1, 2, 3 i 4; el segon, LE 5; el tercer, les definicions, i el quart, LE 13, 18 i 24. A continuació, els «elements» necessaris per a establir les seves demostracions sense llacunes. I després, la resta, atesa l'originalitat de la monografia (B.5*j*, pàgines 383-413).

No voldríem acabar aquest apartat sense fer esment al fet que, en la monografia, hi trobem resolts, amb els mètodes arquimedians, dos dels problemes característics de l'anàlisi matemàtica: la determinació de la tangent i la quadratura de l'espiral. Aquest és, doncs, d'alguna manera, un manuscrit molt potent.[287]

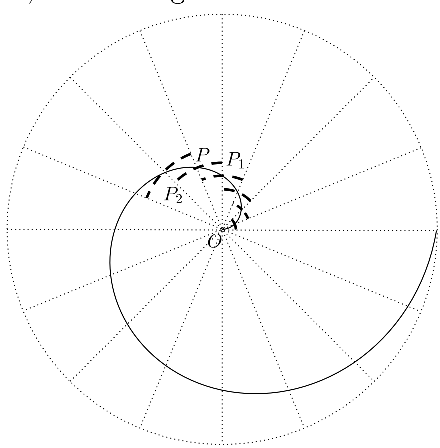


FIGURA 2.14. LE 21, 22 i 23. Mètode d'exhaustió aplicat a l'espiral

286. PLA (2016*b*), § 1.4 i § A.4, p. 55-63 i 486-540.
287. Omet la determinació de la longitud d'un arc d'espiral, és a dir, la

També val la pena esmentar que Arquimedes no usa el paral·lelogram determinat per les direccions de les velocitats en la formulació cinemàtica de l'espiral.[288] Recordem, encara que només sigui de passada, que Grégoire de Saint-Vincent usarà, al segle XVI, el mètode cinemàtic per a determinar les tangents de les corbes conegudes llavors.

2.2.5a_3 Les hèlixs cònica i cilíndrica

Imaginem un arc d'espiral d'Arquimedes en el pla amb l'origen en el punt B i base el segment BA.

Sigui BH un radi vector arbitrari de la primera volta de l'espiral arquimediana o de les següents.

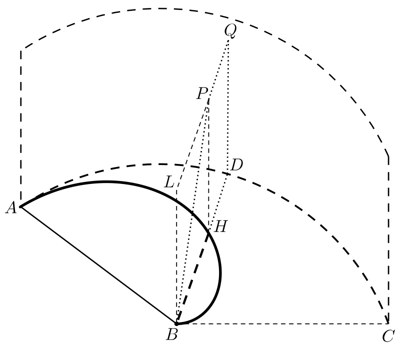


FIGURA 2.15. L'espiral d'Arquimedes i les hèlixs cònica i cilíndrica

Fem, ara, la construcció següent en l'espai (figura 2.15). Pel punt B, aixequem la perpendicular al pla $\triangle ABC$ de l'espiral i considerem el con següent. Té el vèrtex en el punt B. En cada nivell de la perpendicular determinat pel punt L de manera que BL és igual al radi vector BH, considerem el cercle de centre L i radi LP, que és igual al radi vector de l'espiral BH i, de retruc, a BL. Per cada punt H de l'espiral aixequem un segment perpendicular al pla $\triangle ABC$ de l'espiral i igual a BH. Aquest segment perpendicular determina un punt P en la circumferència de centre L i radi LP, és a dir, en la superfície del con. El «lloc geomètric» dels punts P del con que s'obtenen amb aquesta construcció és un segment d'hèlix cònica.[289]

«rectificació». Però això no ens ha de sorprendre perquè és un problema més complex que els altres dos. Tanmateix, Arquimedes proporciona la «rectificació» de la circumferència a MC 1.

288. HEATH (1921), vol. II, apèndix, p. 556-561.

289. Les espirals són planes. En canvi, les hèlixs són corbes guerxes que

Imaginem ara un cilindre de base circular amb el centre en el punt B i radi igual a la corda BA de l'espiral. Perllonguem el segment LP, descrit abans, fins que talla la superfície del cilindre per un punt Q. El lloc geomètric dels punts Q és un arc de l'hèlix cilíndrica.

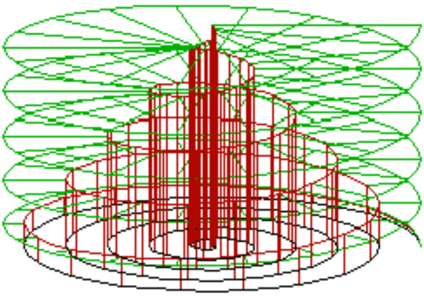


FIGURA 2.16. Les hèlixs cònica i cilíndrica

D'aquestes dues corbes guerxes, la cilíndrica es coneix amb el nom de *còclea*[290] o *cocleoide*. Com veurem a *Grècia IIIc*, Apol·loni hi va dedicar un llibre. En farem una petita ressenya basant-nos en els textos de Pappos.[291] Tanmateix, no hi ha acord sobre si aquestes dues corbes guerxes de l'espai són originals d'Arquimedes o posteriors.[292] Però la cilíndrica és la que, com hem explicat en la pàgina 17, servia per a pouar aigua, un fenomen del qual, no sense raó, Galileu va dir que «no era només meravellós, sinó miraculós».[293]

Però, segons dos textos de Pappos (B.5h_1 i B.5h_2, pàgines 414-417), hi ha un cert lligam entre aquestes corbes i la quadratriu. I això provoca una certa confusió sobre la germana de la cocleoide,[294] ja que és un lligam força fosc:

es troben en l'espai tridimensional.

290. A DIEC (1995), llegim: «Estructura de l'orella interna enrotllada en forma d'espiral i situada en l'os temporal, que conté els òrgans essencials de l'oïda.»

291. PLA (en premsa *b*), § 1.3.5a_3, p. 23-24.

292. Per exemple, DIJKSTERHUIS (1987), p. 21-23, creu que no, mentre que DRACHMANN (1963), p. 150-154, afirma que sí.

293. GALILEU (1655), p. 31: «Non solo maravigliosa, ma miracolosa.» DIJKSTERHUIS (1987), edició anglesa, 1987, p. 23.

294. Vegeu l'entrada «Dinostrat» a GILLISPIE (1970), vol. I.

> Segon Iàmblic, Apol·loni va designar la corba que serveix per a quadrar el cercle[, la quadratriu,] amb el nom de *germana de la cocleoide*. A quina corba es refereix és incert. El text diu que realment «és la mateixa corba que la de Nicomedes», i la quadratriu és precisament la corba que va utilitzar aquest geòmetra per a quadrar el cercle. I això és el que ha fet que s'hagi suposat que la germana de la cocleoide (o concoide)[295] és la quadratriu, però no és gaire probable que sigui així.
>
> Hi ha, però, una altra possibilitat. Sabem que Apol·loni va escriure un tractat sobre la *còclea*, que, de fet, és una espiral cilíndrica. Sembla raonable que la còclea sigui la germana de la cocleoide per la semblança dels noms, encara que no n'hi hagi entre les corbes.[296]

Tot això suggereix la necessitat i la conveniència de formular els problemes 58, 59 i 60 (pàgina 177).

2.2.6 CE: *Sobre els conoides i els esferoides*

Aquesta monografia, adreçada a Dositeu, tracta dels sòlids de revolució generats per les còniques.[297] Per fer-ho, usa les propietats de les còniques que suposa que són conegudes perquè ja es troben en l'obra d'Aristeu el Vell o d'Euclides.[298] El contingut d'aquesta monografia constitueix, com moltes altres del siracusà, un autèntic avenç respecte de la matemàtica grega euclidiana.

295. De la concoide i la cissoide en parlarem a *Grècia IIIc*.

296. Heath (1921), vol. I, p. 231-232; Knorr (1978*b*), en especial, p. 66 i 74.

297. El nom és un derivat de les paraules *κῶνος* i *σφαῖρα* —'con' i 'esfera'— segons que la seva forma —*εἶδος*— s'apropi més a la de l'un o a la de l'altra.

298. § 2.1.2$a_{3.2}$ (pàgina 36). Recordem que, per a Arquimedes, les còniques s'obtenen tallant un con circular recte —l'angle que formen dues generatrius coplanàries pot ser agut, recte o obtús— per un pla perpendicular a la seva aresta. Així s'obtenen l'el·lipse, la paràbola i la hipèrbola, respectivament, que s'anomenen *ὀξυγωίου κώνου τομή*, *ὀρθογωνίου κώνου τομή* i *ἀμβλυγωνίου κώνου τομή*.

2.2.6*a* Una observació prèvia

Una observació més abans de continuar. El moviment segons l'entenia Arquimedes, el coneixement profund que tenia de les còniques i les seves aportacions sobre la seva naturalesa geomètrica són fonamentals en aquesta obra. De fet, hi analitza els el·lipsoides i els hiperboloides de dues fulles,[299] i els esferoides allargats i aplanats.[300]

El text comença amb una introducció que recull les aportacions més notables, en concret, CE 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 i 32.[301] Tot seguit, Arquimedes ofereix dues definicions referents a les seccions d'un con i d'un cilindre per un pla, seccions que poden determinar un cercle o una el·lipse. En el primer cas de la primera definició, la secció és un con i, en el segon, un segment de con de base l'el·lipse i eix el segment que uneix el seu vèrtex i el centre.[302] La segona definició és la rèplica de l'anterior aplicada als cilindres tallats per dos plans paral·lels. Els segments són cilindres quan la secció és circular i troncs de cilindre quan és el·líptica. També aclareix què entén per *base* i per *eix*.[303]

A continuació, i abans de les proposicions, esmenta un lema del qual afirma que «la demostració és evident».[304]

Concretament, hi estableix les desigualtats següents:

$$2\,(a+2\,a+\cdots+n\,a) > n\cdot n\,a > 2\,(a+2\,a+\cdots+(n-1)\,a).$$

---

299. El siracusà classifica els conoides —*κωνοειδών*— en rectangles i obtusangles —*ὀρ- θογωνίον* i *ἀμβλυγωνίον*.

300. I els esferoides —*σφαιροειδέων*— allargats i aplanats —*ταραμάκεα* i *ἐπιπλατέα*. De fet, es tracta dels *conoides parabòlic* i *hiperbòlic*, i dels *esferoides allargats* i *aplanats*. Aquests noms respecten l'original grec i recorden la corba amb la qual s'ha generat cada sòlid. Nosaltres, però, farem servir també els noms actuals: *el·lipsoide*, *paraboloide* i *hiperboloide de dues fulles*, i ometrem el d'una perquè Arquimedes no tracta aquest sòlid.

301. B.6 (pàgines 418-423).

302. Apol·loni de Perge (1963), Ci 4 i 13, a Pla (en premsa *b*), p. 115-117 i 136-139, respectivament.

303. B.6*b* (pàgines 423-424).

304. B.6*c* (pàgines 424-425). La demostració, no tan evident, la trobem a LE 11 (pàgines 386-390). Vegeu l'ítem b_2 del problema 34 (pàgina 166).

▶ **Exercici 47**. [CE, lema] Demostreu les desigualtats anteriors. [*Indicació*. Useu el fet que $S_n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)\, a$.]

Aquesta expressió val també per a una progressió aritmètica arbitrària $a_1, a_1 + d, \ldots, a_1 + n\, d$? ◀

2.2.6*b* Les proposicions de CE

Les dues primeres proposicions de la monografia —CE 1 i CE 2— fan referència a sumatoris d'expressions, de magnituds, la primera, i de línies, la segona. Aquesta segona ofereix la suma dels quadrats dels termes d'una progressió aritmètica.[305]

▶ **Exercici 48**. [CE 1] Siguin $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n+1}$ i $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{n+1}$ dues successions de magnituds els termes de les quals tenen la mateixa raó, dos a dos, és a dir, $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}_{i+1}} = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{B}_{i+1}}$, amb $i = 1, 2, \ldots, n$. I siguin $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{n+1}$ i $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{n+1}$ unes altres dues successions de magnituds que estan lligades amb les primeres per les relacions $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{C}_i} = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{D}_i}$, amb $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Proveu que $\frac{\sum_1^{n+1} \mathfrak{A}_i}{\sum_1^{n+1} \mathfrak{C}_i} = \frac{\sum_1^{n+1} \mathfrak{B}_i}{\sum_1^{n+1} \mathfrak{D}_i}$. [*Indicació*. Useu Ev 12 i Ev 7, porisma.]

Exercici 49. [CE 2] Sigui $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una progressió aritmètica de segments rectilinis de diferència A_1, és a dir, $A_{i+1} - A_i = A_1$, amb $i = 1, \ldots, n-1$. Proveu que $(n+1)\, a_n^2 + A_1 \times \sum_1^n A_i = 3 \sum_1^n A_i^2$. ◀

Les proposicions que van de CE 4 a CE 20 ofereixen les propietats de les figures damunt les quals s'estableixen els teoremes més notables abans esmentats.

Les proposicions CE 3, 4, 5 i 6 tracten els segments de paràbola i les relacions de l'àrea d'una el·lipse amb l'àrea del cercle de diàmetre l'eix major, i també amb l'àrea d'un cercle arbitrari, i la relació entre totes dues.

305. Vegeu-ne els enunciats i les demostracions en els textos B.6d_1 i B.6d_2 (pàgines 426-431) o a Masià (2016), p. 39-43. També oferim una descripció en llenguatge actual en les notes 1195 i 1202 (pàgines 428 i 431).

En concret, CE 4 compara l'àrea d'una el·lipse amb l'àrea del cercle de diàmetre l'eix seu més gran.

CE 4. *L'àrea d'una el·lipse és a la del cercle de diàmetre l'eix seu més gran com l'eix petit al gran.*

D'acord amb la figura 2.17, $\frac{\mathfrak{a}\left(\bigcirc ACA'C'\right)}{\mathfrak{a}\left(\bigcirc ABA'B'\right)} = \frac{OC}{OB}$.

[*Demostració.*] De fet, tot es basa en la relació constant de les ordenades $\frac{PQ}{PR} = \frac{P'Q'}{P'R'}$ que, segons Arquimedes, és $= \frac{OC}{OB}$.[306]

Tot seguit, necessita recórrer a polígons inscrits en l'el·lipse que transforma en polígons inscrits en un cercle de radi la mitjana proporcional dels dos eixos.[307]

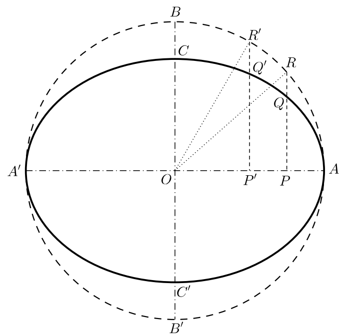


FIGURA 2.17. CE 4

♠

▶ **Exercici 50**. Proveu que:

a) [CE 4] La proposició anterior és vàlida, usant el càlcul integral.

b) [CE 5] L'àrea d'una el·lipse és a la d'un cercle com el rectangle format pels eixos de l'el·lipse al quadrat del diàmetre del cercle.

c) [CE 6] Les àrees de dues el·lipses són com les dels rectangles de costats els seus eixos.

d) [CE 6, porisma] Les àrees de dues el·lipses semblants són entre si com els quadrats dels seus eixos majors. ◀

Les proposicions CE 7, 8 i 9 resolen el problema de la construcció d'un con o d'un cilindre de vèrtex un punt i base una el·lipse donats i tenen un cert interès perquè Arquimedes no imposa, com a diorisma, que el con tingui un angle agut. S'apropa, doncs, a la definició de les còniques que planteja Apol·loni. El con obtingut és únic i la mena de cònica que dona, en tallar-lo,

306. Aquesta relació devia ser, doncs, coneguda pels geòmetres de l'època.

307. Text B.6d_3 (pàgines 434–436).

depèn de la posició relativa del pla que la determina respecte de la generatriu o de l'eix del con.

CE 7. *Donats una el·lipse i un segment perpendicular pel centre de l'el·lipse al pla que la conté, determineu un con de vèrtex l'extrem del segment que fa que l'el·lipse en sigui una secció.*

[*Construcció.*] Pel centre D i pel diàmetre petit AB de l'el·lipse, tirem un pla perpendicular al seu. [Exi 8 o Exi 18]

Sigui CD el segment perpendicular pel vèrtex C —extrem del segment donat— al pla de l'el·lipse. [Exi 11]

Volem determinar un con de vèrtex C que té, com a secció, l'el·lipse donada.

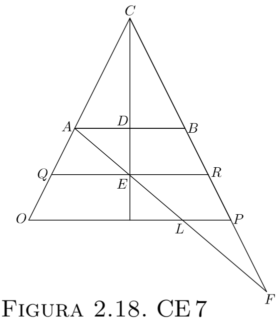


Figura 2.18. CE 7

Prolonguem els segments CA i CB. [P 2]

En aquest pla fem el cercle de diàmetre AF.

Pel punt A, tirem un segment AF de manera que el rectangle de costats AE i EF és al quadrat del costat EF com el quadrat del semidiàmetre gran al de costat DC.[308]

Pel segment AF, tirem un pla perpendicular [Exi 8 o Exi 18] al pla determinat pels segments AC i AF. [Exi 2]

Pel cercle, determinem el con de vèrtex el punt C.[309] ♣

I demostrem que aquest és el con que té com a secció l'el·lipse donada.[310] ♠

308. És plausible aquesta relació? Vegeu l'exercici 51. Arquimedes justifica que això és possible perquè $\frac{AE\times EF}{EC^2} > \frac{AD\times DB}{AC^2}$. Però no ho demostra. La primera demostració d'això la trobem a Zeuthen (1886), p. 411-412. Vegeu el problema 45 (pàgina 171).

309. Òbviament, aquest con no és recte en el sentit dels cons definits a Dxi 18. Aquí és determinat pel cercle i el vèrtex i l'unim amb tots els punts de la circumferència del cercle. El segment d'extrems el vèrtex C i el centre d'aquest cercle no és perpendicular al pla que el conté.

310. B.6d_4 (pàgines 436-439).

▶ **Exercici 51**. *a*) És acceptable la condició amb la qual s'inicia la construcció del con?
b) És possible determinar el punt E amb regle i compàs? Com?
c) Sabríeu demostrar que aquesta construcció resol el problema? [*Indicació*. Vegeu B.6d_4 (pàgines 436-439). ◀

La proposició CE 10 estableix la relació entre dues seccions de con, i entre un tronc de cilindre i una secció de con de la mateixa base i la mateixa altura.

Les proposicions CE 11, 12, 13 i 14 estudien les seccions dels paraboloides, els hiperboloides i els el·lipsoides.

I CE 15, 16 i 17, la tangència de les seves seccions amb plans.

La proposició CE 18 prova que un pla que passa pel centre d'un esferoide el dimidia en dues parts que tenen el mateix volum i la mateixa àrea.

Finalment, les proposicions CE 19 i CE 20 estableixen els fonaments necessaris per a poder avaluar-ne els volums adoptant el «mètode de compressió».

Un cop disposa de totes aquestes eines, Arquimedes pot establir les proposicions que havia enunciat en la introducció de la monografia (pàgina 101), aquelles que determinen els volums dels sòlids esmentats i d'algunes seccions seves.

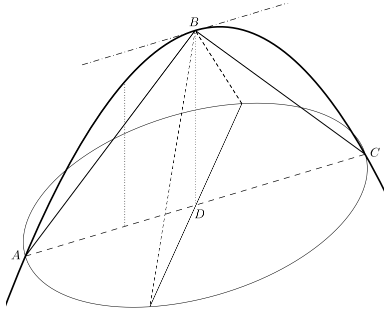


FIGURA 2.19. CE 21 i CE 22

Nosaltres, però, coherents amb la resta del que hem vist fins ara, centrat en la paràbola i en el paraboloide de revolució, fonamentalment, només reproduïm CE 21, que determina el volum del paraboloide de revolució que obtenim tallant-lo per un pla perpendicular a l'eix. El resultat, tanmateix, també val per al cas en el qual el pla no ho és, CE 22.

CE 21 i CE 22. *El volum d'un segment de paraboloide de revolució equival a la meitat del cilindre de bases iguals a la del segment de paraboloide i de la mateixa altura i, de retruc, també equival a tres meitats del con de la mateixa base i la mateixa altura.*

La tècnica que usa Arquimedes en aquesta demostració s'apropa a la que, molts segles més tard, Bernhard Riemann emprarà per a definir el que coneixem com a *integral de Riemann*, que és una ampliació de la de Cauchy i que s'estudia en un curs estàndard d'anàlisi de variable real. I això s'esdevé perquè Arquimedes redueix el mètode de compressió a un càlcul eminentment algebraic.

Considerem un segment d'un paraboloide de revolució i el cilindre de la mateixa base i la mateixa altura. Tallem-lo en n llesques del mateix gruix, $\frac{h}{2}$, per mitjà de plans paral·lels a la base del segment parabòlic. Sigui $A_nB_n = R$.

Per la propietat de la paràbola,[311] tenim que:

$$\frac{\overline{A_iB_i}^2}{\overline{A_nB_n}^2} = \frac{OA_i}{OA_n} = \frac{i\,h}{n\,h} = \frac{i}{n}.$$

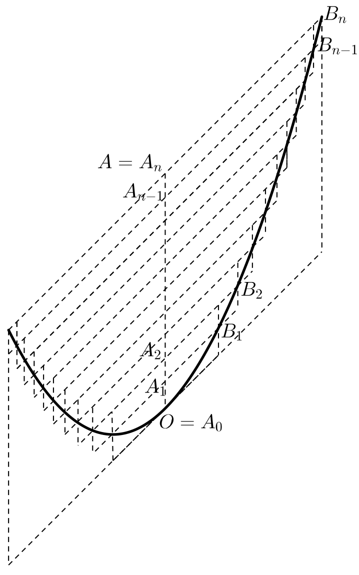


Figura 2.20. CE 21

Considerem els sòlids $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, inscrits en el segment de paraboloide i circumscrits a aquest, respectivament, formats per $n-1$ llesques cilíndriques inscrites i n de circumscrites, i comparem els seus volums $V_1 := \mathfrak{v}(\mathcal{I})$ i $V_2 := \mathfrak{v}(\mathcal{J})$, amb el del cilindre $\mathcal{C}$ que els circumscriu totalment, $\mathfrak{v}(\mathcal{C})$. Tenim que:

$$\frac{\mathfrak{v}(\mathcal{I})}{\mathfrak{v}(\mathcal{C})} = \frac{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)}{n^2} < \frac{1}{2} \text{ i } \frac{\mathfrak{v}(\mathcal{J})}{\mathfrak{v}(\mathcal{C})} = \frac{1+2+\cdots+(n-1)+n}{n^2} > \frac{1}{2}.$$

311. QP 3 (B.2b_3, pàgines 227-228).

En definitiva, $\frac{V}{V_1} > 2 > \frac{V}{V_2}$. O sigui que $2\,V_1 < V < 2\,V_2$.[312]

Ara, Arquimedes, seguint el mètode d'exhaustió —en aquest cas, de compressió—, ha de suposar que el volum cercat és W i veure que, tant si suposa que $W > \frac{1}{2}\,V$ com si suposa que $W < \frac{1}{2}\,V$, arriba a contradicció. I això ho aconsegueix construint uns sòlids, de volums V_1 i V_2, com els descrits, amb $W > V_1 > \frac{1}{2}\,V$ i $W < V_2 < \frac{1}{2}\,V$. I, en tots dos casos, es dona una contradicció.[313]

▶ **Exercici 52**. Considerem la paràbola d'equació $y^2 = \frac{R^2}{H}\,x$ i subdividim $[0, H]$ en n subintervals iguals. Fem-la girar al voltant del seu eix. Quin és el valor numèric de $\mathfrak{v}(\mathcal{I})$ i $\mathfrak{v}(\mathcal{J})$?

Exercici 53. Observeu que l'exercici 49 (pàgina 102) estableix que $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{1}{3}\,n^3 < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Feu-ho per adonar-vos que, usant el mètode emprat abans en el cas del segment de paraboloide, aplicat a l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, obtenim el volum $\mathfrak{V}_{\text{el·lipsoide}} := \frac{4}{3}\,\pi\,a^2\,b$.

Exercici 54. El mètode descrit serveix per a determinar el volum d'una piràmide i el d'un con?

Exercici 55. Considereu un segment d'el·lipsoide de revolució d'altura h i secció l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Demostreu que el volum que obteniu és: $\mathfrak{V}_{\text{segment d'el·lipsoide}} := \frac{1}{3}\,\pi\,a\,b\,h$. [*Indicació.* Constateu que l'àrea $\mathfrak{A}_z$ d'una secció horitzontal d'altura z és $\mathfrak{A}_z := \pi\,a\,b\,\frac{(h-z)^2}{h^2}$.] ◀

2.2.7 MC: *De la mesura del cercle*

Aquesta monografia és molt breu.[314] Solament conté tres proposicions però dues són d'una importància enorme, tant conceptual com històrica. I, a més, tenen un caràcter ben diferent.

2.2.7*a* Una observació prèvia

D'entrada, tanmateix, observem els fets següents. En el resum que hem ofert d'EC, hem vist que Arquimedes estén l'estudi

---

312. Fixem-nos que, si poguéssim prendre límits, tindríem el resultat buscat. Seria un càlcul més modern.

313. B.6d_5 (pàgines 440-443).

314. B.7 (pàgines 456-462).

geomètric a les superfícies dels sòlids dels quals Euclides havia analitzat els volums. Ara, d'alguna manera en la mateixa línia, en el cas del cercle es preocupa d'estudiar la longitud de la circumferència, mentre que Euclides solament havia pretès establir el lligam existent entre l'àrea del cercle i el quadrat del diàmetre corresponent. Com veiem a EXII 2,[315] Euclides afirma que la raó que hi ha entre l'àrea del cercle i la del quadrat del diàmetre és un invariant.

2.2.7a_1 La longitud de la circumferència

La pregunta natural que ens podem fer, en abordar aquest tema, és: existeix una raó constant entre la longitud de la circumferència d'un cercle i el seu diàmetre? I, en el cas que la resposta sigui afirmativa, quin és aquest lligam? A més, quina és la raó entre aquesta que hem trobat i la de l'àrea del cercle i el quadrat del seu diàmetre, si és que existeix?

La resposta d'Arquimedes és molt notable:

> *La raó que hi ha entre la longitud de la circumferència i el diàmetre és un «invariant». I, a més,* $\frac{\mathfrak{L}}{d} = 4\,\frac{\mathfrak{S}}{d^2}$.[316]

Ara bé el contingut de MC 1, en termes geomètrics, tal com l'enuncia el siracusà, és:

> MC 1 [*L'àrea d'*]*un cercle equival a* [*la d*]*el triangle rectangle que té com a catets el radi i la longitud de la circumferència.*

▶ **Exercici 56**. Establiu l'equivalència d'aquestes dues formulacions. ◀

La idea de la demostració d'Arquimedes és simple, un cop assimilada la que havia fet Euclides a EXII 2. Però el siracusà considera, a més, que els polígons regulars circumscrits amb el doble de costats que l'anterior exhaureixen el cercle per fora.[317]

---

315. PLA (2021), p. 57-58 i 488-493.

316. Si, com es demostrarà segles més tard, fem $\pi := \frac{\mathfrak{L}}{d}$, aleshores $\frac{\mathfrak{S}}{d^2} = \frac{1}{4}\,\pi$.

317. Euclides solament usa l'exhaustió dels polígons regulars inscrits en el cercle.

És a dir, segons Euclides, si $\mathfrak{S}$ és l'àrea del cercle i $\mathcal{E}$ una àrea donada, podem trobar un polígon regular p_n inscrit en el cercle de manera que $\mathfrak{S} - \mathfrak{a}(p_n) < \mathcal{E}$. I Arquimedes amplia aquesta idea i estableix que també en podem trobar un de circumscrit P_n de manera que $\mathfrak{a}(P_n) - \mathfrak{S} < \mathcal{E}$.[318]

▶ **Exercici 57**. Establiu: *a*) L'afirmació anterior.

b) Donat un cercle d'àrea $\mathfrak{S}$, siguin $\mathcal{L}$ la longitud de la circumferència, p_n el polígon inscrit i P_n el circumscrit[, regulars de 2^{n+1} costats].[319] Aleshores, $\ell(p_n) < \mathcal{L} < \ell(P_n)$, en què $\ell(p)$ significa *perímetre del polígon p*. [*Indicació.* Useu el fet geomètric que, en termes trigonomètrics, estableix que: $\sin\theta < \theta < \tan\theta$, si $\theta < \frac{\pi}{2}$.]

Exercici 58. *L'exhaustió del cercle per fora.* Considereu els polígons regulars de n i $2\,n$ costats, P_n i P_{2n} circumscrits a un cercle.

Demostreu que, en passar de P_n a P_{2n}, ens enduem més de la meitat de l'espai exterior del cercle. [*Indicació.* Passem del polígon regular de costats KA i AH al de costats KG, GE, EF i FH, que són tangents a la circumferència pels punts K, E i H, sent E el punt mitjà de l'arc $\widehat{KH}$.

Aquesta tangent GF s'emporta més de la meitat de l'àrea de la figura curvilínia limitada pels segments AH i AK i l'arc $\widehat{KEH}$.

a_1) L'angle $\widehat{AEG}$ és més gran que l'angle $\widehat{EAG}$. [EI 32 i EIII 18]

a_2) $AG > EG$ [EI 47] i, per tant, $AG > GK$.

a_3) Per tant, $\triangle\,AGE > \triangle EGK$ i $\triangle\,AFE > \triangle EFH$ [, ja que tots dos tenen la mateixa altura i un té la base més gran que l'altre].

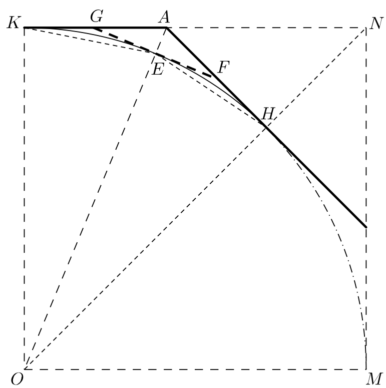


FIGURA 2.21. L'exhaustió dels polígons circumscrits

318. Hem passat d'usar la tècnica d'Antifont a fer servir la de Brisó. PLA (2016*b*), p. 234-236.

319. Si bé en Euclides tenen 2^n costats, això no és essencial. El que sí que és important és que el mètode per a passar de p_n i P_n al següent, en aquest cas als següents, $p_{2\,n}$ i $P_{2\,n}$, és iteratiu.

D'això en resulta que $\triangle\, AFG > \frac{\text{quadrilàter mixtilini } \triangle\, AHEK}{2}$.

Finalment, $\triangle\, AFG > \frac{1}{2}$ de l'àrea limitada per AH i AK i l'arc $\widehat{HEK}$.]

[Demostració de MC 1.] Hi usem el mètode de doble reducció a l'absurd.

a) Suposem que $S > \mathfrak{a}(T)[:= \frac{1}{2}\, r\, \mathcal{L}]$ i considerem la diferència $\mathfrak{E} := S - \mathfrak{a}(T)$.

Elegim un polígon regular de $m := 2^n$ costats, p_m, inscrit en el cercle S —és a dir, obtingut dimidiant polígons regulars inscrits a partir del quadrat inscrit—, de manera que $S - \mathfrak{a}(p_m) < \mathfrak{E} := S - \mathfrak{a}(T)$, atès que els polígons inscrits p_m exhaureixen S. Aleshores, d'una banda, $\mathfrak{a}(T) < \mathfrak{a}(p_m)$.

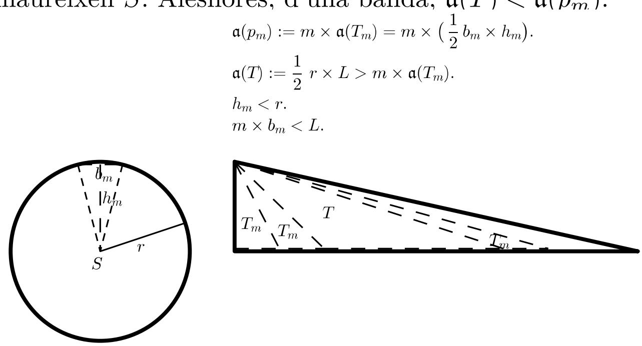


FIGURA 2.22. MC 1*a*

Ara bé, els m triangles T_m en els quals es descompon el polígon regular p_m tenen la base b_m i l'altura $b_{2m} < r$. I, òbviament, $m\, b_m < \mathcal{L}$. [ECI, postulat 1]

I el polígon p_m és la unió dels m triangles inscrits de base b_m i altura h_m.

Per tant,

$$\mathfrak{a}(p_m) = m\, T_m = \tfrac{1}{2}\, h_m \times (m\, b_m) < \tfrac{1}{2}\, r \times \mathcal{L} = \mathfrak{a}(T).$$

Impossible! ♠

b) Suposem, doncs, que $S < \mathfrak{a}(T)[:= \frac{1}{2}\, r\, \mathcal{L}]$. Si usem polígons regulars de $m := 2^n$ costats circumscrits en el cercle que, com hem vist, també exhaureixen S, *mutatis mutandis*, arribem també a una contradicció. ♠ ♠

► **Exercici 59**. Proveu l'ítem b de la demostració anterior i feu la figura anàloga a la figura 2.21 corresponent. ◄

2.2.7a_2 El mètode iteratiu d'aproximació a $\frac{\mathcal{L}}{d}$

Arquimedes estableix el resultat següent:

> MC 3. La raó $\frac{\mathcal{L}}{d}$ està fitada en la forma que s'estableix a 2.7.

Un cop ha vist que la raó entre $\mathfrak{S}$ i r^2 —és a dir, el que avui anomenem π— coincideix amb la raó entre $\mathcal{L}$ i d, s'adona que pot usar l'exhaustió que ofereixen els polígons regulars inscrits i circumscrits per a «aproximar» aquesta raó numèricament. De fet, usa la intuïció d'Antifont i Brisó[320] de manera geomètricament correcta. No pretén establir la quadratura del cercle. Com dèiem, només la fa servir per a «aproximar numèricament» la raó $\frac{\mathcal{L}}{2r}$. I això és d'una gran agudesa intel·lectual. El mètode que proporciona és iteratiu i admet una programació senzilla.[321]

A més, usant el polígon regular inscrit i el circumscrit de noranta-sis costats, obté la desigualtat següent:

$$3\,\frac{10}{71} < \frac{\mathcal{L}}{d} < 3\,\frac{1}{7}. \tag{2.7}$$

Per aconseguir-ho, necessita, d'una banda, aplicar el teorema de la bisectriu, del qual ofereix una demostració *ad hoc*, tot i que es troba a Evi 3.[322] I, de l'altra, ha de poder aproximar inferiorment i superiorment algunes arrels quadrades numèriques concretes. De fet, estableix una identitat trigonomètrica que lliga els segments trigonomètrics de $\frac{\theta}{2}$ i θ. En concret,

$$\cot\frac{\theta}{2} = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta. \tag{2.8}$$

El mètode iteratiu d'Arquimedes

D'entrada, dibuixa els costats $a_n := BA$ i $a_{2n} := BE$ dels polígons regulars circumscrits a la circumferència de n i $2n$ costats,

320. Nota 318 (pàgina 109).
321. Programa 2 (pàgina 178).
322. B.7.3 (pàgines 459-462). Vegeu també Pla (2018), p. 305-307.

respectivament [figura 2.23].

Després, uneix O amb A i E. [P 1]

Pel punt A, tira una paral·lela al segment OE fins que talla la prolongació del diàmetre OB pel punt Q. [EI 31, P 2 i P 5]

L'angle $\widehat{AOB}$ val el doble que el $\widehat{BOE}$. [Definició de a_n i a_{2n}]

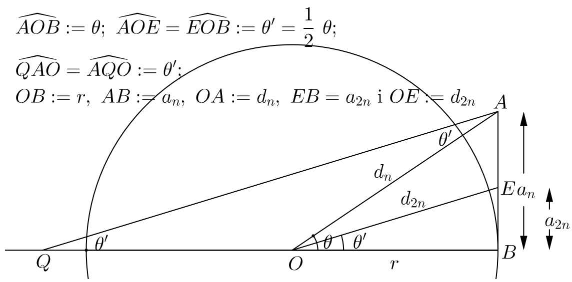


FIGURA 2.23. MC 3a

El triangle $\triangle AOQ$ és, doncs, isòsceles [EI 29].

I, per tant, $OA = OQ$ [EI 6 i DI 20].

Aplicant el teorema de Tales als triangles rectangles semblants $\triangle ABQ$ i $\triangle EBO$ [EVI 2], obté:

$$\frac{a_n}{a_{2n}} := \frac{AB}{EB} = \frac{OB}{BQ} = \frac{OB}{BO + OQ} = \frac{OB}{BO + OA}.$$

D'això en resulta que $a_{2n} = \frac{OB+OQ}{OB} a_n$.

I, pel teorema de Pitàgores [EI 47], $OA = \sqrt{r^2 + AB^2}$.

En definitiva, el coneixement del costat $a_n := AB$ del polígon regular de n costats permet calcular el costat $a_{2n} := AE$ del polígon regular amb el doble de costats.

Aleshores, comença el còmput amb $n = 6$, perquè sap que $a_6 = r$. [EIV 15]

Així, iteradament, obté els costats $a_6 := r$, $a_{12}, a_{24}, a_{48}, a_{96}$, etc., en funció del radi $r := OB$.[323]

I procedeix de manera anàloga amb els costats dels polígons regulars inscrits, a partir de a_6'.[324]

323. EIV 15, a PLA (2018), p. 260-262.

324. Com ja hem dit abans, en tots dos casos Arquimedes estableix la mateixa identitat trigonomètrica: $\cot \frac{\theta}{2} = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta$, en la qual, si per simplificar fem $r = 1$, dona $a_n := \tan\theta$, $a_{2n} := \tan\frac{\theta}{2}$ i $OA := \operatorname{cosec}\theta$.

I, per la naturalesa dels polígons inscrits p_i i circumscrits P_i, amb $i = 6, 12, 24, 48, 96$, resulta que $p_{96} < \mathcal{L} < P_{96}$, sent $\mathcal{L}$ la longitud de la circumferència.[325]

Deixeu que ho repetim una altra vegada. El més notable de tot —i per això ens ha semblat que valia la pena entretenir-s'hi— és que, del mètode intuït per Antifont i Brisó, Arquimedes —el gran geòmetra— n'extreu una aplicació geomètrica molt original i notable, i d'una gran utilitat per al càlcul; un algorisme iteratiu per a aproximar π, usant la relació $\pi = \frac{\mathcal{L}}{d}$, en el qual $\mathcal{L}$ és la longitud de la circumferència i d el diàmetre.[326]

2.2.7a_3 El còmput d'Arquimedes

Vegem, ara, els càlculs concrets que fa el geòmetra. Comença amb l'hexàgon regular inscrit en el cercle —de costat $2\,a_6 = 1$— i subdivideix els angles centrals per determinar una aproximació dels costats dels polígons de $12, 24, 48$ i 96 costats.[327]

El còmput d'Arquimedes pas a pas:

1. De primer, pren en consideració l'hexàgon regular circumscrit a un cercle de radi r. Mig costat AB val $\frac{1}{2}\,r$ i l'angle $\widehat{AOB}$ la tercera part d'un angle recte. Per tant,

$$\frac{OB}{AB}(:= \frac{r}{d_6}) = \frac{\sqrt{3}}{1} > \frac{265}{153},\ \frac{OA}{AB}(:= \frac{d_6}{a_6}) = \frac{2}{1} = \frac{306}{153}.^{[328]} \tag{2.9}$$

325. De fet, $p_{96} = 96 \times a'_{96} \times \sqrt{1 - a'^2_{96}}$ i $P_{96} = 96 \times a_{96} \times r$ i $p_{96} < \frac{\mathcal{L}}{d} < P_{96}$, que és un càlcul, i —molt important— un càlcul iteratiu. I, com podem veure en el còmput que fa (2.2.7a_3), a partir d'això, Arquimedes obté l'aproximació coneguda $\frac{\mathcal{L}}{d} := \pi \simeq \frac{22}{7}$. B.7.3 (pàgines 459-462).

326. Observem que Arquimedes usa els perímetres dels polígons regulars per a convergir a la longitud $\mathcal{L}$ de la circumferència. En canvi, uns segles més tard, a la Xina, Liu Hui, per a fer-ho a la superfície del cercle, usarà les superfícies i, en concret, la relació $\pi = \frac{\mathfrak{S}}{r^2}$, en la qual $\mathfrak{S}$ és la superfície del cercle i r el radi. I així també aconseguirà un mètode iteratiu per a aproximar π. Pla (2009), p. 162-166.

327. Exercici 63 (pàgines 116-117).

328. Empra les fitacions $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{180}$, la primera en el cas de l'hexàgon regular circumscrit i la segona en el de l'inscrit.

2. Després, té en compte la bisectriu OE de l'angle $\widehat{AOB}$ [EI 9]. Sap que $\frac{BE}{EA} = \frac{OB}{OA}$ [EVI 3]. Per tant, *alternando*, $\frac{OA}{EA} = \frac{OB}{BE}$ [EV 16] i, en conseqüència, $\frac{OA+OB}{EA+BE} = \frac{OB}{BE}$ [EV 12].

3. De cara a la iteració, ho expressarem així,

$$\frac{r}{a_{12}} = \frac{r+d_6}{a_6} > \frac{306+265}{153} = \frac{571}{153}.$$ [329]

Per tant, $\frac{d_{12}}{a_{12}} = \frac{r^2+a_{12}^2}{a_{12}^2} > \frac{571^2+153^2}{153^2} = \frac{349.450}{23.409}$.

O sigui $\frac{d_{12}}{a_{12}} > \frac{591\,\frac{1}{8}}{153}$.[330]

4. Ara, a la iteració, les expressions $\frac{r}{a_{12}}$ i $\frac{d_{12}}{a_{12}}$ prenen el relleu de les $\frac{r}{a_6}$ i $\frac{d_6}{a_6}$ de (2.9). I, així, obté, successivament:

$$\frac{r}{a_{24}} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153} \text{ i } \frac{d_{24}}{a_{24}} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153};$$

$$\frac{r}{a_{48}} > \frac{2334\frac{1}{8}}{153} \text{ i } \frac{d_{48}}{a_{48}} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153};$$

$$\frac{r}{a_{96}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

I aquí s'atura.

5. Finalment, considera el polígon regular circumscrit de noranta-sis costats P_{36}. Aquests costats amiden $2\,a_{96}$ i el diàmetre del cercle és $d := 2\,r$. Per tant [EV 7, EV 11 i DV 7],

$$\frac{2\,a_{96}}{2\,r} = \frac{2\,a_{96}}{d} = \frac{96 \times (2\,a_{96})}{d} < \frac{96 \times 153}{4673\,\frac{1}{2}\,d} = \frac{14.688}{4673\,\frac{1}{2}\,d}.$$

Però, $14.688 < \left(3\,\frac{1}{7}\right) \times \left(4673\,\frac{1}{2}\right)$ i $L < 96 \times (2\,a_{96})$.

O sigui que $\frac{L}{d} < \frac{96\times(2\,a_{96})}{d} < 3\,\frac{1}{7\,d}$ [DV 7] i que $L < 3\,\frac{1}{7}\,d = \frac{22}{7}\,d$.

Aquesta és la primera part de l'enunciat de la proposició MC 3. ♠

Un cop aconseguida aquesta fitació de $\frac{\mathcal{L}}{d}$, recorre als polígons regulars inscrits i, raonant de manera anàloga, *mutatis*

329. És el mètode que ja havia seguit Aristarc.

330. Novament, Arquimedes dona la fitació inferior $\sqrt{349.450} > 591\,\frac{1}{8}$. Aquest és el punt que fa que sigui difícil seguir els seus càlculs, però el seu raonament i el seu mètode són claríssims.

mutandis, aconsegueix fitar la raó del costat inscrit $2\,a'_{96}$ i el diàmetre d, $\frac{d}{96\times(2\,a'_{96})} > \frac{2017\,\frac{1}{4}\,d}{96\times 66}$. Però $96\times 66 > 3\,\frac{10}{71}\times 2017\,\frac{1}{4}$ i $L < 96\times(2\,a'_{96})$. En definitiva, obté la segona part de la proposició MC 3, $3\,\frac{10}{71} < \frac{L}{d}$ [Dv 7]. ♠[331] ♠

Així doncs, Arquimedes proporciona

$$P_{96} = 96\times\tan\frac{360^{\mathrm{o}}}{96} < 96\times\frac{153}{4673\,\frac{1}{2}} = \frac{14.688}{4673\,\frac{1}{2}} \sim 3\,\frac{667\,\frac{1}{2}}{4673\,\frac{1}{2}} \sim 3\,\frac{1}{7}.$$

$$p_{96} = 96\times\sin\frac{360^{\mathrm{o}}}{96} > 96\times\frac{66}{2017\,\frac{1}{4}} = \frac{6336}{2017\,\frac{1}{4}} \sim 3\,\frac{10}{71}.$$

$$3\,\frac{10}{71}\,d < L < 3\,\frac{1}{7}\,d.$$

En terminologia actual, diríem que estableix la fitació següent del nombre π:

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}.$$

I ho fa amb un «mètode iteratiu» d'aproximació de π.

Els càlculs d'aquest procés iteratiu manegen nombres massa grans per a l'escriptura numèrica grega, que era força pobra.[332]

TAULA 2.3. *Els valors exactes i els aproximats d'Arquimedes*

Valors exactes	*Valors aproximats*	
	Per excés	*Per defecte*
$\sqrt{3} = 1,732050\ldots$	$\frac{265}{133} = 1,73202\ldots$	$\frac{1351}{780} = 1,732051\ldots$
$\sqrt{349.450} = 591,14\ldots$	$591\,\frac{1}{8} = 591,125$	
$\sqrt{1.373.943\,\frac{33}{64}} = 1172,15\ldots$	$1172\,\frac{1}{8} = 1172,125$	
$\sqrt{5.472.132\,\frac{1}{16}} = 2339,26\ldots$	$2339\,\frac{1}{4} = 2339,25$	
$\sqrt{9.082.321} = 3013,68\ldots$		$3013\,\frac{1}{4} = 3013,25$
$\sqrt{3.380.929} = 1838,74\ldots$		$1838\,\frac{9}{11} = 1838,818\ldots$
$\sqrt{1.018.405} = 1009,165\ldots$		$1009\,\frac{1}{6} = 1009,166\ldots$
$\sqrt{4.069.284\,\frac{1}{26}} = 2017,24\ldots$		$1017\,\frac{1}{4} = 1017,25$
$\pi = 3,141592\ \ldots$	$3\,\frac{10}{71} = 3,1408$	$3\,\frac{1}{7} = 3,1428$

▶ **Exercici 60**. Són gaire bones les fitacions $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{180}$?

331. Exercici 63 (pàgines 116-117).
332. PLA (2016*b*), p. 9-12.

Podem aconseguir aquesta aproximació usant el mètode babilònic o la fórmula d'Heró —fórmula 2.1 (pàgina 41)? I agafant el valor mitjà de totes dues? [*Indicació.* Vegeu Pla (2016*a*), § 2.5.6, p. 175-180, en particular, p. 179-180.]

Com les podia haver deduït, Arquimedes? [*Indicació.* Vegeu Heath (1894), § 7, p. lxxx-lxxxiv, o (1921), vol. ii, p. 51-52.][333]

Exercici 61. Siguin S_n i ℓ_n l'àrea i el perímetre del polígon regular P_n. Proveu: *a*) $S_n = \pi\, r^2 \sin\frac{\pi}{n}\,\cos\frac{\pi}{n}$, i *b*) $\ell_n = 2\,n\,r\,\sin\frac{\pi}{n}$.

Deduïu-ne que, si feu $n \to \infty$, obteniu $\mathfrak{S} = \frac{1}{2}\,r\,\mathcal{L}$. [*Indicació.* Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ell_n}$. Per a aquests exercicis, Edwards (1979), p. 31-35.]

Exercici 62. Siguin a_n i b_n, com hem indicat en la figura MC 1*a*, els costats del triangle amb vèrtex al centre del cercle i base el costat del polígon regular inscrit de n costats, i h_n l'altura d'aquest triangle. Sabem que $S_n = \frac{1}{2}\,n\,b_n\,h_n$ i $\ell_n = n\,b_n$. Deduïu-ne, sense recórrer a la trigonometria, que $\mathfrak{S} = \frac{1}{2}\,r\,\mathcal{L}$, calculant, com abans, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ell_n}$. [*Indicació.* Què hem de suposar que és «òbviament» cert?]

Exercici 63. Per tal de fitar π, Arquimedes usa polígons circumscrits a un cercle i inscrits en aquest.

a) En la figura 2.23 (pàgina 112), tenim el lligam que proporcionen els polígons regulars circumscrits:

$OQ = OA$.

$\frac{BE}{BO} = \frac{AE}{OQ} = \frac{BE+EA}{BO+OQ} =$

$= \frac{AB}{BO+OA}$.

$a_{2n} = \frac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n^2}}$.

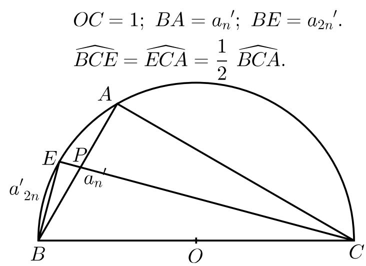


Figura 2.24. MC 3*b*

b) En la figura 2.24, veiem el lligam que proporcionen els polígons regulars inscrits entre els costats a'_n, a'_{2n}:

Considerem la bisectriu CE de l'angle $\widehat{BCA}$.

Els triangles $\triangle CBE$ i $\triangle BPE$ són semblants. Per tant, $\frac{CE}{EB} = \frac{EB}{EP} = \frac{CB}{BP}$ [Evi 4].

333. En el volum *Grècia IV*, quan parlarem dels nombres costat-diagonal de Teó d'Esmirna, veurem un mètode alternatiu possible. Frajese (1974), p. 220-223, o Marchini (2006), p. 191-192.

Però, per la propietat de la bisectriu CP del triangle, resulta que $\frac{CB}{CA} = \frac{BP}{PA}$ [Evi 3].

I, aplicant Ev 18 i Ev 16 [*componendo* i *alternando*], tenim tenim que $\frac{CB}{CB+CA} = \frac{BP}{BP+PA}$. I, per tant, $\frac{CB}{BP} = \frac{CA+CB}{BP+PA}$.

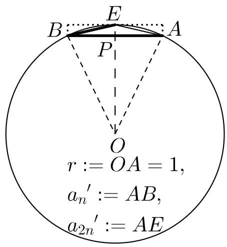


Figura 2.25. MC 3*c*, de Liu Hui

O sigui que $\frac{CE}{EB} = \frac{CA+CB}{AB}$ [Ev 7 i Ev 11].

Feu $r = OB = 1$, $BE = a'_{2n}$, $CE = d'_{2n} = \sqrt{4 - a'^2_{2n}}$, $AB = a_n$ i $AC = d_n = \sqrt{4 - a'^2_n}$, i deduïu l'expressió recurrent: $a'^2_{2n} = \frac{2\,a'_n}{2+\sqrt{4-a'^2_n}}$. [*Indicació.* Vegeu Mugler (1970), p. 135.]

c) Sabem que $a'_6 = 1$ i $a_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Calculeu a_n i a'_n, amb $n =$ 12, 24, 48 i 96. Obtindreu que $a_{96} \sim 0,065438$ i $a'_{96} \sim 0,032737$. Quina fitació de π assoliu amb aquests valors? [*Indicació.* Les fites s'apropen a $3\,\frac{1}{7}$ i $3\,\frac{10}{71}$.]

d) És possible fer un càlcul més simple usant els triangles amb el vèrtex al centre (figura 2.25)?
[*Indicació.* Burton (1985), p. 228; Pla (2009), p. 162-163.]

Exercici 64. Feu una anàlisi dels casos plantejats per Arquimedes amb polígons circumscrits i inscrits, i dels càlculs i nombres que s'hi descriuen (B.7.3, pàgina 459), i constateu la correcció de la taula 2.3 (pàgina 115).

Exercici 65. Seguint una sugerència de Knorr,[334] considereu un pentàgon regular inscrit en el cercle de radi unitari. Aleshores, el costat $a'_{10} = 2\,\sin 18^{\text{o}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Usem les fórmules iteratives dels ítems a_3 i b_4 de l'exercici 63 fins a aconseguir els valors a'_{640} i a_{840} amb vuit xifres decimals. Quin valor de π heu obtingut? És gaire proper a 3,141592?

Exercici 66. Siguin p_n i P_n els perímetres dels polígons regulars de n costats inscrits en un cercle de radi unitari i circumscrits en aquest, respectivament. És clar que, seguint la notació de l'exercici 63, $a'_n = 2\,\sin\frac{\pi}{n}$ i $a_n = \tan\frac{\pi}{n}$.

334. Knorr (1975-1976), p. 138.

Proveu que $P_{2n} = \frac{2\,p_n\,P_n}{p_n+P_n}$ i $p_{2n} = \sqrt{p_n\,P_{2n}}$.[335]

Si comenceu amb el perímetre del quadrat inscrit $p_4 = 4\sqrt{2}$ i amb el del circumscrit $P_4 = 8$, useu les fórmules iteratives dels ítems a_3 i b_4 de l'exercici 63 fins a arribar a p_{64} i P_{64}. Quines fites de π heu aconseguit?[336]

Exercici 67. Sigui s_n l'àrea del polígon regular de n costats inscrit en un cercle de radi unitari. I S_n la del circumscrit a aquest, respectivament. Proveu que: $s_{2n} = \sqrt{s_n\,S_n}$ i $S_{2n} = \frac{2\,s_{2n}\,S_n}{s_{2n}+S_n}$.[337] ◀

2.2.8 Ar: *Arenari*

Una altra dificultat important que tenien la majoria dels sistemes numèrics usats en l'antiguitat era la poca capacitat expressiva. Malgrat que els sistemes posicionals, en principi, permetien escriure nombres tan grans com es volgués, a la pràctica no hi havia cap raó per a computar «nombres grans», «enormement grans».[338]

Tanmateix, Arquimedes, en una monografia adreçada a Geló, fill de Hieró II, després de fer una descripció de l'Univers basada en el model d'Aristarc, que s'anticipa al de Copèrnic molts segles, proposa un mètode numèric per a resoldre el desafiament d'una locució proverbial que ens ha transmès Píndar: «La sorra no es pot comptar.»[339]

El siracusà accepta el repte i es planteja el problema del nombre dels grans de sorra de l'Univers. I, en fer-ho, elabora

335. Fixem-nos que P_{2n} és la mitjana harmònica de p_n i P_n, i p_{2n} la geomètrica de p_n i P_{2n}.

336. Aquest exercici i els següents van ser introduïts de manera explícita pels matemàtics indis.

337. Nota 335. Observeu l'analogia i les diferències.

338. Nota 332 (pàgina 115).

339. *Ψάμμος ἀριθμὸν περιπέφευγεν*. Píndar (1957-1994), «Olímpica II», *èpode 5è,* 98 i 99, edició catalana, vol. III, p. 71. I, a l'*Ilíada*, se'ns diu que, per a Aquil·les, el dels peus lleugers, «ni tots els grans de sorra ni tots els grans de pols» no podrien apaivagar l'afront d'Agamèmnon (B.8.1*a*, pàgina 463).

una monografia que, com la del problema dels bous,[340] és realment extraordinària, sobretot per l'excepcionalitat que suposa dins de la seva obra.

La monografia consta de tres parts: una introducció, una descripció del món, que li serveix per a poder comptar els grans de sorra que hi ha en l'esfera de les estrelles fixes, i un mètode de còmput que li permet afirmar que n'hi ha $< 10^{63}$ perquè el diàmetre d'aquesta esfera fa 10^{14} estadis,[341] i una esfera de diàmetre una quarantèsima part d'un dit conté 64.000 grans de sorra.[342]

2.2.8*a* Introducció de l'Ar

En la introducció de l'*Arenari*, Arquimedes en sintetitza l'objectiu. Explica al rei Geló que el nombre de grans de sorra del món no és infinit i que, malgrat l'opinió dels que sostenen que és massa gran per a ser comptat, és possible determinar-ne el nombre amb el sistema numèric que ja havia exposat a Zeuxip.[343]

2.2.8*b* Exposició del sistema del món

Aquest text té una gran importància històrica perquè dona molta informació sobre algunes de les dades astronòmiques que s'havien establert en la Grècia clàssica. L'autor les analitza i les accepta o corregeix segons el seu criteri. Després d'esmentar Aristarc de Samos i atribuir-li la «teoria heliocèntrica» de l'Univers —que ell també comparteix—, dona un còmput dels diàmetres de la Terra, la Lluna i el Sol i de les distàncies que separen els centres d'aquests cossos.[344]

---

340. Si Arquimedes hagués plantejat el problema en la forma en què ens ha arribat, també s'hauria vist obligat a disposar de nombres grans.

341. De fet, són un parell d'anys llum ja que un estadi té uns 10^4 dits.

342. Per a un estudi detallat, VARDI (2007). En línia, <http://www.heinrichfleck.net/Quaderni/Arenarius.pdf> i <http://www.heinrichfleck.net/Quaderni/Arenarius.pdf>.

343. Ítem *e* (pàgina 27).

344. B.8.2*c* (pagines 473-476). També pot ser interessant consultar, per

Arquimedes suposa, com Aristarc, que l'Univers és esfèric i que el seu centre és el Sol.[345] Trenca així amb el model acceptat pels geòmetres grecs, que creien que el centre de l'Univers era el de la Terra i que el radi anava d'aquest centre al del Sol.

Per això necessita concretar el diàmetre d'aquesta esfera. I ho fa basant-se en les mides de la Terra i la Lluna i en la relació dels diàmetres dels dos astres. A més, planteja una hipòtesi:

> **Hipòtesi de les mides de l'Univers**. *El diàmetre de l'esfera de l'Univers* d_{Univers} *és al diàmetre de l'òrbita de la Terra al voltant del Sol* $d_{\text{òrbita}}$ *com aquest al diàmetre de la Terra* d_{Terra}.[346]

És a dir, $\dfrac{d_{\text{òrbita}}}{d_{\text{Terra}}} = \dfrac{d_{\text{Univers}}}{d_{\text{òrbita}}}$.

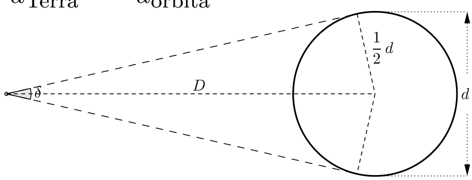


Figura 2.26. Ar 1. Distància del Sol a la Terra

Per obtenir-ne una majoració, fa les sobreestimacions següents:

1. La circumferència de la Terra no supera les 300 miríades —és a dir, 3×10^6— d'estadis.[347]
2. El diàmetre de la Lluna no excedeix el de la Terra i el del Sol no ho fa 30 vegades el de la Lluna.[348]

---

exemple, la seva comparació amb les aportacions d'Aristarc. Pla (2021), § 5.2, p. 145.

345. Aquesta és l'única referència a l'heliocentrisme d'Aristarc perquè l'obra d'aquest autor que s'ha conservat —i que hem analitzat (Pla (2021), § 5.2, p. 139-145) i recollit íntegrament [Pla (2021), apèndix E, p. 299-346]— no hi fa cap referència i ni s'hi basa.

346. El $d_{\text{òrbita}}$ és la mitjana proporcional dels diàmetres d_{Univers} i d_{Terra}.

347. Uns 5 × 105 km, que és més de 10 vegades el valor correcte. Com veurem, Eratòstenes en fa un càlcul força acurat i obté el valor de 250.000 estadis. Pla (en premsa c), «Eratòstenes».

348. Els astrònoms grecs havien establert que $d_{\text{Lluna}} < d_{\text{Terra}} < d_{\text{Sol}}$.

3. El diàmetre angular del Sol, vist des de la Terra, supera $\frac{1}{200}$ l'angle recte, és a dir, és inferior a mig grau.

I és, precisament amb aquestes dades, que Arquimedes aconsegueix comptar els grans de sorra de l'Univers.

2.2.8*c* El sistema arquimedià de còmput numèric

Després de fer els càlculs astronòmics que considera correctes, Arquimedes passa a comptar el «nombre total» de grans de sorra de l'Univers.[349] El seu sistema, que es basa en les potències de la base, és semblant al nostre, però en difereix i molt en la manera d'expressar-los. Juga amb l'ús simultani de progressions aritmètiques de diferència 1 i geomètriques de raó 10.[350]

Anomena els nombres de l'interval $[1, 10^8)$ números de primer ordre. El número 10^8 esdevé la base del sistema i s'hi refereix com a *unitat dels números de segon ordre*.[351] Així obté les unitats $10^8, \left(10^8\right)^2, \ldots, \left(10^8\right)^{10^8} := P$.

Els números d'1 a $P - 1$ constitueixen el primer període. Seguint el seu raonament, podem confegir la taula 2.4:

TAULA 2.4. *Primer període del sistema de numeració arquimedià*

Unitat	*Nombres*	*Ordre*
1	1 a $10^8 - 1$	primer
10^8	10^8 a $(10^8)^2 - 1$	segon
$(10^8)^2$	$(10^8)^2$ a $(10^8)^3 - 1$	tercer
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(10^8)^{10^8-1}$	$(10^8)^{10^8-1}$ a $(10^8)^{10^8} - 1 := P - 1$	10^8

Èudox havia estimat que $d_{\mathrm{Sol}} = 9 \times d_{\mathrm{Lluna}}$. Fídies, el «pare» d'Arquimedes, que $d_{\mathrm{Sol}} = 12 \times d_{\mathrm{Lluna}}$. I Aristarc que $18 \times d_{\mathrm{Lluna}} < d_{\mathrm{Sol}} < 20 \times d_{\mathrm{Lluna}}$. HEATH (1921), vol. II, p. 82.

349. Recordem que els sistemes numèrics que coneixien els grecs de l'època només arribaven a deu mil —10.000 = 10^4— i, per repetició, fins a deu mil vegades deu mil —100.000.000 = 10^8. PLA (2016*b*), p. 9-12.

350. Hi ha autors que hi han vist una anticipació del logaritme. Nosaltres considerem, però, que aquesta opinió és una extrapolació excessiva.

351. De fet, tenen el paper que el 10 i el 100 tenen en el sistema decimal. Els de primer ordre són els d'una xifra o unitats —$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ i 9. La unitat de segon ordre és 10 i el segon ordre inclou tots els números de dues xifres o desenes.

I, amb P, comença el segon període, que va de P fins a 10^8P-1, i de 10^8P fins a $(10^8)^2P-1$. I així successivament. Aquests períodes proporcionen els números de primer, segon, $\ldots, 10^8$ ordre del segon període. Aleshores, finalment obté la unitat del tercer període P^2. I així successivament.

D'acord, doncs, amb la classificació d'Arquimedes, podem confegir també la taula 2.5.

TAULA 2.5. *El sistema de numeració arquimedià*

Període	*Ordre*	*Interval*
Primer		
	primer	$[1, 10^8)$
	segon	$[10^8, 10^{16})$
	tercer	$[10^{16}, 10^{24})$
	$\vdots$	$\vdots$
	10^8-èsim	$[10^{8\times(10^8-1)}, 10^{8\times 10^8}=P)$
Segon		
	primer	$[P, 10^8P)$
	segon	$[10^8P, 10^{16}P)$
	$\vdots$	$\vdots$
	10^8-èsim	$[10^{8\times(10^8-1)}P, 10^{8\times 10^8}P-1=P^2)$
	$\vdots$	$\vdots$
10^8-èsim		
	primer	$[P^{10^8-1}, 10^8P^{10^8-1})$
	segon	$[10^8P^{10^8-1}, 10^{16}P^{10^8-1})$
	$\vdots$	$\vdots$
	10^8-èsim	$[10^{8\times(10^8-1)}P^{10^8-1}, 10^{8\times 10^8}P^{10^8-1}=P^{10^8})$

Arquimedes anomena el número $\left((10^8)^{10^8}\right)^{10^8}=(10^8)^{10^{16}}$ $:= P^{10^{16}}$ *miríada de miríades del període format per una miríada de miríades de números de miríades de miríades.* A partir d'aquest moment, parla de les octades, que són progressions geomètriques amb 8 termes consecutius: $1, 10, \ldots, 10^7$; 10^8, $10^9, \ldots, 10^{15}$; $10^{16}, \ldots$ [352]

352. Text B.8.2*d* [2] (pàgina 476).

I, arribat en aquest punt, planteja el teorema següent:

> **Teorema**. *En la progressió geomètrica* $1, 10, \ldots, 10^m, \ldots, 10^n$, $\ldots$, *el producte de dos termes és un altre terme que es troba tan allunyat del factor més gran com la unitat del més petit, i el producte de tots dos dista de la unitat tants termes menys un com els dos factors junts.*[353]

Arquimedes afirma, doncs, que $a_m \times a_n = 10^{m+n} = a_{m+n}$.[354]

▶ **Exercici 68**. Demostra el teorema anterior. ◀

Un cop disposa d'aquest sistema per a expressar nombres grans, estableix, a poc a poc, el número de grans de sorra d'una esfera d'un cert diàmetre i arriba al resultat final.

> **Còmput final**. De tot això, se'n dedueix que el número de grans de sorra continguts en una esfera igual a l'esfera de les estrelles fixes, d'acord amb Aristarc, serà més petit que mil miríades de nombres vuitens.

A l'engròs, diu que el número de grans de sorra N és:

$<(10.000)^3 \times 1.000$ unitats de setè ordre
$<$ (el terme tretze de la sèrie) $\times$ el terme 52 de la sèrie
$<$ el terme 64 de la sèrie [o sigui 10^{63}]
$<(10^7$ o) 10.000.000 unitats de l'ordre vuitè de nombres.[355]

---

353. Text B.8.2a_3 [6] (pàgina 478).

354. Podríem enunciar-lo també així: si anomenem a_m el terme m-èsim de la progressió geomètrica anterior, aleshores $\frac{a_{n+m}}{a_n} = \frac{a_m}{1}$, que equival a $a_{n+m} = a_n \times a_m$. Cal tenir en compte que, fent servir la notació $a_m = 10^m$, m pot agafar el valor zero, ja que, en la successió anterior, hi ha la unitat, que és $a_0 = 10^0$. Concretament ho fa en la part en la qual Arquimedes compta la distància des de la unitat la qual, òbviament, fa intervenir. Així doncs, $a_0 = 10^0, a_m = 10^m$. La distància $d_m = d(a_0, a_m)$ val $m+1$. Aleshores, entre $a_n = 10^n$ i $a_{m+n} = 10^{m+n}$ hi ha una distància que val $m+1$. Per a anar de a_n fins a a_{m+n}, cal afegir m termes. D'on $d(a_n, a_{n+m}) = m+1$.

Per això, de vegades, s'ha dit que aquest resultat constitueix la llavor del càlcul dels logaritmes. Però, com ja hem indicat (nota 350), aquesta afirmació és un xic agosarada.

355. NEWMAN (1956), edició castellana, 1968, vol. IV, p. 17.

2.2.9 CFI i II: *Sobre els cossos que floten I i II*

Ara ens trobem davant d'una de les obres més madures d'Arquimedes.[356] D'aquesta monografia, se n'ha dit que:

> És l'obra d'Arquimedes que suscita més admiració entre els matemàtics dels nostres dies, tant per la qualitat excelsa dels resultats obtinguts, que es troba molt més enllà que la dels estrictament matemàtics, com per la genialitat dels arguments.[357]

Aquestes obres de física —la de la hidrostàtica i la de l'estàtica— són les que han suscitat algunes anècdotes que hem vist en el paràgraf 1.1.3 (pàgines 12-21). La que analitzem ara està vinculada al problema de la corona i a l'expressió «eureka!», mentre que la de l'equilibri dels plans ho està a la cèlebre frase segons la qual «amb un punt, es pot aixecar el món».

A més, com indica Eecke,[358] CFI i CFII són d'un gran interès des del punt de vista de l'enginyeria naval, ja que, de les proposicions que contenen, se'n desprèn la teoria del metacentre, que permet superar l'estadi del simple empirisme en la construcció de les naus. Com altres obres del siracusà, aquesta el converteix indubtablement en el pare de la hidrostàtica.

El text es va conservar gràcies a la traducció llatina de Guillem de Moerbeke (∼1269).[359] I Tartaglia en va publicar les traduccions llatines (el 1551 el volum I i el 1554 el vol. II), cor-

---

356. ARQUIMEDES (2009c). Per a una lectura actual i en línia, <https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Floating/rorres_paraboloids_M1.pdf>.

357. DIJKSTERHUIS (1987), p. 380. Tanmateix, val la pena indicar que, en l'obra d'Arquimedes, no hi ha el concepte de «pressió hidrostàtica» ni tampoc cap referència al que es coneix com a *paradoxa hidrostàtica*, que va formular Simon Stevin al segle XVI. Vegeu la nota 367 (pàgina 128) i DUHEM (1900).

358. EECKE (1960), p. XLII.

359. L'any 1884, Valentin Rose en va trobar el manuscrit a la Biblioteca Vaticana. SCHMIDT (1902).

regint els errors i els comentaris. La millor traducció llatina, però, és la de Commandino (Bolonya, 1565). Actualment, disposem del text grec complet perquè es trobava en el palimpsest d'Arquimedes i, gràcies a això, també sabem que estava escrit en dialecte dòric.[360]

Malgrat que el contingut s'escapa de la matemàtica més estricta, no tindria sentit obviar-lo del tot. En farem, doncs, una síntesi breu i n'oferirem alguns fragments.[361]

2.2.9*a* Comentari a la monografia CF

La idea central d'aquest tractat té una certa semblança amb la de l'equilibri dels plans, amb la diferència que, en lloc de tractar de l'equilibri dels cossos, estudia la immobilitat d'un cos submergit en un líquid. D'acord amb l'«element bàsic» —un líquid immòbil forma una esfera de centre el de la Terra—, considera dues piràmides iguals amb el vèrtex en aquest centre: l'una conté el sòlid que s'hi submergeix i l'altra solament el líquid amb un volum semblant disposat, com la part submergida del sòlid. L'objectiu és mantenir la immobilitat del líquid. Per resoldre-ho, Arquimedes procedeix per reducció a l'absurd: si no es compleix el que afirma, el líquid es mou.

CF consta de dos llibres. La seva estructura és deductiva i treballa a partir de dos postulats establerts en el llibre I.

2.2.9a_1 Descripció de CFI

El llibre I conté dos postulats —l'un a l'inici i l'altre abans de CFI 8— i nou proposicions. En concret, són:

CFI, postulat 1. En els líquids, la part menys pressionada es veu empesa per la més pressionada i cada una és pressionada verticalment pel líquid que es troba damunt seu.[362]

360. HEIBERG (1889).
361. Paràgraf B.9 (pàgines 487-512).
362. Aquest postulat suscita certes dificultats. DIJKSTERHUIS (1987), p. 377-379.

CFI, postulat 2. Els cossos submergits en el líquid són empesos cap amunt en la direcció de la vertical que els passa pel centre de gravetat.[363]

Les proposicions CFI 1 i CFI 2 demostren que: «La superfície de qualsevol líquid immòbil té la forma d'una esfera i el seu centre és el de la Terra.»

Les tres següents —CFI 3, 4 i 5— analitzen les condicions d'estabilitat estàtica en funció del pes específic.

Les proposicions CFI 6 i CFI 7 estableixen el principi d'Arquimedes quan el pes específic del sòlid és més petit o més gran que el del líquid.

Les dues darreres proposicions —CFI 8 i CFI 9— analitzen l'estat d'equilibri d'un casquet d'esfera de pes específic inferior al del líquid i recorren al segon postulat.

2.2.9a_2 Descripció de CFII

Per nosaltres, és un dels llibres més complexos del siracusà. A més, a diferència del primer, dona per fet que la superfície del líquid és plana.

Obre aquest treball la demostració de l'«element» següent: «La raó entre un sòlid de densitat inferior a la del líquid [on se submergeix] i el líquid que desallotja és la que hi ha entre el volum de la part submergida i el del sòlid sencer.»

La resta de les proposicions —deu en total— s'ocupen solament de l'estàtica d'un segment de paraboloide de revolució més lleuger que el líquid. L'anàlisi es fa considerant casos particulars d'acord amb la relació entre l'eix i el paràmetre. En síntesi, si e i p són l'eix i el paràmetre del segment de paraboloide i $\rho = \frac{\text{pes del cos}}{\text{pes del mateix volum de líquid}}$ —que és < 1—, tenim:

363. Aquí pressuposa que el cos és més lleuger que el líquid.

CFII 2 i CFII 3. Si $e \leq \frac{3}{4}\,p$, la posició estable s'aconsegueix quan l'eix és vertical, tant si la base no toca el líquid com si hi està a dins del tot.

CFII 4 i CFII 5. Si $e > \frac{3}{4}\,p$ perquè hi pugui haver estabilitat quan l'eix és vertical, cal que $\rho \geq \frac{(e-\frac{3}{4}\,p)^2}{e^2}$ i que la superfície corbada miri cap avall. Però $\rho \leq \frac{e^2-(e-\frac{3}{4}\,p)^2}{e^2}$ i la superfície mira cap amunt, tant si la base no toca el líquid com si hi està a dins del tot.

CFII 6 i CFII 7. Si $e > \frac{3}{4}\,p$, $\frac{e}{\frac{1}{2}\,p} \leq \frac{15}{4}$ i el sòlid està col·locat de manera que un punt de la base toca la superfície, no s'equilibra, tant si és còncau cap amunt com si ho és cap avall.

CFII 8 i CFII 9. Si $e > \frac{3}{4}\,p$ i $\frac{e}{\frac{1}{2}\,p} \leq \frac{15}{4}$ i $\rho < \frac{(c-\frac{3}{4}\,p)^2}{e^2}$ quan el sòlid està corbat cap avall i $\rho < \frac{(c-\frac{3}{4}\,p)^2}{e^2}\rho > \frac{c^2-(c-\frac{3}{4}\,p)^2}{e^2}$ quan ho està cap amunt, l'equilibri no es dona pel fet que l'eix sigui vertical, sinó perquè la seva inclinació sobre el líquid forma un cert angle.

La construcció de CFII 8 equival a la resolució de l'equació trigonomètrica en θ,

$$\tfrac{1}{2}\,p\cot^2\theta = \tfrac{2}{3}\,(e-f) - \tfrac{1}{2}\,p,$$

en què f és l'eix del segment de paràbola determinat per la superfície del líquid.

CFII 10. Aquí Arquimedes investiga la possibilitat d'aconseguir l'estabilitat quan la base del sòlid es troba per damunt de la del líquid en els casos en els quals $\frac{e}{\frac{1}{2}\,p} > \frac{15}{4}$ i ρ té a veure amb cinc parelles de raons.

Solament en el cas que ρ no sigui més petit que $\frac{(c-\frac{3}{4}\,p)^2}{e^2}$ l'equilibri s'aconsegueix si l'eix és vertical.[364]

364. És una proposició llarga, complexa i pesada. Per a una síntesi dels continguts, HEATH (1921), vol. II, p. 92-97.

L'obra no introdueix el pes específic (o densitat) d'una manera explícita. Però, tanmateix, ho fa de manera implícita en els enunciats de la proposició tercera —*τὰ ἰσοβαρέοντα τῷ ὑγρῷ*, [el cos sòlid] pesa el mateix que el líquid—, la quarta, la cinquena, la sisena, la vuitena i la novena —*ὅ κα κουφότερον ῇ τοῦ ὑγροῦ*, [el cos sòlid] és més lleuger que el líquid— i, finalment, la setena —*τὰ βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ*, [els cossos sòlids] són més pesants que el líquid.

L'objectiu d'aquestes expressions és poder comparar els pesos del sòlid i el líquid.[365]

En els textos que oferim a continuació recollim tots els postulats, totes les proposicions del llibre primer i les proposicions 1, 2 i 9 del segon.[366]

No podem oblidar que, com que aquest treball va restar en l'oblit fins al Renaixement, quan va ser conegut i divulgat a través de la impremta, va suscitar molta curiositat, va fer que s'aprofundís en el tema i va donar lloc a la «paradoxa de la hidrostàtica» de Stevin[367] i als treballs de Pascal,[368] per citar els resultats més pioners de l'època a Europa.

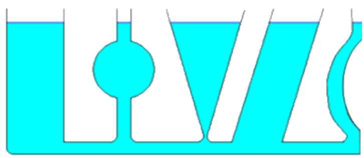


FIGURA 2.27. Paradoxa de Stevin

365. FRAJESE (1974), p. 519.

366. Vegeu la nota 361 (pàgina 125).

367. La paradoxa hidrostàtica és un experiment científic que va ser formulat per Stevin i que estableix que la pressió exercida per un líquid augmenta amb la profunditat i no pas amb la quantitat.

Els factors que determinen la pressió hidrostàtica que exerceix un líquid són la gravetat (g), la densitat (d) i la profunditat (h). Però la quantitat de líquid d'un recipient no condiciona la pressió que exerceix, com es creia abans. Precisament, això és el que produeix la paradoxa «aparent», una simple conseqüència del fet que la pressió d'un líquid (és a dir, la que exerceix) és més gran quan més augmenta la profunditat però no la quantitat.

Principi de Stevin. Stevin va arribar a la conclusió que la pressió descendent d'un líquid sobre un cos és independent de la forma del recipient que els conté i només està supeditada a l'altura i la base.

368. El principi de Pascal és un dels principis fonamentals de la hidros-

2.2.10 Me: *Mètode*

Com ja hem dit abans en la pàgina 29, l'any 1906 Heiberg va mostrar, en una biblioteca de Constantinoble, un palimpsest que, un cop analitzat, es va veure que contenia algunes de les monografies d'Arquimedes, en particular, una carta adreçada a Eratòstenes, en la qual l'il·lustre siracusà exposa al seu amic alexandrí el mètode mecànic preliminar per a determinar les relacions d'àrees i de volums. Un cop trobades aquestes relacions, però, haurà de demostrar-les rigorosament.[369]

Ja hem tingut ocasió de veure, tant en Dinostrat com en Euclides i Arquimedes,[370] que, en la mentalitat grega, els resultats relatius a àrees i volums s'enuncien en termes de la teoria de la proporció, i que, un cop intuïda la raó, se'n demostra la validesa per doble reducció a l'absurd.

2.2.10*a* L'anàlisi dels continguts de Me

En aquesta monografia, Arquimedes recorda deu resultats establerts en les seves monografies. Esdevé, de fet, un tercer moment o procediment en el desenvolupament de la seva obra. El primer moment el trobem en l'ús de l'estàtica o de l'equilibri d'una balança en la monografia QP. El segon, en els resultats

tàtica. Afirma que «la pressió exercida en qualsevol punt d'un líquid, que omple totalment l'espai que el limita, es transmet integralment en totes direccions». Vegeu GEC (1965), entrada «principi de Pascal».

369. Hi ha moltes traduccions del *Mètode*. Vegeu, entre d'altres: en anglès, Heath (1913); en francès, Mugler (1971*b*), p. 76-127; en italià, Frajese (1974), p. 555-621; en castellà, Babini (1948), González Urbaneja i Vaqué (1993) i Ortiz-García (2009), p. 272-315, i en català, l'excel·lent González Urbaneja i Vaqué (1997), p. 137-199, que va precedida d'una introducció molt acurada.

370. Reviseu el teorema de Dinostrat, a Pla (2016*b*), p. 328-330; el llibre XII dels *Elements* d'Euclides, a Pla (2016*b*), § 1.4 i § A.4, p. 55-63 i 486-540, respectivament, i, per exemple, la quadratura de la paràbola d'Arquimedes, parcialment, a B.2c_6 (pàgines 239-248) i, completa, a Masià (2016), p. 169-179.

concrets i ben establerts de les diverses monografies. En aquest tercer, però, presenta un «mètode» com a «eina heurística» per a determinar les relacions entre àrees, volums i centres de gravetat dels cossos.

I no s'atura aquí. Encara va més lluny. En la monografia QP estableix que un segment de paràbola és «quadrable». I això provoca una pregunta «per generalització» que cal plantejar-se: hi ha sòlids cubicables? El mateix Arquimedes proposa dos sòlids corbats—l'ungla i la volta cilíndriques— que són equivalents a cubs.[371]

Aquesta metodologia heurística la comunica al seu amic perquè creu que serà útil als matemàtics i els servirà per a enunciar teoremes que ell encara no ha trobat.[372] Heró, en la *Mètrica*,[373] i la *Suïda* es refereixen a una carta entre tots dos sobre aquest mètode. I Teodosi de Tripoli fins i tot en redacta un comentari.[374] Però no se'n va tenir cap evidència real fins que la van trobar, el 1906. Sembla, tanmateix, que el text que ens ha arribat és posterior a l'original, ja que no està escrit en dòric, conté termes grecs establerts per Apol·loni, com ara *paràbola* i *eixos*, i té llacunes.[375]

Malgrat tot això, el text no perd ni un gram d'importància. Conté una introducció molt notable en la qual defineix l'*ungla cilíndrica* i exposa el *mètode*, i deu resultats que Arquimedes havia demostrat amb el rigor geomètric requerit per la ciència grega. A més, usant el mètode descrit, estableix quinze proposicions fonamentades en onze lemes que són la base conceptual del *Mètode* i que se centren en la balança i les lleis de l'equilibri. Algunes ja les havia enunciat i demostrat en altres monografies, fonamentalment en *Sobre l'equilibri de les figures planes*.

371. B.10d_1 i B.10f (pàgines 532-535, i 541-544).
372. B.10 a_1 (pàgina 513).
373. Usa el terme ἐφοδικῷ. Heró (1903), p. 80, 84 i 130.
374. González Urbaneja i Vaqué (1997), p. 90.
375. González Urbaneja i Vaqué (1997), p. 97.

Un cop explicat el mecanisme del mètode, planteja les proposicions, algunes de les quals són: l'àrea del segment parabòlic (Me 1), els volums de l'esfera (Me 2), l'el·lipsoide (Me 3), el paraboloide (Me 4), el casquet esfèric (Me 7) i els segments d'hiperboloide (Me 11) i d'el·lipsoide (Me 8).[376] Hi trobem també, en la línia dels llibres sobre els equilibris dels plans, la determinació del centre de gravetat del segment de paraboloide (Me 5), de la semiesfera (Me 6) i del casquet esfèric (Me 9), i els de l'el·lipsoide (Me 10) i l'hiperboloide (Me 11).[377] El text s'acaba amb la cubicatura de l'ungla i de la cúpula cilíndriques. En el tancament de la monografia proporciona la determinació del centre de gravetat i del volum del primer sòlid, amb mètodes atomistes (Me 12 i Me 13), de les quals també ofereix l'alternativa no atomista (Me 14). I, seguint la dualitat de QP, en dona la demostració geomètrica (Me 15). I la cubicatura, atomista, de la segona (Me 16) clou la monografia. Són textos d'una gran originalitat que palesen l'enorme imaginació del siracusà.

Indiquem, per acabar aquesta presentació succinta, que, en les proposicions que van de la 1 a la 13 i en la 16, Arquimedes recorre a l'aplicació de l'equilibri usant la «descomposició atòmica» de la figura ja sigui una superfície o un sòlid. En canvi, a la 15[378] solament usa indivisibles i recorre a una suma infinita.[379]

En l'arreplega de textos, nosaltres, seguint la tònica de la nostra exposició, basada en la paràbola i el paraboloide (pàgina 105), oferim les proposicions Me 1 i Me 4. Però, també, la Me 2, que determina el lligam entre el con, el cilindre i l'esfera, i la Me 5, que troba el centre de gravetat del paraboloide. I, natural-

376. Les demostracions geomètriques a QP 24, ECI 36, CE 27, 21, ECII 2, CE 25, 29 i 31, respectivament. Nosaltres només donem les de QP 24 (B.2d_7, pàgines 248-248 i CE 21 (B.6d_5, pàgines 440-443). Les altres, a (Masià (2010), 142-143 i 171-174, o a Masià (2016), 103-109, 93-98, 111-118, i 121-125).

377. Això pot suggerir que ja els havia establert en monografies sobre estàtica actualment perdudes.

378. B.10g (pàgines 544-548).

379. A CE 1 havia establert la suma finita (pàgines 427-429).

ment, les cinc darreres: Me 12 i Me 13, per la seva gran originalitat, amb la determinació atòmica de la cubicatura de l'ungla cilíndrica i l'alternativa, Me 14, i, per fi, Me 15, amb la demostració geomètrica, i Me 16, que correspon a la cúpula cilíndrica.

2.2.10*b* Descripció del mètode d'Arquimedes

El centre de gravetat d'una figura és el punt en el qual la podem acumular tota. De fet, operem així: considerem la figura feta de segments rectilinis o de superfícies planes i suposem que «tots» en pengen. Aquesta és la «idea» que fonamenta el mètode que proposa Arquimedes.

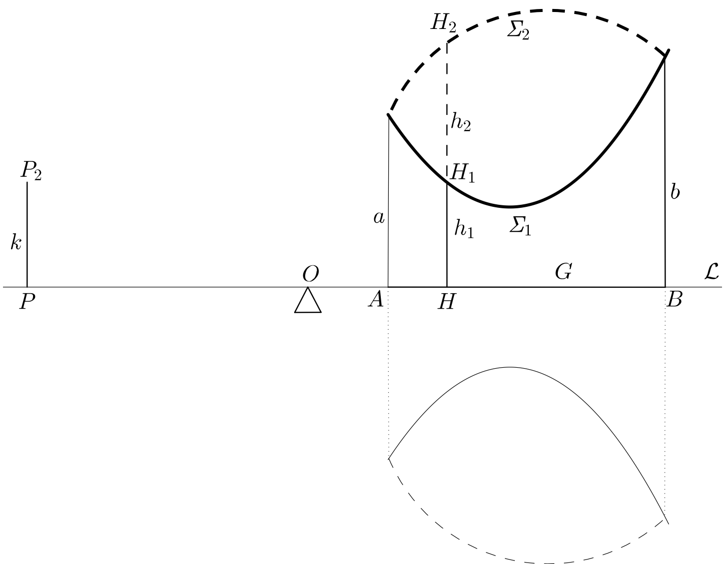


FIGURA 2.28. Explicació del mètode d'Arquimedes

Suposem, ara, que Σ_1 i Σ_2 són dues regions convexes amb un mateix diàmetre AB que es troba en el segment $\mathcal{L}$,[380] i que

380. Aquestes regions són superfícies o sòlids de revolució. Aleshores, h és un segment rectilini de Σ_2 o una secció del sòlid que veiem només pel tall que oferim i, per tant, una superfície. En general, és un cercle. No cal que siguin simètriques respecte del segment $\mathcal{L}$ però sí que el centre de gravetat G d'una d'elles, per exemple Σ_2, s'ha de trobar en el segment $\mathcal{L}$.

de la regió Σ_1 en coneixem la mesura $\mu(\Sigma_2)$ i el centre de gravetat G.

Volem determinar la mesura Σ_1.[381] I ens posem a fer-ho pesant els «àtoms» de Σ_1 amb els de Σ_2, del qual, com hem dit, coneixem la mesura i el centre de gravetat G. Per tant, els podem considerar acumulats en el punt G.

Ara hem d'acumular els «àtoms» de Σ_1 en un punt P de $\mathcal{L}$, de manera que, amb fulcre en un punt O de $\mathcal{L}$, s'equilibrin. És a dir, hem de satisfer la igualtat:

$$h_1 \times OP = h_2 \times HO, \tag{2.10}$$

en què OP és fix i l'«abscissa» HO varia amb cada «ordenada» h_2.[382] Tots junts proporcionen, doncs, la igualtat:

$$OP \times \mu(\Sigma_1) = \sum (h_2 \times HO) := OG \times \mu(\Sigma_2). \tag{2.11}$$

Quin és, per tant, el punt clau del mètode heurístic arquimedià?

És el següent: donada la figura Σ_1, de la qual volem buscar la mesura, n'hem de trobar una altra de la mateixa naturalesa i diàmetre, Σ_2, de la qual coneguem el centre de gravetat G, de manera que, per a cada abscissa AH, les ordenades corresponents h_1 i h_2 compleixin la proporció següent:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{HO}{OP}, \tag{2.12}$$

en què OP és una distància fixa.[383]

Resulta evident que, per a aconseguir-ho, hem de tenir un coneixement geomètric molt acurat d'això que tractem.[384]

381. Com veurem tot seguit, si coneixem $\mu(\Sigma_1)$ i $\mu(\Sigma_2)$, el mètode ens permet determinar el punt G.

382. Usem els termes *abscissa* i *ordenada* per a clarificar l'exposició.

383. Frajese (1974), p. 562-563.

384. Vegeu, per exemple, les demostracions Me 12 i Me 13, i la demostració alternativa de Me 14.

2.2.10c Aplicacions del mètode d'Arquimedes

Vegem, ara, algunes aplicacions del mètode que acabem de descriure. De fet, mirarem d'establir, en cada cas, la igualtat 2.10 o la proporció 2.12. I això dependrà de les característiques geomètriques de cada figura plana o sòlida.

2.2.10c_1 El mètode i la quadratura de la paràbola

Me 1. Tot segment parabòlic $\smile\!\!\!/\, ABC$ equival a quatre terceres parts del triangle parabòlic $\triangle\, ABC$.

Sigui $\smile\!\!\!/\, ABC$ un segment de paràbola. Tirem la tangent CEF. Aleshores, $DB = BE$, un resultat que, en QP 2, Arquimedes atribueix a l'obra *Còniques* d'Euclides. Pel punt A, tirem AF paral·lel a ED [EI 31]. Talla CB per K [P 5]. I, per tant, $AK = FK$ [EVI 4].

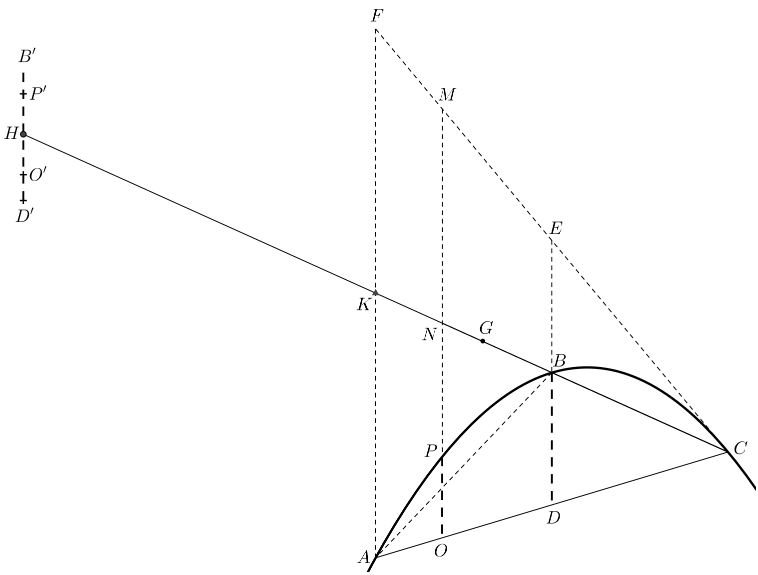


FIGURA 2.29. El mètode d'Arquimedes aplicat a la paràbola

A continuació, podem recórrer a QP 5 (pàgina 229), en què establim que:

$$\frac{MO}{OP} \underset{\text{QP}\,5}{=} \frac{CA}{OA} \underset{\text{EVI}\,2}{=} \frac{CK}{KN} \underset{\text{EV}\,7}{=} \frac{HK}{KN}, \text{ amb } HK = CK.$$

En aquest cas, disposem, doncs, de la relació 1.12 entre els «àtoms» del triangle $\triangle CFA$, ben determinat pel segment parabòlic, i els del segment parabòlic $\smile ABC$, i d'una distància fixa HK, ja que HK és igual al segment CK que està determinat pels dos objectes geomètrics descrits. Després, suposem que pengem els «àtoms» de la paràbola pel punt H, paral·lels al segment DB. Són els segments $B'D'$, $E'O'$, etc., corresponents a BD, EO, etc.

Coneixem el centre de gravetat del triangle [EPI 14]. Es troba en el punt G del segment CK, a dues terceres parts del punt C, és a dir, $CG = \frac{2}{3}CK$ i $KG = \frac{1}{3}CK$. I, de tot això, en resulta

$$\frac{\mathfrak{a}(\triangle AFC)}{\mathfrak{a}(\smile ABC)} = \frac{HK}{KG} = \frac{3}{1}.$$

A més, sabem que $\mathfrak{a}(\triangle AFC) = 4\,\mathfrak{a}(\triangle ABC)$ [EVI 19]. I, en definitiva, s'esdevé que el segment de paràbola equival a quatre terceres parts del triangle parabòlic.

2.2.10c_2 El mètode i l'esfera, el con i el cilindre

Me 2. Tota esfera equival a quatre vegades el con de base equivalent al seu cercle màxim i altura el radi. I el cilindre amb la mateixa base i la mateixa altura que el diàmetre de l'esfera equival a una vegada i mitja aquesta esfera.[385]

Considerem una secció seva i la comparem amb el con i el cilindre.

En cada abscissa, tenim tres ordenades

$$h_1 := SR, h_2 := SP \text{ i } h_3 := SN.$$

Constatem que:

$$AC \times AS \underset{\text{EVI 13}}{=} AP^2 \underset{\text{EI 47}}{=} SP^2 + SA^2 = SP^2 + SR^2.$$

385. Aquest és el resultat que tant plaïa a Arquimedes i que es va fer gravar a la tomba (pàgina 14).

I, de retruc,

$$\frac{SP^2 + SR^2}{SN^2} = \frac{AC \times AS}{AC^2} = \frac{AS}{AC}.^{[386]}$$

Per tant, $(SP^2 + SR^2) \times AC = SN^2 \times AS$.[387]

Els «àtoms» del cilindre, col·locats al seu lloc, s'equilibren amb els del con i l'esfera, col·locats en el punt H, amb $AN = AC$. En conseqüència, els volums $\mathcal{V}_{\text{con}}$ i $\mathcal{V}_{\text{esfera}}$ junts equilibren el volum $\mathcal{V}_{\text{cilindre}}$ col·locat en el centre de gravetat O. O sigui que $\mathcal{V}_{\text{esfera}} + \mathcal{V}_{\text{con}} = \frac{1}{2}\,\mathcal{V}_{\text{cilindre}}$. Ara bé, $\mathcal{V}_{\text{con}} = \frac{1}{3}\,\mathcal{V}_{\text{cilindre}}$ [EXII 10]. I el resultat queda establert.

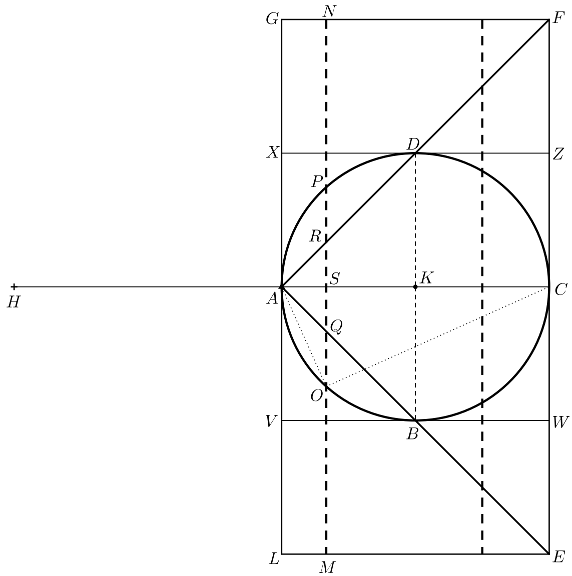


FIGURA 2.30. El mètode aplicat a l'esfera

2.2.10c_3 El mètode i l'el·lipsoide de revolució

Me 3. Un el·lipsoide de revolució equival a dues terceres parts el cilindre de base el seu cercle màxim i altura l'eix.

Tot consisteix a establir que:

$$HA \times (\bigcirc\, OP + \bigcirc\, QR) = AS \times \bigcirc\, MN.^{[388]}$$

386. Atès que $SN = AC$, tenim que $SN^2 = AC^2$ (PLA (2018), ítem f_1 del problema 52, p. 67) i apliquem EV 7.

387. Aquí empra una generalització d'EVI 16 que no ha establert.

388. Figura 2.30, substituint el cercle per una el·lipse. Els detalls els podeu veure en el problema 56 (pàgina 176).

2.2.10c_4 El mètode i el segment de paraboloide

Me 4. Un segment parabòlic rectangle tallat per un pla perpendicular a l'eix equival a una vegada i mitja el con que té la base i l'altura del segment.[389]

Per a aconseguir l'objectiu, Arquimedes usa la relació que caracteritza la paràbola sense demostrar-la:[390] $\frac{BD^2}{OS^2} = \frac{DA}{AS}$.

Després, com en els dos casos anteriors, recorre a Exii 2 i a la cadena d'igualtats

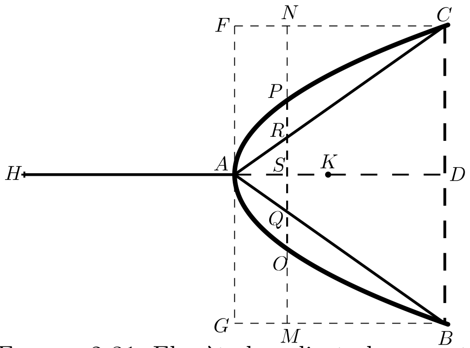


Figura 2.31. El mètode aplicat al segment parabòlic

$$\frac{\bigcirc MN}{\bigcirc OP} = \frac{MN^2}{OP^2} = \frac{MS^2}{OS^2} = \frac{BD^2}{OS^2} = \frac{DA}{AS} = \frac{HA}{AS}.$$

Per tant, $AS \times \bigcirc MN = HA \times \bigcirc OP$.

I, finalment, aplica els lemes 7 i 8 i Exii 10.

▶ **Exercici 69**. Repasseu la informació anterior i acabeu la demostració. ◀

2.2.10c_5 El mètode i el centre de gravetat del segment de paraboloide [de revolució]

Me 5. El centre de gravetat d'un segment de paraboloide es troba en l'eix i el divideix de manera que la seva distància al vèrtex és la meitat de la seva distància a la base.[391]

389. Arquimedes usa l'expressió τεταγμένως κατηγμέναι —'tirades de manera ordenada'— per a referir-se als segments OS i BD.

390. Vegeu QP 3. La prova s'hauria establert, potser, en els textos d'Euclides o d'Aristeu el Vell dedicats a les còniques. En trobem una demostració a Pla (en premsa *b*), Ci 20, p. 152-153.

391. Aquest resultat és esmentat a CF però no el trobem demostrat en cap de les monografies que ens han arribat. Això fa que puguem suposar que formava part d'un treball perdut.

En aquest cas, com en l'anterior, Arquimedes suposa que el segment de paraboloide i el con es componen de cercles. El primer s'ha col·locat en l'extrem H de la balança, que n'és el centre de gravetat, i el con, del qual coneix el centre de gravetat, s'ha deixat en el seu lloc (figura 2.31 sense el cilindre).

La relació relativa a cada cercle és: $HA \times QR = AS \times OP$.

2.2.10c_6 El mètode i la cubicatura de l'ungla i la de la volta cilíndriques

En les proposicions Me 12 i Me 13, Arquimedes estableix la «cubicatura» de l'ungla cilíndrica usant el mètode mecànic.[392] N'ofereix una d'alternativa a Me 14 i, a Me 16, proporciona la demostració geomètrica. A Me 15 trobem la «cubicatura» també mecànica de la volta cilíndrica.

*   *   *

Un cop presentada l'obra del siracusà, no ens pot estranyar gens que Florian Cajori l'anomenés el *Newton de l'antiguitat*.[393]

2.3 Les monografies atribuïdes a Arquimedes

Tanquem l'anàlisi de l'obra d'Arquimedes fent la de les monografies d'autoria dubtosa.

És interessant veure el text B.10c_4 (pàgines 528-531) i analitzar-lo detingudament.

392. B.10d (pàgines 532-535).

393. Cajori (1893), edició de 1985, p. 38.

2.3.1 Lm: *El llibre dels lemes*

D'aquesta monografia,[394] en coneixem una versió àrab traduïda per Tābit ibn Qurra.[395] Conté quinze proposicions, molt elegants, de valor propedèutic. En la introducció de la traducció àrab, que li atribueix l'obra, hi llegim:

> Les proposicions són d'una gran utilitat per als principis de la geometria [. . .]. Els professors d'aquesta ciència els usen com a «elements» intermedis entre els *Elements* i l'*Almagest*.

2.3.1*a* Una nota sobre els lemes

L'obra ofereix problemes relatius als triangles, rectangles i quadrilàters [Lm 5 i 6, 2 i 12]. També alguns a l'*arbeló* (*ἄρβηλος*) —el ganivet de sabater— i un al *saler* (*σάλινον*). Aquestes dues figures fan possible «mesurar el cercle» però, naturalment, no permeten quadrar-lo.[396] Són equivalents a cercles ben determinats però no quadrables. Pappos analitza l'arbeló en la *Sintaxi*, llibre IV 14 i següents i llibre IV 208 i següents, i ho fa amb un tractament molt semblant al que trobem en *El llibre dels lemes*, és a dir, inspirant-s'hi.[397]

2.3.1a_1 Descripció d'alguns lemes

Recollim només els lemes 1, 4, 5, 6, 8, 12 i 14 a B.11 (pàgines 549-558). En concret, Lm 8 presenta una qüestió a la qual també fa esment Pappos: la trisecció de l'angle.[398]

394. HEIBERG (1880-1881), vol. II, p. 422-489; HEATH (1894), p. 301-318; DIJKSTERHUIS (1987), edició de 1987, p. 401-405; EECKE (1960), vol. II, p. 521-542; MUGLER (1971*b*), edició de 2002, p. 129-164; FRAJESE (1974), p. 615-621; ORTIZ-GARCÍA (2009), p. 321-342.

395. Normalment se'l coneix com a *Liber assumptorum*. La traducció al llatí és d'Abraham Ecchellensis († 1664) i l'editat Giovanni Borelli.

396. Es tracta de superfícies anàlogues a les introduïdes per Hipòcrates de Quios, si bé ell només volia mostrar que n'hi havia tres de quadrables. PLA (2016*b*), p. 244-249.

397. TROPFKE (1936).

398. La resta dels lemes l'oferim en el problema 41 (pàgines 168-169).

Lm 1. Considerem dos cercles tangents $\bigcirc AEB$ i $\bigcirc CED$. Suposem que els seus diàmetres CD i AB són paral·lels.[399] Unim els extrems dels diàmetres d'un mateix costat B i D amb el punt de contacte E i obtenim DE i BD. El segment BE és rectilini.[400]

▶ **Exercici 70**. Demostreu Lm 1. [*Indicació.* Mireu els angles que formen els segments DE i BD amb els diàmetres.] ◀

Lm 4.[401] Considerem un semicercle $\frown ABC$ (figura Lema 4, pàgina 551). Dividim el diàmetre AC pel punt D en dues parts AD i DC i en cada una tirem un semicercle $\frown CD$ i $\frown DA$ [interiors al semicercle $\frown ABC$]. Aixequem la perpendicular DB.

Obtenim, així, l'*arbeló* —la superfície plana limitada pels tres arcs de circumferència, que equival al cercle de diàmetre el segment DB.

Exercici 71. Demostreu Lm 4. Feu-ho:

a) Usant Evi 13, Evi 17 i Eii 4.

b) Amb geometria analítica. ◀

Lm 5.[402] A la figura anterior hi afegim dos cercles dins, un a cada banda del segment DB, que són tangents a aquest, al semicercle gran i al semicercle petit alhora. Aquests dos cercles són iguals.

▶ **Exercici 72**. Demostreu Lm 5. ◀

Lm 6. A la figura Lm 4 (pàgina 551) hi afegim un cercle dins, que és tangent als tres semicercles.[403] Si la raó entre els segments AD i DC és coneguda, podem determinar la raó del diàmetre del cercle inscrit i el diàmetre AC.

▶ **Exercici 73**. Demostreu Lm 6. [*Indicació.* Seguint la resolució d'Arquimedes, suposeu que $AC = \frac{3}{2} CB$. Obtindreu que el diàmetre del

399. De fet, es tracta dels diàmetres perpendiculars al segment que uneix el punt de tangència i els centres dels cercles.

400. Figura Lema 1 (pàgina 549).

401. Figura Lema 4 (pàgina 551).

402. Figura Lema 5 (pàgina 552).

403. Figura Lema 6 (pàgina 553).

cercle inscrit és $\frac{6}{19}AB$. Sabríeu resoldre'l en el cas general en el qual $AC = \frac{m}{n}CB$, amb $m, n \in \mathbb{N}$ i $(m, n) = 1$?] ◀

Lm 8. Aquest lema proporciona un mètode per a trisecar l'angle.[404]

▶ **Exercici 74**. Demostreu Lm 8 (pàgines 554-557). Sigui AB una corda d'un cercle. La prolonguem un segment BC igual al radi. Unim el punt C amb el centre D. El prolonguem fins a E. L'arc $\widehat{AE}$ equival a tres arcs $\widehat{BF}$ (figura B.11, pàgina 555).[405]

Useu aquest lema per a trisecar l'angle agut $\widehat{ABC}$. ◀

Lm 12. Suposem que AB és el diàmetre d'un semicercle. Des d'un punt T [de fora del cercle] tirem les tangents TP i TQ. Considerem que els segments AQ i BP es tallen pel punt R. Aleshores, la prolongació del segment TR és perpendicular a AB.

▶ **Exercici 75**. *a*) Els segments AQ i BP —o les seves prolongacions— es tallen necessàriament?

b) Demostreu Lm 12. ◀

Lm 14.[406] Arquimedes, que vol trobar l'àrea del saler, el descriu de la manera següent: considerem els punts C i D d'un segment AB de manera que AC i BD siguin iguals. Considerem els semicercles $\frown AGB$, $\frown AC$ i $\frown BD$ al mateix costat del diàmetre AB i el $\frown CFD$ a l'altra banda. La perpendicular a AB pel punt mitjà del segment AB talla els semicercles $\frown AGB$ i $\frown CFD$ pels punts G i F.

L'àrea del saler equival a la del cercle de diàmetre GF.

▶ **Exercici 76**. Demostreu Lm 14. ◀

2.3.1*b* Alguns problemes que no es troben en *El llibre dels lemes*

En aquest text es podrien haver inclòs també tres problemes que els matemàtics àrabs atribueixen al geòmetra de Siracusa:

404. Figura Lema 8 (pàgina 555).
405. No es pot fer amb regle i compàs.
406. Figura Lema 14 (pàgina 557).

2.3.1 b_1 La fórmula d'Heró

Aquesta fórmula, que rep el nom de l'il·lustre geòmetra i enginyer d'Alexandria, permet determinar l'àrea d'un triangle del qual es coneixen les longituds dels costats.[407]

En concret, si a, b i c són les longituds dels costats d'un triangle arbitrari, l'àrea $\mathcal{S}$ ve donada per l'expressió:

$$\mathcal{S} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

en què p és el semiperímetre, és a dir, $p = \frac{1}{2}\,(a+b+c)$.

2.3.1 b_2 El problema de la corda trencada

Aquest problema, amb independència de si Arquimedes ho sabia o no, és l'expressió geomètrica de la fórmula trigonomètrica que proporciona $\sin(\alpha - \beta)$.

Sigui AC una corda trencada d'un cercle, és a dir, AB i BC són dues cordes desiguals que tenen en comú l'extrem B. Sigui M el punt mitjà de l'arc $\widehat{ABC}$ i F el peu de la perpendicular per M a la corda llarga. Resulta que F és el punt mitjà de la corda trencada. És a dir, FBA —o sigui FB i BA junts— i FC tenen la mateixa llargada.[408]

2.3.1 b_3 La construcció de l'heptàgon regular

D'acord amb la tradició àrab, Arquimedes també va proporcionar un camí per a dibuixar l'heptàgon regular.[409] És una afirmació d'ibn-Qurra en el text que inclou la informació relativa a *El llibre dels lemes*.[410]

407. El matemàtic àrab al-Birūni l'atribueix a Arquimedes. Suter (1910-1911), p. 39. La primera demostració la trobem, però, en la *Mètrica* (*Μετρικά*) d'Heró. Heró (2014), llibre I, capítol 4, p. 18-24. Vegeu el problema 51 (pàgina 172).

408. Problema 52 (pàgina 174).

409. Problema 54 (pàgina 174).

410. A Tropfke (1936), p. 636, es diu que al-Birūni va confegir una construcció de l'enneàgon regular. Per a una informació més àmplia, Hogendijk (1984).

2.3.2 Pb: *El problema dels bous*

Vegem, ara, un breu text aritmètic, curiós i atípic en l'obra d'Arquimedes, adreçat al seu amic Eratòstenes, bibliotecari de la biblioteca d'Alexandria.[411] Mena a una equació de Pell.

El problema va ser trobat per Gotthold Ephraim Lessing, l'any 1773, quan era bibliotecari a Wolfenbüttel, localitat situada al nord d'Alemanya, on es guardaven diversos manuscrits grecs i llatins molt valuosos. En descobrir-lo, aquest escriptor va incloure'l, a través d'un poema de 44 versos, en un llibre de traduccions de clàssics grecs.[412]

L'any 1831, el pare J. Struve i el seu fill K. L. van atribuir un origen homèric a aquest problema basant-se en un passatge concret de l'*Odissea* (B.12a_1, pàgina 559).

L'anàlisi d'aquest problema és força interessant perquè el clímax del text que el detalla es configura amb un *crescendo* que suggereix un ordre creixent de dificultat en la resolució.[413]

Suposem que indiquem les parelles de bous i vaques de cada color —blanc, negre, marró i clapejat— amb les lletres gregues majúscules i minúscules: $\langle B, \beta\rangle$, $\langle N, \nu\rangle$, $\langle M, \mu\rangle$ i $\langle \varGamma, \gamma\rangle$. Aleshores, les set condicions del problema (B.12.d [1], pàgina 566) s'expressen formalment així:[414]

411. B.12d (pàgines 566-568) i nota 1610 (pàgina 566).

412. Lessing (1773), p. 423-424. En el textB.12d (pàgina 566), hi trobem una traducció lliure en català.

413. Tannery (1881). I, més recent, en línia, <http://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Ilan.Vardi/archimedes.html>.

414. És curiós observar que en tot el problema es mantenen les fraccions unitàries, pròpies de la matemàtica egípcia. Pla (2016a), p. 52.

$$
\begin{aligned}
B &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) N + M, & \beta &= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(N+\nu),\\
N &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) C + M, & \nu &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(\mathit{\Gamma}+\gamma),\\
\mathit{\Gamma} &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) B + M, & \gamma &= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(M+\mu),\\
& & \mu &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(B+\beta).
\end{aligned}
$$

▶ **Exercici 77**. Consulteu el text B.12.d (pàgina 568) i constateu que, efectivament, es pot traduir en el llenguatge formal algebraic de la manera precedent.

Resoleu el sistema plantejat en funció d'un paràmetre k i descomponeu els coeficients numèrics d'aquest paràmetre en factors primers.

Compareu el resultat obtingut amb el que oferim a continuació. ◀

La resolució d'aquest sistema de set equacions lineals amb vuit incògnites és fàcil. Admet la solució genèrica següent:

$$
\begin{aligned}
B &= 10.366.482k &&= 2\times 3\times 7\times 53\times 4657k,\\
\beta &= 7.206.360k &&= 2^3\times 3\times 5\times 7\times 23\times 373k,\\
N &= 7.460.514k &&= 2\times 3^2\times 89\times 4657k,\\
\nu &= 4.893.246k &&= 2\times 3^2\times 17\times 15.991k,\\
M &= 4.149.387k &&= 2^2\times 5\times 79\times 4657k,\\
\mu &= 5.439.213k &&= 2^2\times 3\times 5\times 7\times 11\times 761k,\\
\mathit{\Gamma} &= 7.358.060k &&= 3^4\times 11\times 4657k,\\
\gamma &= 3.515.820k &&= 3^2\times 13\times 46.489k.
\end{aligned}
$$

Si fem $k=1$, tenim que el ramat d'Hèlios (Ἥλιος) —el Sol— té 50.389.082 caps de bestiar.[415]

La grandària d'aquests números no supera pas la dels que es necessiten en el mètode iteratiu de *De la mesura del cercle*.[416]

▶ **Exercici 78**. Constateu la validesa d'aquestes xifres:

415. La primera solució moderna la va donar Gino Loria en l'edició revisada de LORIA (1893-1985), LORIA (1914), p. 936-940. Alguns autors ho fan en un escoli al text del problema. MUGLER (1971*a*), p. 171-173 i 179-180. ORTIZ-GARCÍA (2009), p. 355-357.

416. Vegeu l'observació de la pàgina 115.

Total de bestiar blanc: 1.400.000.000 + 5.820.000 + 7.360 = 1.405.827.360.
Total de bestiar negre: 900.000.000 + 88.300.000 + 800 = 988.300.800.
Total de bestiar clapejat: 800.000.000 + 69.910.000 + 400 = 869.910.400.
Total de bestiar marró: 700.000.000 + 67.080.00 + 8.000 = 767.088.000.
Bous blancs: 829.318.560, i vaques blanques: 576.508.800.
Bous negres: 596.841.120, i vaques negres: 391.459.680.
Bous clapejats: 588.644.800, i vaques clapejades: 281.265.600.
Bous marrons: 331.950.560, i vaques marrons: 435.137.040.

La suma 829.318.560 + 596.841.120 no és un nombre quadrat.
La suma 331.950.960 + 588.644.800 no és un nombre triangular.
[*Indicació*. Consulteu Ortiz-García (2009), p. 355-357. És vuitanta vegades la solució de Wurm, Heath (1894), p. 320-327.] ◀

Si pensem que un número com aquest era massa gran per a poder ser tractat amb naturalitat amb el sistema de numeració àtic i que tot el qui intentés de resoldre'l o bé coneixia el sistema sexagesimal posicional babilònic[417] o bé era molt hàbil en l'escriptura numèrica àtica,[418] entendrem les paraules que Arquimedes adreça a Eratòstenes quan li diu: «No se't podrà pas qualificar d'ignorant o de poc hàbil.»[419]

Però Arquimedes va més lluny i hi afegeix la condició següent:[420]

$$B + N = \square,$$

que porta a imposar

$$B + N = 17.826.996k = 2^2 \times 3 \times 11 \times 29 \times 4657k = \square.$$

Per tant, podem fer $k = 3 \times 11 \times 29 \times 4657\ell^2$ i obtenir:

$$B + N = 2^2 \times 4.456.749^2\ell^2 = 79.450.446.596.004\ell^2.$$

▶ **Exercici 79**. Constateu la correcció d'aquestes afirmacions. ◀

Ara bé, el nombre $M + C$, que val

417. Pla (2016*a*), p. 138-140.
418. Nota 332 (pàgina 115).
419. Nota 1613 (pàgina 568).
420. B.12*d* [2] (pàgina 568).

$$7 \times 353 \times 4657k = 3 \times 7 \times 11 \times 29 \times 353 \times 4657^2\,\ell^2$$
$$= 51.285.802.909.803\,\ell^2,$$

no és necessàriament un nombre triangular, tal com desitja Arquimedes.[421]

▶ **Exercici 80**. Constateu la correcció d'aquestes afirmacions. ◀

Per a aconseguir-ho, cal que sigui de la forma $\frac{u(u+1)}{2}$.[422]

Fem: $u(u+1) = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 29 \times 353 \times 4657^2\ell^2$.

Aleshores, $4u(u+1) = (2u+1)^2 - 1 =$
$$= 2^3 \times 3 \times 29 \times 353 \times 4657^2\ell^2.$$[423]

Finalment, fem $v = 2u + 1$ i $w = 2 \times 4567\ell = 9314\ell$, i obtenim l'equació

$$v^2 - \lambda w^2 = 1, \text{ amb } \lambda = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 29.353 = 4.729.494,$$

que és una equació de Pell.[424]

Seguint el mètode de Lagrange, hem de desenvolupar la fracció contínua de $\sqrt{4.729.494}$ i cercar les solucions en les quals w és múltiple de 9.314.

▶ **Exercici 81**. Constateu la correcció d'aquestes afirmacions. ◀

L'any 1880, Amthor va aconseguir establir que la solució més petita d'aquesta equació de Pell és:

$$v = 109.931.986.732.829.734.979.866.232.821.433.543.901.088.049,$$
$$w = 50.549.485.234.315.033.074.477.819.735.540.408.986.340.$$

421. B.12*d* [3] (pàgina 568).
422. Pla (2016*b*), p. 128-129.
423. Recordem que hi ha infinits nombres triangulars que són quadrats. Demostrar-ho, però, comporta la resolució d'una equació de Pell.
424. Quan, a *Grècia IV*, parlarem de Teó d'Esmirna i dels nombres quadrats - diagonal, veurem una altra equació de Pell, molt més simple que aquesta. Per a una exposició succinta de l'equació de Pell, vegeu en línia <https://www.researchgate.net/publication/321955945_Pell's_Equation>.

A més, va arribar a esbrinar que la solució del problema dels bous d'Arquimedes té 206.545 dígits i comença per 776, tot i que en desconeixia la resta de xifres.[425]

L'any 1889, l'enginyer A. H. Bell i dos amics seus van formar el Hillsboro Mathematical Club, a Illinois, i van iniciar la computació de la solució. Després de treballar-hi durant quatre anys, van arribar a determinar les 32 xifres de l'esquerra i les 12 de la dreta dels 206.531 dígits del número ℓ. El valor és

$$34555906354559370506303802936617{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}252058980100.$$

Ara, per a obtenir els valors de B, N, M, Γ, i de β, ν, μ, γ, hem de fer $k = 4.456.749\ell^2$.

I, finalment, arribem a[426]

$$77602714064868182695302328332 09\overbrace{* * * * * * *}^{206.502\text{ termes}}7194550818000.$$

2.3.3 Os: *L'ostomaquió*

Aquest text d'Arquimedes[427] és, de fet, lúdic, de la mateixa manera que el tangram xinès, però més sofisticat.[428] Se'n tenia coneixement en textos doxogràfics del poeta Ausoni[429] i dels gramàtics Gai Mari Victorí (segle IV)[430] i Atili Fortunat (segle V).[431] Tots tres fan referència al *loculus archimedius*, «catorze peces d'ivori que omplen un quadrat».[432]

425. Krumbiegel i Amthor (1880). Escriure la solució completa ocuparia, amb lletra d'impremta normal, un volum de 2.000 pàgines.

426. Per a més informació, en línia <https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/>.

427. B.13 (pàgina 569); Dijksterhuis (1987), p. 408-412; Eecke (1960), vol. II, p. 467-476; Mugler (1971*b*), p. 68-75; Ortiz-García (2009), p. 249-263. Pel que fa al nom de *ostomaquió*, vegeu la pàgina 49 i, més acurat, Ortiz-García (2009), nota 3, p. 252.

428. Per a més informació, Morelli (2009).

429. *Liber XVII*: *Cento nuptialis*, a Ausoni (1843), vol. II, p. 265.

430. Victorí (1871), p. 100.

431. Fortunat (1961), p. 278-312.

432. Tots aquests textos es troben, en línia, a <http://www.archimedes-lab.org/latin_ostomachion.html>.

L'any 1899, l'orientalista Suter va publicar la traducció alemanya d'un fragment àrab, *De la divisió de la figura Ostomachion en catorze figures relacionades entre si.*[433]

En el palimpsest de Jerusalem hi havia un text grec —en molt mal estat— que feia referència a certes peces que omplien un quadrat. Oferia uns teoremes que mostren la manera de descompondre un quadrat en cinc peces commensurables amb el quadrat de dues maneres diferents.[434]

En un article, Netz, Acerbi i Wilson afirmen que aquest text està relacionat amb la combinatòria, amb el número de maneres diferents que ens permeten col·locar catorze peces en un quadrat.[435] Ho lliguen amb una anècdota que explica Plutarc relativa a la combinatòria d'Hiparc, en què aquest calcula quantes conjuncions permet fer la lògica estoica mitjançant deu assercions, amb negació (310.952) o sense (101.049).[436]

Les catorze peces es poden col·locar de 17.152 maneres diferents.[437] I també poden formar, igual que el tangram, altres figures, com un elefant, un dromedari o un soldat.[438]

► **Exercici 82**. Calculeu les àrees de les peces de l'ostomaquió (figura Os 2 i Os 3, pàgina 573) i els seus angles interns. I constateu que totes aquestes són commensurables amb la superfície del quadrat. ◄

---

433. Suter (1899), p. 491-500.

434. <http://www.logelium.de/Stomachion/StomachionHaupt.htm> i <https://www.archimedes-lab.org/latin_ostomachion.html>.

435. Netz, Acerbi i Wilson (2004).

436. Plutarc (1987), *Plutarch's Morals*, llibre viii, qüestió i. I, més recents, Stanley (1997), Habsieger, Kazarian i Lando (1998) i Acerbi (2003).

437. <http://www.logelium.de/Stomachion/StomachionSolutions.pdf> i <http://www.gamepuzzles.com/536solt.htm>, amb un grapat d'aquestes disposicions. I també <http://www.logelium.de/Stomachion/StomachionPuzzel_EN.htm>, amb les descomposicions de les peces, lligades al teorema de Pick. Per a aquesta darrera qüestió, Pla (2009), p. 277-281.

438. <https://www.college-de-france.fr/media/chercheurs/UPL5796514117593488948_Stomachion.pdf>.

2.3.4 Sp: Els semipoliedres

Donem, ara, una breu informació sobre els semipoliedres. S'entén per *semipoliedre regular* —o també *poliedre arquimedià* o *poliedre semiregular*— un poliedre convex —que no inclourà ni els sòlids platònics, ni els prismes ni els antiprismes—[439] els vèrtexs del qual són homogenis o idèntics, i les cares formades per dos o més tipus de polígons regulars. Per fer-nos-en una idea simple, considerem un tetraedre regular i escapcem tots els vèrtexs de la piràmide. Obtenim el sòlid de la figura adjunta.[440]

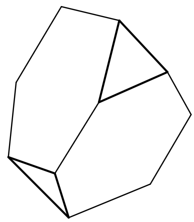


Figura 2.32. Semipoliedre

El text B 14.1 (pàgines 577-581) que s'atribueix a Arquimedes conté els únics tretze semipoliedres regulars possibles (taula 2.6, pàgina 150).[441]

▶ **Exercici 83**.

a) Constateu la validesa de les columnes tercera, quarta, cinquena i sisena de la taula anterior.

b) Proveu que tots els semipoliedres compleixen la fórmula d'Euler. [*Indicació.* Vegeu Pla (2016*b*), problema 10, p. 307.]

c) Bastiu-ho a partir dels sòlids platònics i dels poliedres semiregulars ja construïts. [*Indicació.* Vegeu la taula 2.6 (pàgina 150).]

d) Demostreu que no hi ha cap altre poliedre semiregular, és a dir, format per polígons regulars diferents que, en cada vèrtex seu, incideixin el mateix nombre de polígons regulars. ◀

439. Recordem que un *antiprisma* és un poliedre que té dues cares paral·leles iguals unides mitjançant triangles i no paral·lelograms.

440. Stevin, en el seu estudi sobre els semipoliedres, indica un camí per a obtenir-los a partir dels cinc sòlids platònics: la truncació successiva 1) *per laterum media*, 2) *per laterum tertias* i 3) *per laterum divisiones in tres partes*. Stevin (1583), llibre III, p. 46-83, i, en particular, p. 50-55. Vegeu, també, Gravelaar (1901), i Dijksterhuis (1943), p. 99.

441. B.14 (pàgines 577-583). Dijksterhuis (1987), p. 405-408; Mugler (1971*b*), p. 201-205; Ortiz-García (2009), p. 359-365. Les figures les podeu trobar, per exemple, a l'entrda «Políedre arquimedià» de la Viquipèdia.

TAULA 2.6. *Els tretze semipoliedres d'Arquimedes*[442]

Número en l'ordre de Pappos	*Nom (per la configuració)*	*Cares (per tipus)*	*Arestes*	*Vèrtexs*
1.	tetraedre truncat (3,6,6)	8 { 4 t. 4 h.	18	12
2.	cuboctaedre (3,4,3,4)	14 { 8 t. 6 q.	24	12
3.	octaedre truncat (4,6,6)	14 { 6 q. 8 h.	36	24
4.	cub truncat (3,8,8)	14 { 8 t. 6 o.	36	24
5.	petit rombi-cuboctaedre (3,4,4,4)	26 { 8 t. 18 q.	48	24
6.	cuboctaedre truncat[443] (4,6,8)	26 { 12 q. 8 h. 6 o.	42	78
7.	icosidodecaedre (3,5,3,5)	32 { 20 t. 12 p.	60	30
8.	icosaedre truncat (5,6,6)	32 { 12 p. 20 h.	90	60
9.	icosaedre truncat (3,10,10)	32 { 20 t. 12 d.	90	60
10.	cub xato[444] (3,3,3,3,4)	38 { 32 t. 6 q.	60	24
11.	petit rombico-sidodecaedre (3,4,5,4)	62 { 20 t. 30 q. 12 p.	120	60
12.	gran rombico-sidodecaedre (4,6,10)	62 { 30 q. 30 h. 12 d.	180	120
13.	dodecaedre xato[445] (3,3,3,3,5)	92 { 80 t. 12 p.	150	60

442. Les abreviatures de la taula designen decàgons (d.), hexàgons (h.), octògons (o.), pentàgons (p.), quadrats (q.) i triangles (t.).

443. També s'anomena *gran rombicuboctaedre*.

444. N'hi ha dos i són simètrics.

445. També s'anomena *icosidodecaedre xato*.

2.4 Problemes

Problema 1. Proveu que, si tirem la bisectriu d'un triangle que talla la base en dues parts diferents, els costats que formen l'angle són distints, i el costat més gran és el que correspon a la part més gran de la base i el petit a la petita.

Useu-lo per a fer una demostració directa d'Ei 19.

1. Considereu el triangle $\triangle ABC$ i la bisectriu AD. Suposeu que la part CD és més gran que la BD.

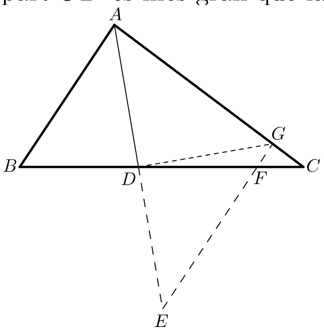


Figura 2.33. Problema 1

Comproveu que AC és més gran que AB.

a) Prolongueu AD fins a E perquè DE sigui igual a AD [P 2 i Ei 2 o Ei 3].

b) Considereu DF igual a BD [Ei 2 o Ei 3].

c) Prolongueu EF fins que talli AC pel punt G [P 2].

Proveu que:

i) AB i EF són iguals i, de retruc, totes les parts del triangle $\triangle DEF$ ho són a les del triangle $\triangle DAB$.

ii) El triangle $\triangle DAB$ ho és al $\triangle DAG$ i, de retruc, AG a EG.

iii) Per tant, AC és més gran que EF, que és igual a AB.

2. Considereu el triangle $\triangle ABC$, en el qual l'angle $\hat{A}$ és més gran que el $\hat{C}$.

a) Dimidieu BC pel punt D [Ei 10].

b) Prolongueu AD fins al punt E, de manera que AD i DE siguin iguals [P 2 i Ei 2 o Ei 3].

c) Uniu BC.

d) Tireu la bisectriu BF de l'angle $\widehat{ABE}$ fins que talli AE per F.

e) Feu la figura.

Useu la part anterior per a establir Ei 19. [*Indicació*. Vegeu Procle de Lícia (1970), edició anglesa, p. 205-209 i 318-322, i edició francesa, p. 224-228 i 272-275.]

3. Constateu que es poden justificar tots els passos.

4. Determineu quins ítems dels *Elements* hem usat a banda dels indicats.

Problema 2. Voleu veure que, donades dues magnituds incommensurables $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{C}$, podeu dividir la gran, per exemple $\mathfrak{A}'$, en dues $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, de tal manera que $\mathfrak{A}$ sigui commensurable amb $\mathfrak{C}$ i es mantingui el desequilibri.

Admeteu que, com que $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ és un pes massa gran, n'hi ha un $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{D}<\mathfrak{A}$ que equilibra la balança.[446]

Proveu que $\mathfrak{B}<\mathfrak{D}$.

Existeix $n\in\mathbb{N}$ que implica que $\frac{1}{n}\,\mathfrak{C}<\mathfrak{D}$ [DI 4].[447]

I un $m\in\mathbb{N}$ que fa que $m\,\frac{\mathfrak{C}}{n}>\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, $(m-1)\,\frac{\mathfrak{C}}{n}<\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ i $(m-1)\,\frac{\mathfrak{C}}{n}>\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{D}$ [DI 4 i el fet que tot conjunt de nombres naturals té un primer element].

Agafeu el pes $\mathfrak{A}=\frac{(m-1)}{n}\,\mathfrak{C}$. [*Indicació.* Vegeu FRAJESE (1974), p. 406-407, nota.]

Problema 3. Proveu que el punt H de la demostració d'EPI 10 és el punt d'intersecció de les dues diagonals.

Problema 4.

a) Proveu que les diagonals dels paral·lelograms $\square AH$ i $\square HD$ estan alineades.

b) Useu *a*, EPI, postulat 6, i EPI 4 per a demostrar EPI 10.

Problema 5. L'edició de Heiberg proporciona una segona demostració d'EPI 10.

Considereu el paral·lelogram $\square ABCD$ i la diagonal DB.

Establiu que:

a) Els triangles $\triangle ABD$ i $\triangle BAC$ són iguals.

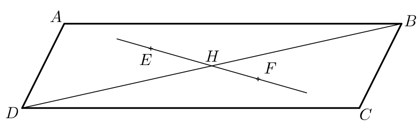


FIGURA 2.34. Problema 5

b) Els centres de gravetat també ho són si els fem coincidir.

Siguin E el centre de gravetat del triangle $\triangle ABD$ i H el punt mitjà de DB.

Prolongueu EH i agafeu HF igual a EH.

Col·loqueu el triangle $\triangle ABD$ damunt del $\triangle BDC$.

És clar que els costats AB i DC i AD i BC coincideixen.

I que els segments HE i HF i els punts E i F també ho fan.

446. Acceptem el principi de continuïtat o el teorema del valor mitjà.

447. S'hi usa el postulat d'Arquimedes però es fa segons l'estil d'Euclides perquè Arquimedes encara no l'havia enunciat.

El punt en el qual ho fan és el centre de gravetat del triangle $\triangle BDC$.

Resulta que E i F són els centres de gravetat dels triangles $\triangle ABD$ i $\triangle BDC$, respectivament.

I que el centre de gravetat del pes compost pels dos pesos és el punt mitjà del segment EF.

Per tant, H és el centre de gravetat del paral·lelogram ▱ $ABCD$. Comproveu que el raonament és correcte i indiqueu en quines proposicions i en quins postulats, tant d'EPI com dels *Elements*, es basa.

Problema 6. Proveu que:

a) EF, GK i LM són paral·lels a BC. [*Indicació.* Useu la proporció $\frac{BP}{BD} = \frac{CX}{CD}$, vàlida per construcció. Useu EV 19, porisma, les parelles de triangles semblants $\triangle CXF$ i $\triangle FTA$, i $\triangle BPE$ i $\triangle ETA$, NC 1 i EVI 1 per a deduir que els segments EF, GK i LM són paral·lels a BC.]

b) $\frac{\triangle, ADC}{\Sigma_1} = \frac{AC}{AM}$. [*Indicació.* Apliqueu EVI 19 als triangles $\triangle ADC$ i $\triangle ASM$. Sigui Σ_1 la suma dels triangles iguals a $\triangle ASM$, és a dir, $\Sigma_1 = n \triangle ASM$. Apliqueu EV 15 a la proporció que heu obtingut. Observeu que $n\, AM = AC$.]

Anàlogament, $\frac{\triangle ADC}{\Sigma_2} = \frac{AB}{AL}$, en què Σ_2 és la suma dels triangles iguals al $\triangle ALS$.

c) $\frac{\triangle ABC}{\Sigma} = \frac{BA}{AL} = \frac{AC}{AM}$, en què $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$. [*Indicació.* Useu EVI 4 i EV 12.]

d) $\frac{AC}{AM} = \frac{CD}{DZ} = \frac{VR}{RQ} < \frac{VR}{RH}$. [*Indicació.* DV 7.]

e) $\frac{\triangle ABC - \Sigma}{\Sigma} = \frac{\Sigma_0}{\Sigma} > \frac{VH}{VR}$, en què Σ_0 és la suma dels paral·lelograms.

f) $WH > VH$.

Problema 7. [EPI 13 alternatiu] Considereu un triangle $\triangle BAC$ i els punts mitjans D, E i F dels costats BC, BA i CA. [EI 10]

Unim AD. [P 1]

Volem establir que el seu centre de gravetat es troba en el segment AD.

Suposeu que el centre de gravetat no és en el segment AD.[448]

Aleshores, és un punt H[449] [que no és en el segment AD].

---

448. Hipòtesi de l'absurd.

449. Aquí, en suposem l'existència.

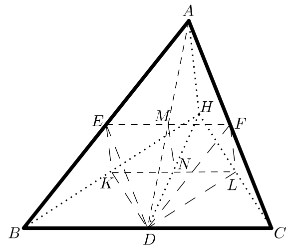


Figura 2.35. Problema 7

Uniu els segments HA, HB i HC. [P 1]

Siguin E i F els punts mitjans dels costats AB i AC, respectivament [EI 10].

Ara, pels punts E i F, tireu els segments EK i FL paral·lels a AH [EI 31] i unim DE, DF i EF [P 1].

Aquests segments tallen els BH i CH pels punts K i L, respectivament [P 5].

Uniu KL, LD, DK i DH [P 1].

EF talla AD pel punt M, i KL talla FD pel punt N [P 5].

Uniu MN [P 1].

Proveu que:

a) Els triangles $\triangle\, BAC$ i $\triangle\, DFC$ són semblants,
atès que els segments DF i BA són paral·lels [EVI 2]. [*Indicació.* Per construcció, teniu que $\frac{CF}{CA} = \frac{1}{2}$ i $\frac{CD}{CB} = \frac{1}{2}$. Apliqueu EV 11 o Nc 1, i EVI 2.]

b) Els punts H i L estan col·locats de manera semblant en els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, FDC$,[450]
i H és el centre de gravetat del triangle $\triangle\, BAC$.

Per tant, L ho és del triangle $\triangle\, DFC$ [EPI 11].

I, anàlogament, K ho és del triangle $\triangle\, BED$ [EPI 11].

c) El centre de gravetat dels triangles $\triangle\, BFD$ i $\triangle\, CEF$ junts és el punt mitjà del segment KL, és a dir, N,
perquè els $\triangle\, BFD$ i $\triangle\, CEF$ són iguals [EI 38 i EPI 4]. [*Indicació.* És evident que N és el punt mitjà del segment EF.]

Per tant, el centre de gravetat del paral·lelogram ▱ $AEDF$ és el punt M [EPI 10].

En definitiva, el centre de gravetat de totes les figures es troba en el segment MN. [*Indicació.* ▱ $AEDF = \triangle\, BED + \triangle\, DFC$, ateses les igualtats $\triangle\, DFC = \triangle\, EAF$ i $\triangle\, BED = \triangle\, EDF$ [EI 33, Nc 1, Nc 2 i EPI 4].

d) Però, en realitat, aquest centre de gravetat és H, per hipòtesi.

Per tant, la prolongació del segment MN passa pel punt H.

450. Per paral·lelisme i CVI 2, tenim que $\frac{CF}{CA} = \frac{CL}{CH} = \frac{EL}{EH} = \frac{1}{2}$, $\frac{BE}{BA} = \frac{BK}{BH} = \frac{KE}{AH} = \frac{1}{2}$ i $\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BDH} = \frac{1}{2}$.

I això és impossible, ja que la prolongació de MN no passa per H. [*Indicació.* Els punts M i N són els punts mitjans dels segments EF i KL.

Per tant, els MN, FL i AH són paral·lels perquè $EM = MF$ i $KN = NL$ i EI 30.]

Problema 8. Com a porisma del problema anterior, resulta que:

a) El centre de gravetat G del triangle $\triangle\, BAC$ es troba en els segments BE i CF. Per tant, és el punt en el qual es tallen les seves tres medianes AD, BF i CE. És a dir, com a porisma, queda establert que «les tres medianes d'un triangle es tallen en un punt»: el baricentre.

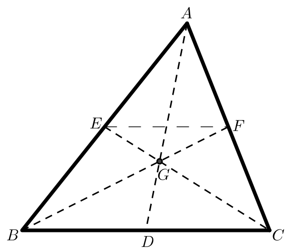


FIGURA 2.36. Problema 8

b) I aquest punt satisfà la propietat següent: $GD = \frac{1}{3}\, AD, GF = \frac{1}{3}\, BF$ i $GE = \frac{1}{3}\, CE$. [*Indicació.* Considereu els triangles semblants $\triangle\, EGF$ i $\triangle\, CGB$.] O sigui, determina dues terceres parts en la direcció de cada vèrtex i una en la de cada base.

Problema 9. Proveu QP 15, anàloga a QP 14 però sense imposar que el diàmetre del segment parabòlic sigui perpendicular a la base (figura QP 14 i QP 15, pàgina 234). [*Indicació.* Vegeu MASIÀ (2016), p. 162-167.]

Problema 10. En el segment parabòlic ABC de diàmetre BD [o paral·lel al diàmetre], hi inscriviu el polígon adaptat $CKIHBGFEA$ (pàgina 156). Pels vèrtexs tireu els segments paral·lels al diàmetre KT, IS i HR, i OE, FP i GQ [EI 31].

Seguidament, tireu els segments EK, FI i GH [P 1].

Demostreu que:

1. Els segments EK, FI i GH són paral·lels a la base AC del segment parabòlic.
2. El diàmetre BD els dimidia.
3. Aquests segments tallen el diàmetre i determinen els segments BN, NM, ML i LD, que són entre si com els nombres senars $1, 3, 5$ i 7.

[*Indicació.* 1. IS és paral·lel a BD, i CV i VB són iguals [QP 1].]

Per tant, CS és igual a SD.

Ho repetiu amb les bases IB i CI, i aconseguiu veure que els segments CT, TS, SR i RD són iguals entre si, i AO, OP, PQ i QD també ho són entre ells.

I, atès que AD i DC són iguals, els vuit segments anteriors ho són.

Usant la semblança dels triangles rectangles QP 1 i QP 4, TX i OW són iguals, i XK i WE també ho són.

Per tant, TK i WE són iguals.

De retruc, KE és paral·lel a la base i, anàlogament, els segments FI i GH també.

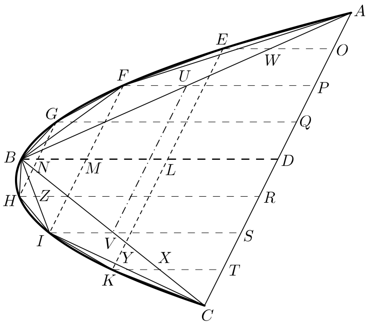


Figura 2.37. Problema 10

3. És fàcil de demostrar.

Useu QP 14 per a veure que BD és a BM i BN a BM com 4 a 1. Per tant, si BN és 1, NM 3, BD 16, IV 4, VS, 12, etc.][451]

Problema 11. Els triangles $\triangle AKF$ i $\triangle KFB$, i $\triangle BGL$ i $\triangle CLG$ són semblants (figura EPII 5, pàgina 255) [EI 31]. També ho són els $\triangle AKF$ i $\triangle BLG$. En definitiva, ho són $\triangle AKBL$ i $\triangle BLC$. Vegeu també QP 17.

Problema 12. Observeu que (figura EPII 8, pàgina 261):

a) $BD = 4\,BS$. [*Indicació.* Per EPII 2, BS és a SD com 1 a 3. O sigui que $SD = 3\,BS$ i, per tant, $BD = 4\,BS$.]

b) $BS = 3\,OS$. [*Indicació.* $BD = 3\,ED$, que és la propietat del baricentre del triangle [exercici 13, pàgina 59]. Per tant, $3\,BE = 2\,DB$. Si O és el punt mitjà de BE, $BO = OE = ED = \frac{1}{3}\,BD$. D'això es dedueix que $SO = BO - BS = \frac{1}{3}\,BD - \frac{1}{4}\,BD = \frac{1}{12}\,BD \underset{a}{=} \frac{1}{3}\,BS$. Per tant, $BS = 3\,OS$.]

c) $\frac{BD}{KF} = \frac{HD}{MF}$. [*Indicació.* Aplicant EPII 7 als segments parabòlics ABC i AKB, tenim que $\frac{BH}{HD} = \frac{KM}{MF}$. I, *componendo* i *alternando* [EV 18 i EV 16], que $\frac{BD}{KF} = \frac{KD}{MF}$.]

d) $BD = 4\,KF$.[452] [*Indicació.* Per *a*, $BD = 4\,BS$. La paral·lela mitja-

451. Eecke (1960), vol. I, nota 5, p. 325-326.

452. Ara Arquimedes diu que *τετραπλασία δὲ ἁ ΒΔ τᾶς ΚΖ*—, i afirma que la demostració es troba al final de la proposició —*τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει*

na del triangle $\triangle ABC$ dimidia la transversal BD. Així doncs, $\frac{1}{2}\,BD = BS + KF$ i, usant a, $2\,BS = BS + KF$. O sigui, $KF = BS = \frac{1}{4}\,BD$.]

e) $WH = 3\,WO$. [*Indicació.* Usant *c* i *d* i aplicant Ev 7 i Ev 11 o Nc 1, $\frac{BD}{KF} = \frac{HD}{MF} = \frac{4\,KF}{KF} = 4$. O sigui, $BD = 4\,MF$ i, sostraient, membre a membre, aquesta igualtat de la igualtat *d*, obtenim $BH = 4\,KM = 4\,SW$ i, de retruc, [Nc 3] $BH - SW = 3\,SW$, que és $(BS+SH)-(SH-WH) = 3\,SW$. Per tant, $BS+WH = 3\,SW$. Ara, tenint en compte *b*, obtenim $WH = 3\,SW - BS = 3\,SW - 3\,SO = 3\,WO$ [Nc 3].]

f) $HE = WO$. [*Indicació.* Apliquem EPi 6 al pes WE, amb fulcre H. Tenint present que E, W i H són els centres de gravetat del triangle $\mathfrak{T} := \triangle ABC$, del segment parabòlic $\mathfrak{S} :=$ ABC i de la diferència $\mathfrak{S} - \mathfrak{T}$, resulta que $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}-\mathfrak{T}} = \frac{WH}{HE}$. Però, per QP 17 i QP 24, sabem que $\mathfrak{S} = \frac{4}{3}\mathfrak{T}$. En conseqüència, $\mathfrak{S} - \mathfrak{T} = \frac{4}{3}\mathfrak{T} - \mathfrak{T} = \frac{1}{3}\mathfrak{T}$. O sigui, $\mathfrak{T} = 3\,(\mathfrak{S} - \mathfrak{T})$. Per tant, $WH = 3\,HE$. Però $WH = 3\,WO$ per *e*. Finalment, doncs, $HE = WO$.]

g) $ED = 5\,HE$. [*Indicació.* $ED = OE = \frac{1}{3}\,BD$ i $OE = WO+WH+HE = WO + 3\,WO + WO$ per *e* i *f*. O sigui, $ED = 5\,WO$ i, per *f*, $ED = 5\,HE$.][453]

Problema 13. Vegeu els passos que fa Arquimedes a EPii 9, amb terminologia algebraica.

Siguin a, b, c i d quatre segments en proporció contínua i ordre decreixent. Si els segments x i y satisfan $\frac{d}{a-d} = \frac{x}{\frac{3}{5}(a-c)}$ i $\frac{2a+4b+6c+3d}{5a+10b+10c+5d} = \frac{y}{a-c}$, aleshores $x + y = \frac{2}{5}\,a$.

De fet, feu $AB = a, BC = b, DB = c, EB = d$, $FH = x, HG = y$ i $DM = z$ en la figura adjunta, d'acord amb el text d'Arquimedes.

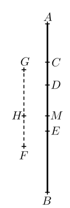


FIGURA 2.38. Problema 13

Constateu la validesa de cada un dels ítems següents precisant quines figures de les proporcions s'usen en cada pas:

δείκνυται, οὗ σαμεῖον . Eutoci recorre al lema 3 que precedeix EPii 2 i en proporciona una demostració. MUGLER (1972), p. 181-183; EECKE (1960), p. 336-338.

453. FRAJESE (1974), nota, p. 434-437, en particular, p. 436-437.

a) Si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, aleshores $\frac{a-b}{b} = \frac{b-c}{c} = \frac{c-d}{d}$
i, de retruc, $\frac{a-b}{b-c} = \frac{b-c}{c-d} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$.[454]

b) Però $\frac{2\,(a+b)}{2c} = \frac{a+b}{c} = \frac{a+b}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-c}{c-d} = \frac{a-c}{c-d}$.
Anàlogament, $\frac{b+c}{d} = \frac{b+c}{c} \times \frac{c}{d} = \frac{a-c}{c-d}$. Per tant, $\frac{a-c}{a-d} = \frac{2a+3b+c}{2c+d}$.

c) Si agafeu z de manera que $\frac{2a+4b+4c+2d}{2c+d} = \frac{a-c}{z}$,
amb $z < (c-d)$, obteniu $\frac{a-c+z}{a-c} = \frac{2a+4b+6c+3d}{2(a+d)+4(b+c)}$.

d) Però, per hipòtesi, sabeu que $\frac{2a+4b+6c+3d}{5a+10b+10c+5d} = \frac{y}{a-c}$.
Per tant, $\frac{a-c+z}{y} = \frac{5(a+d)+10(b+c)}{2(a+d)+4(b+c)} = \frac{5}{2}$.

e) Dividiu la proporció de l'ítem *c* per la del *d*. Obteniu $\frac{z}{c-d} = \frac{2a+3b+c}{2(a+d)+4(b+c)}$. Consegüentment, $\frac{c-d-z}{c-d} = \frac{b+3c+2d}{2(a+d)+4(b+c)}$.

f) Però, per l'ítem *a*, $\frac{c-d}{d} = \frac{a-b}{b} = \frac{3(b-c)}{3c} = \frac{2(c-d)}{2d}$.
Per tant, $\frac{c-d}{d} = \frac{(a-b)+3(b-c)+2(c-d)}{b+3c+2d}$.

g) Combinant els ítems *e* i *f*, resulta que $\frac{c-d-z}{d} = \frac{(a-b)+3(b-c)+2(c-d)}{2(a+d)+4(b+c)}$.
Per tant, $\frac{c-z}{d} = \frac{3a+6b+3c}{2(a+d)+4(b+c)}$.

h) I, usant l'ítem *a*, teniu que $\frac{c-d}{c+d} = \frac{b-c}{b+c} = \frac{a-b}{a+b}$ i que $\frac{c-d}{a-c} = \frac{c+d}{b+c+a+b}$.
Per tant, $\frac{a-d}{a-c} = \frac{a+2b+2c+d}{a+2b+c} = \frac{2(a+d)+4(b+c)}{2(a+c)+4b}$.
I, de retruc, $\frac{a-d}{\frac{3}{5}(a-c)} = \frac{2(a+d)+4(b+c)}{\frac{3}{5}\big(2(a+c)+4b\big)}$.

i) Però, per hipòtesi, $\frac{d}{x} = \frac{2(a+d)+4(b+c)}{\frac{3}{5}\big(2(a+c)+4b\big)}$.

j) I, per l'ítem *g*, $\frac{c-z}{d} = \frac{3a+6b+3c}{2(a+d)+4(b+c)}$ i, *ex æquali* [Ev 22], teniu que $\frac{c-z}{x} = \frac{3(a+c)+6b}{\frac{3}{5}\big(2(a+c)+4b\big)} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

k) I, usant l'ítem *d*, resulta que $\frac{a-c+z}{y} = \frac{5}{2}$ i, de retruc, $\frac{a}{x+y} = \frac{5}{2}$.

En definitiva, $x + y = \frac{2}{5}\,a$.

[*Indicació*. Heath (1894), edició de 2002, p. 216-218.]

Si els segments són $a = 8, b = 4, c = 2$ i $d = 1$, aleshores $\frac{1}{8-1} = \frac{3}{5}\,\frac{x}{8-2}$. Per tant, $x = \frac{18}{35}$. D'altra banda, $\frac{2\times8+4\times4+6\times2+3\times1}{5\times8+10\times4+10\times2+5\times1} = \frac{y}{8-2}$. O sigui que $y = \frac{94}{35}$. I, en definitiva, $x + y = \frac{16}{5} = \frac{2}{5} \times 8$,
atès que $\frac{AF}{DH} = \frac{MN}{NS}$, $\frac{AF}{DH} = \frac{MN}{NS}$ i Ev 16, i $FH = 5\,IK$.

Problema 14. Constateu la validesa de la demostració d'EPii 10 (pàgina 267). Reescriviu-la en termes més algebraics, com heu fet en el problema anterior. [*Indicació*. Val la pena tenir en compte els ítems

454. Taula 2.2*a*, Pla (2016*b*), p. 115.

següents, que aclareixen algunes de les afirmacions de la demostració

a) $DH = HE$ i $AF = FC$.

b) $\frac{AF}{DH} = \frac{MN}{NS}$ [Evi 22].

c) $\frac{MN^2}{NS^2} = \frac{NS}{TN}$ i $\frac{MN}{NS} = \frac{MN}{NS}$. Per tant, $\frac{MN^3}{NS^3} = \frac{NS}{TN}$.

d) $\frac{MT}{NT} = \frac{FI}{GP}$ i $FI = \frac{3}{5}HF$, per hipòtesi.

e) $\frac{5(MN+NT)+10(NS+NO)}{2(MN+NT)+4(NS+NO)} = \frac{5}{2}$, segons Evi 16, ja que $MO = MN - NO = FB - HB = FH$.

Problema 15. Si el segment AH' dimidia l'angle $\widehat{CAG}$ del triangle $\triangle CAG$, la suma dels dos costats AC i AG és més gran que el doble del segment AH'.

Distingiu dos casos:[455]

a) Els costats AC i AG són iguals. [*Indicació*. En aquest cas, el fet és evident, ja que $AC + AG$ és més gran que $2\,AH'$ [Di 20, Ei 4 i Ei 47].]

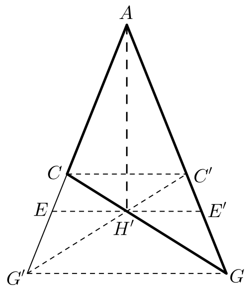


Figura 2.39. Problema 15

b) Suposeu, ara, que els costats AC i AG són diferents i que AG és el més gran.

b_1) Prolongueu AC fins que AG' sigui igual a AG [P 2, i Ei 2 o Ei 3].

b_2) Uniu GG' [P 1] i, pels punts H' i C, tireu $E'E$ i CC' paral·lels a $G'G$ [Ei 31].

Uniu $G'C'$ [P 1]. És evident que $AE + AE' > 2\,AH'$ [per *a*].

b_3) Demostreu, doncs, que $AC + AG > AF + AE'$.

Però AH' és la bisectriu de l'angle $\widehat{CAG}$, $\frac{AG}{AC} = \frac{H'G}{H'C}$ [Evi 3] i $AG > AC$. Per tant, $H'G > H'C$ [Dv 7].

I d'això en resulta que $GH' > H'C'$.

Les parelles d'angles $G\widehat{H'}C'$ i $G\widehat{H'}C$, i $C\widehat{H'}E'$ i $C\widehat{H'}E$ són iguals [Ei 15]. Per tant, $\frac{GH'}{H'C'} = \frac{GE'}{E'C'}$ [Evi 4].

Però els segments $H'C'$ i CH' són iguals i $GH' > CH'$ i $GH' > H'E'$. I, així, $GE' > E'C'$ [Ev 8].

En conseqüència, $AE + AE' > 2AH'$ i, de retruc, $AC + AG > 2\,AH'$.[456]

455. Disjunció de casos.

456. Vegeu β de la proposició xiii de <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/helices.htm#05a>.

Problema 16. Una demostració alternativa d'ECI 7. Considereu un con de base ◯ ABC i vèrtex V (feu la figura). Inscriviu-hi una piràmide de base el triangle equilàter $\triangle ABC$. Uniu VA, VB i VC [P 1]. Pel punt V tireu els segments perpendiculars VK, VL i VM [cada un en el seu pla] [EI 12].

Proveu que:

a) Els segments VK, VL i VM, que són les altures dels triangles isòsceles, són iguals [DXI 19 i EI 8].
b) Els rectangles de costats BC i VK, AB i VL, i AC i VM equivalen al doble dels triangles $\triangle VBC, \triangle VAB$ i $\triangle VAC$, respectivament [EI 34].
c) El rectangle de costats AB, BC i CA junts, i altura $VL[:= VK$ o $VM]$ equival al doble dels triangles $\triangle VAB, \triangle VBC$ i $\triangle VAC$ junts [EI 34].
d) Per tant, el triangle de base AB, BC i CA junts i base VL equival als triangles $\triangle VAB, \triangle VBC$ i $\triangle VAC$ [Nc 1 i Nc 6′].

Problema 17. [El teorema de les tres perpendiculars]
a) Demostreu el teorema de les tres perpendiculars, que estableix que: si un segment és perpendicular a un pla i, pel seu peu tirem un segment [del pla] perpendicular a un altre segment del pla [o la seva prolongació], aquest darrer segment és perpendicular al pla que determinen els dos primers.
b) Vegeu la demostració d'Eutoci. Considereu un con de base un cercle de centre O i radi OA, vèrtex G
i aresta GA. Sigui DE el segment tangent a la circumferència de la base pel punt A. Voleu demostrar que DE i GA són perpendiculars.

Com que el segment GO és perpendicular a la base, el pla del triangle ▱ GOA, que passa per GO, també ho és [EXI 18].

En el pla de la base, la tangent DE és perpendicular al radi AO [EIII 18].

DE és perpendicular al pla ▱ GOA [DXI 4].

Per tant, ho és a tots els segments que passen pel seu peu [DXI 4].

I, en particular, al segment AG.

Problema 18. Completeu els detalls de la demostració d'ECI 10.[457]

a) El segment tangent al punt B, GF, és paral·lel al segment AC.

Uniu el centre E amb els punts A, D i C [P 1].

DA i DC són iguals [EIII 36] i EA i EC també [DI 15].

Per tant, els triangles $\triangle\, DAE$ i $\triangle\, DCE$ també ho són [EI 8], els [corresponents d'aquests triangles] també [EI 8] i, finalment, els angles $\widehat{GBD}$ i $\widehat{DBF}$ ho són perquè són rectes [P 4 i EIII 18].

Els altres angles, $\widehat{DGB}$ i $\widehat{DFB}$, també són iguals [EI 32].

Per tant, els segments GD i FD són iguals [EVI 2] i, consegüentment, els segments GF i AB són paral·lels [EVI 2].

b) Vegeu l'afirmació de la pàgina 292: «Aconseguim àrees residuals la suma de les quals és més petita que H [en el cas dels polígons inscrits].»

Pel que fa als polígons inscrits, els triangles inscrits en els segments circulars són més grans que la meitat del segment corresponent [EXII 2].

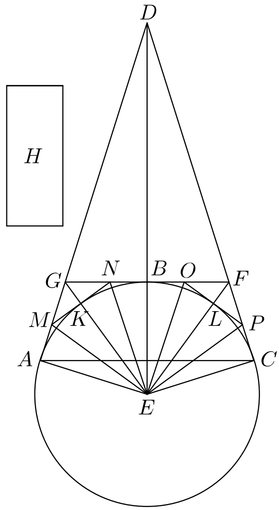


FIGURA 2.40. Problema 18

I, aplicant, EX 1, obtindreu el resultat indicat.

c) Per a poder aplicar ECI 6, heu d'establir que «la tangent delimita un triangle superior a la meitat de la superfície corresponent del residu».

És a dir, que el triangle $\triangle\, GDF$ és més gran que la meitat de la superfície del residu limitat pels segments AD i DC i l'arc $\widehat{ABC}$.

Atès que l'angle $\widehat{DBF}$ és recte, DF és més gran que AF [EI 18 o EI 47].

Però els segments FB i FC són iguals [EIII 36]. Per tant, [per la transitivitat,] el segment DF és més gran que el DC.

Els dos triangles $\triangle\, DBF$ i $\triangle\, BFC$ tenen la mateixa altura.

457. MUGLER (1972), edició de 2002, p. 27-29; FRAJESE (1974), p. 97-99.

En conseqüència, la superfície del primer és més gran que la del segon [Nc 4′ adaptat i Evi 1].

Per les mateixes raons, el triangle $\triangle DBG$ és més gran que la superfície que resta, BGA.

En definitiva, el triangle $\triangle DFG$ també ho és més que la superfície que resta, ADC.

Problema 19. Proveu que, donats dos cercles, si teniu un polígon [regular o no] que està inscrit o circumscrit en un d'aquests, podeu inscriure'n o circumscriure'n un altre a l'altre cercle. Digueu quins «elements» concrets dels *Elements* d'Euclides heu fet servir.

Problema 20. Efectivament, $\frac{TD}{G} = \frac{G}{RF}$ (figura ECi 13, pàgina 300). [*Indicació.* És una conseqüència immediata de la hipòtesis: $G^2 = DC \times EF = \frac{DC}{2} \times 2EF$, i $\frac{GD}{2} = DT$ i $2\,EF = RF$. A quins «elements» dels *Elements* és necessari recórrer?

Problema 21. Proveu que l'àrea lateral d'un con recte és la que s'estableix a ECi 14 (pàgina 304).

Donats el radi de la base i la generatriu, podem saber directament l'angle del sector circular equivalent?

Problema 22. És correcte aquest raonament que aclareix la demostració d'ECi 14 (pàgina 306)? Considereu la perpendicular que va del vèrtex de la piràmide al punt mitjà del costat del polígon de la base. En efecte, la raó del radi del cercle $\bigcirc A$ i la generatriu del con és la mateixa que la raó de l'apotema del polígon circumscrit al cercle $\bigcirc A$ i el segment paral·lel a la generatriu del con tirada des del punt mitjà del costat del polígon fins que talla l'eix del con. Però la perpendicular tirada pel vèrtex del con al costat del polígon és més gran que el segment paral·lel suara esmentat. Per tant, la raó del radi del cercle $\bigcirc A$ i el costat del polígon és més gran que la raó de la perpendicular tirada des del centre fins al costat del polígon i la perpendicular tirada del vèrtex del con al costat d'aquest polígon.

Problema 23. Vegeu:

a) La correcció del que afirma la nota 858 (pàgina 308). És a dir, heu de veure que $R\,L - r\,l = (R + r)(L - l)$. [*Indicació.* És immediat si teniu en compte que $\frac{L}{l} = \frac{R}{r}$, o sigui, $R\,l = r\,L$ [EVI 16], sumant $R\,L - r\,l$ a tots dos membres i aplicant EII 1]

b) La validesa de l'afirmació: «El rectangle de costats AB i AG equival al que obtenim ajuntant els de costats [els segments] BD i DF, i [els segments] AD, DF i AG junts, atès que el segment DF és paral·lel al DG.» [*Indicació.* b_1) $\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{DF}$ [EVI 2]. Per tant, els rectangles de costats AB i DF, i AG i BD són equivalents [EVI 16].

Però el rectangle de costats AB i DF equival als rectangles de costats BD i DF, i AD i DF [EII 2].

Per tant, el de costats AG i BD també equival als dos rectangles junts [Nc 1].

Afegiu ara, a tots dos, el rectangle de costats AD i DG.

Problema 24. Proveu que, si teniu una progressió aritmètica decreixent $a, a-d, a-2\,d, a-3\,d$, aleshores $\frac{a}{a-3\,d} > \frac{a^3}{(a-d)^3}$.

Problema 25. Com podeu construir un cilindre que és una vegada i mitja un altre cilindre o un con?

Problema 26. Feu un pla perpendicular a un segment donat. [*Indicació.* És un porisma d'EXI 19.]

Problema 27. *a*) És plausible el resultat que s'enuncia a ECII 8 (pàgina 341)?

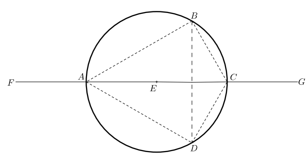


FIGURA 2.41. Problema 27

b) Demostreu-lo. [*Indicació.* Perllongueu el diàmetre AC dos segments FA i CG iguals al radi $AE = EC$ [EI 2].

La raó $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2}$ dels volums $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$ dels segments esfèrics gran i petit la podem escriure com una raó composta $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{\mathcal{V}_1}{\triangle BAD} \times \frac{\triangle BAD}{\triangle BCD} \times \frac{\triangle BAD}{\mathcal{V}_2}$.

I, per ECII 2, $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{GH}{HC} \times \frac{AH}{HC} \times \frac{AH}{HF} = \frac{AH^2 \times GH}{HC^2 \times HF}$.

Heu de veure que és més gran que $\frac{AB^3}{BC^3} = \frac{AB^2}{BC^2} \times \frac{AB}{BC} = \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2}\sqrt{\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2}}$ i més petita que $\frac{AB^2}{BC^2}$.

Problema 28. Proveu els ítems següents que complementen la demostració d'ECII 8:

a) $\frac{BA^2}{AD^2} = \frac{BF}{DF}$. [*Indicació.* En el triangle rectangle $\triangle BAD$, $BA^2 = \square(BD, BF)$ i $AD^2 = \square(BD, DF)$ [EVI 8, porisma]. I, per tant,

$\frac{BA^2}{AD^2} = \frac{BF}{DF}$ [Evi 1]. Tot es redueix, doncs, a veure que $\frac{HF}{FG} < \left(\frac{BF}{FD}\right)^2$]

b) $\frac{FB}{DF} = \frac{HB}{BK}$. [*Indicació.* $\frac{ED+DF}{DF} = \frac{HF}{FB}$. I, *dividendo* [Ev 17], $\frac{ED}{DF} = \frac{HB}{FB}$, i *alternando* [Ev 16], $\frac{FB}{DF} = \frac{HB}{ED}$. I, per Ev 7, $\frac{FB}{DF} = \frac{HB}{BK}$, ja que $BK = FE$.]

c) $\frac{KF}{FB} = \frac{GF}{FD}$. [*Indicació. Dividendo* i *alternando*.]

d) $\frac{HB}{BK} = \frac{KF}{FG}$. [*Indicació.* Useu les operacions adequades de les proporcions.]

e) La raó que hi ha entre HF i FK és més petita que la de HB i BK. [*Indicació.* Vegeu e_1) $\frac{HF}{KF} < \frac{HF-BF}{KF-BF} = \frac{HB}{KB}$. Per què? I $\frac{HF}{FG} = \frac{HB}{KB}$. Useu els dos ítems anteriors.]

f) El rectangle de costats HF i FG és més petit que el quadrat de costat FK.

g) Completeu els detalls que us calguin per a estar convençuts de la validesa de la demostració arquimediana d'ECii 8.

Problema 29. Proveu que:

a) El semicercle és el més gran de tots els segments circulars que tenen un mateix perímetre.

b) La propietat enunciada en la nota 965 (pàgina 346) és certa. [*Indicació.* Euclides la demostra en general [Eii 5] però ara solament en necessiteu un cas particular. En efecte, considereu dos punts R i K d'un segment AC. El rectangle de costats AR i RC equival al quadrat del segment que la perpendicular pel punt R al diàmetre AC determina quan talla el semicercle $\frown CBA$ pel punt S [Evi 13]. I el rectangle de costats AK i KC equival al quadrat del segment KB [Evi 13]. Ara bé, si R és més a prop del punt mitjà M de AB, el segment RS és més gran que KB [Eiii 7]. Per tant, el rectangle de costats AR i RC també ho és que el rectangle de costats AK i KC.]

Problema 30. Proveu l'afirmació de la pàgina 361. [*Indicació. a*) Pel punt A tireu una perpendicular a HG. El triangle determinat per aquesta perpendicular, per AH i per la meitat de HG és semblant al triangle $\triangle HAZ$ (figura LE 18, pàgina 361).

Per tant, AH és a AF com la meitat de HG a la perpendicular de la qual acabem de parlar.

Però la raó entre HA i AL és més gran que la de HA i AT.

Per tant, la raó de HA i AL és més gran que la de la meitat de HG i la dita perpendicular.

Ras i curt: per hipòtesi, $AL < AF$. Per tant, $\frac{HA}{AL} > \frac{HA}{AF}$. O sigui, $\frac{HA}{AL} > \frac{\frac{1}{2}HG}{\text{perpendicular per } A \text{ a } HG}$.]

Problema 31. Analitzeu els passos següents, observeu en quins resultats dels *Elements* d'Euclides es basen i constateu-ne la validesa.

Considereu els triangles rectangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$ amb angles rectes en els punts B i E.

Suposeu que [els catets] BC i EF són iguals i que, en canvi, AC és més gran que DF.

Demostreu que la raó que hi ha entre l'angle $\hat{D} := \widehat{EDF}$ i l'angle $\hat{A} := \widehat{BAC}$ —que és més petit que el $\hat{D}$— és:

a) més gran que la raó que hi ha entre AC i DF,

b) més petita que la raó que hi ha entre AB i DE.

a) Efectivament, $\frac{\hat{D}}{\hat{A}} > \frac{AC}{DF}$

a_1) Feu el triangle $\triangle\, HKA$ igual i semblant al triangle $\triangle\, ABC$.

a_2) Preneu MK igual a DE i tireu el segment ML.

El triangle $\triangle\, MKL$ és igual i semblant al triangle $\triangle\, DEF$.

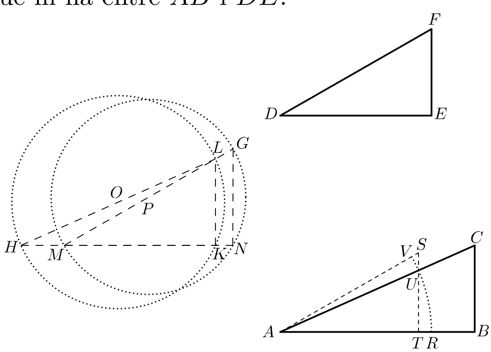


FIGURA 2.42. Problema 31

a_3) Prolongueu ML fins a G, de tal manera que MG sigui igual a HL.

I també MK fins a N

i, pel punt G, tireu el segment GN perpendicular a MN.

El triangle $\triangle\, MNG$ és semblant al triangle $\triangle\, MKL$.

a_4) Pel punt mitjà O del segment HL i radi OL, tireu una circumferència.

Passa pel punt K.

Tireu la circumferència de centre el punt mitjà P de[l segment] MG i radi PG [P 3 i EI 10].

Passa pel punt N.

Aquestes dues circumferències són iguals.

Atès que els angles $\widehat{GMN}$ i $\widehat{LHK}$ tenen el vèrtex en circumferències iguals, són com els arcs determinats pels seus costats,
és a dir, $\frac{\widehat{GMN}}{\widehat{LHK}} = \frac{\widehat{GN}}{\widehat{LK}}$. [*Indicació.* Cal recórrer a la definició Dv 5.]

Però en cercles iguals, la raó dels arcs és més gran que la raó de les cordes.[458] Per tant, $\frac{\widehat{GMN}}{\widehat{LHK}} = \frac{GN}{LK}$.

Però $\frac{GN}{LK} = \frac{MG}{ML}$. O sigui que $\frac{\widehat{GMN}}{\widehat{LHK}} > \frac{HL}{LM}$, és a dir, $\frac{\hat{D}}{\hat{A}} > \frac{AC}{DF}$.

b) Efectivament, $\frac{\hat{D}}{\hat{A}} < \frac{AB}{DE}$.

b_1) Feu el triangle $\triangle\, ATS$ igual al $\triangle\, DEF$ i col·loqueu-lo de manera semblant. El costat TS talla la hipotenusa AC per U.

b_2) Pel vèrtex A, com a centre, i radi AU, tireu l'arc $\widehat{RUV}$.

$\frac{\widehat{UAV}}{\widehat{UAT}} = \frac{\sphericalangle UAV}{\sphericalangle UAT}$. [*Indicació.* Hem de recórrer a la definició Dv 5.]

Però $\frac{\widehat{UAV}}{\widehat{UAT}} \underset{\mathrm{Dv}\,7}{<} \frac{\sphericalangle\, UAV}{\triangle\, UAT} < \frac{\triangle\, UAS}{\triangle\, UAT} = \frac{SU}{UT}$.

$\frac{\widehat{TAV}}{\widehat{UAT}} = \frac{\widehat{UAV}+\widehat{UAT}}{\widehat{UAT}} < \frac{SU+UT}{UT} = \frac{ST}{UT}$.

Però, $\frac{CB}{UT} = \frac{AB}{AT}$. I, de retruc, $\frac{\widehat{TAV}}{\widehat{UAT}} < \frac{AB}{AT}$.

Problema 32. Proveu que el segment BN cau més enllà del CL, ja que és més llarg (figura LE 6, pàgina 384).

Problema 33. Proveu:

a) L'afirmació que tanca la proposició LE 16 (pàgina 380).

b) La validesa de la proposició LE 17, que estableix el mateix resultat que LE 16 però en la segona volta.

Problema 34. Considereu la progressió aritmètica $n\,d, (n-1)\,d$, $(n-2)\,d, \ldots, 3\,d, 2\,d, d$.

Proveu:

a) La igualtat $n^2\,d + \overset{n)}{\cdots} + n^2\,d + n^2\,d + n\,(1+2+\cdots+n)\,d [= n^3\,d + n^2\,d + \frac{1}{2}\,n\,(n+1)\,d = n^2\,(n+1)\,d + \frac{1}{2}\,n\,(n+1)\,d] = 3\,(1^2+2^2+\cdots+n^2)\,d$. O sigui, $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)$ [LE 10].

b) Les desigualtats:

b_1) $2\left(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\right) < n\,a_n < 2\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)$ [LE 11].

b_2) $n\,(nd)^2 < 3\left(d^2+(2\,d)^2+\cdots+(n\,d)^2\right)$ i $n\,(nd)^2 > 3\left(d^2+(2\,d)^2+\cdots+((n-1)\,d)^2\right)$ [LE 10, porisma]. [*Indicació.* La primera

458. Ptolemeu (1898), proposició 10, p. 43-44.

desigualtat és immediata a partir d'a_1. La segona, la podem obtenir de $n^2 + \big(1+2+\cdots+n\big) < 3\,n^2$.]

b_2) $n\,(nd)^2 < 3\,\big(d^2 + (2\,d)^2 + \cdots + (n\,d)^2\big)$ i $n\,(nd)^2 > 3\,\big(d^2 + (2\,d)^2 + \cdots + ((n-1)\,d)^2\big)$ [LE 10, porisma]. [*Indicació.* La primera desigualtat és immediata a partir d'a_1. La segona, la podem obtenir de $n^2 + \big(1+2+\cdots+n\big) < 3\,n^2$.]

b_3) $\frac{n^2+\overset{n-1)}{\cdots}+n^2}{n^2+(n-1)^2+\cdots+2} < \frac{n^2}{n\times 1} + \frac{1}{3}(n-1)^2$ i $\frac{n^2+\overset{n-1)}{\cdots}+n^2}{(n-1)^2+\cdots+2+1} < \frac{n^2}{n\times 1} + \frac{1}{3}(n-1)^2$.

c) Aquesta igualtat i aquestes desigualtats valen també si la progressió aritmètica té una diferència que no coincideix amb el terme més petit?

Problema 35. Proveu que: «Si la raó que hi ha entre una part d'una magnitud i la magnitud sencera és més gran que la que hi ha entre una part d'una altra magnitud i aquesta magnitud, la raó de la primera amb l'altra part també ho és amb la de la segona i la seva altra part.» [LE 18, pàgina 361.] Suposeu que la primera magnitud és $M := A+P$ i la segona $B+Q$. Si $\frac{A}{A+P} > \frac{B}{B+Q}$, aleshores $\frac{A+P}{P} > \frac{B+Q}{Q}$. En efecte, $\frac{A}{A+P} > \frac{B}{B+Q}$ implica que $\frac{P}{A} < \frac{Q}{B}$. Heu de trobar que $\frac{A+P}{P} > \frac{B+Q}{Q}$. [<http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/helices.#05a>, proposició XVIII, nota *d*.]

Problema 36. Proveu l'ítem b de LE 19, pàgina 394.

Problema 37. Proveu:

a) $\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{6}\mathfrak{S}_2'$ [LE 27 i nota 1117 (pàgina 408)]. [*Indicació.* Per LE 24 i LE 25, sabeu que $\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{S}_1} = \frac{3}{1}$ i que $\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{C}_2} = \frac{7}{12}$, respectivament, en què $\mathfrak{C}_1$ i $\mathfrak{C}_2$ designen les àrees del primer cercle i del segon cercle. Ara bé, per Exii 2, $\mathfrak{C}_2 = 4\,\mathfrak{C}_1$. De retruc, per Ev 7, $\frac{\mathfrak{S}_2}{4\,\mathfrak{C}_1} = \frac{7}{12}$. I, si apliqueu *ex æquali* [Ev 22], $\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1} = \frac{7}{1}$ i, finalment, *dividendo*, $\frac{\mathfrak{S}_2'}{\mathfrak{S}_1} = \frac{6}{1}$.]

b) El rectangle de costats CH i HB i una tercera part del quadrat de costat CB junts és al rectangle de costats BH i HA més la tercera part del quadrat de costat AB com dinou a set [LE 27, pàgina 409].

Tenim que $CA = 3\,AH$, $HB = 2\,HA$ i $CB = AB = HA$. Aleshores, substituïu a la raó $\frac{CH\times HB+\frac{1}{3}\,CB^2}{BH\times AB+\frac{1}{3}\,AB^2}$, obtindreu $\frac{19}{7}$.

c) Proveu la igualtat $\frac{N}{K+L+M+N} = \frac{HC\times BD}{HC\times HB+\frac{1}{3}\,CB+HC\times BD}$ de l'ítem $b_{2.1}$ (pàgina 410). [*Indicació.* Useu Ev 7, porisma, i Ev 18.]

d) Proveu que l'àrea O és a la N com el rectangle de costats HD i CE al de costats HC i DB, com s'afirma a la pàgina 411. [*Indicació.* Ev 7, porisma, i Ev 22.]

Problema 38. Proveu les afirmacions de LE 28 (pàgines 411-413):

a) L'àrea O és a l'àrea N i Q com el rectangle de costats HA i dues terceres parts del quadrat de costat A junts com el rectangle de costats AH i AG i una tercera part del quadrat de costat AG junts (pàgina 411). [*Indicació.* a_1) Useu LE 26 i Ev 7, porisma, per a veure que $\frac{\triangleleft GCH}{N+Q} = \frac{GH^2}{HA\times HG+\frac{1}{3}\,AG^2}$.

a_2) Per Ev 17, $\frac{O}{N+Q} = \frac{GH^2-(HA\times HG+\frac{1}{3}\,GH^2)}{AH\times HG+\frac{1}{3}\,AG^2}$.

a_3) D'Eii 1 i Eii 4 en resulta que $GH^2 - HA \times HG - \frac{1}{3}\,HG^2 = (GA + AH)^2 - HA \times (GA + AH) = HA^2 + AG^2 + 2\,GA \times AH - GA \times AH - AH^2 - \frac{1}{3}\,AG^2 = \frac{2}{3}\,AG^2 + GA \times HA$.

a_4) Per acabar, useu Ev 7, porisma.]

b) L'àrea N i Q junts és a la N, Q i O junts com el rectangle de costats HA i HG i una tercera part del quadrat de costat GA al quadrat de costat HG i $N + Q$ sobre N és igual a $\frac{GH\times HA+\frac{1}{3}\,GA^2}{AH^2}$. [*Indicació.* L'àrea $N + Q + O = \triangleleft GHC$ i $N = \triangleleft AHC'$. Useu Exii 2, aplicat a sectors circulars, i Ev 22.]

c) $\frac{N+Q}{Q} = \frac{GH\times HA+\frac{1}{3}\,GA^2}{GA\times HA+\frac{1}{3}\,GA^2}$ i apliqueu Eii 3.

Problema 39. Constateu la validesa de les afirmacions de Me 16 (pàgines 538-541).

Problema 40. Proveu la validesa de Lm 1 quan les circumferències són tangents exteriorment.

Problema 41. Proveu els lemes següents:

Lm 2. Sigui $\frown CBA$ el segment circular en el qual hem tirat les tangents DC i CB, i el segment BE perpendicular a AC. Uniu AD. Els segments BF i FE son iguals.

Lm 3. Sigui $\frown CA$ un segment circular de base el segment rectilini AC i B un punt arbitrari de la seva frontera corbada. Tireu BD perpendicular a AC, sent D un punt d'aquesta base AC. Considereu el segment DE de la base igual a DA i l'arc $\widehat{BF}$ igual al $\widehat{BA}$. Els segments CF i CE són iguals independentment de la posició del punt D.

Lm 7. Tireu un cercle circumscrit a un quadrat donat i un altre d'inscrit en aquest. El cercle circumscrit mesura el doble de l'inscrit.[459]

Lm 9. Considereu dues cordes AB i CD d'un cercle que es tallen ortogonalment en un punt diferent del centre. Els arcs $\widehat{AD}$ i $\widehat{DC}$ són iguals als $\widehat{AC}$ i $\widehat{DB}$.

Lm 10. Per un punt D de l'exterior del cercle $\bigcirc ABC$, tireu els segments DA i DC tangents i un segment DB secant. Seguidament, pel punt C tireu el segment CE paral·lel al DB i, pel punt E, EA que talla DB pel punt F. Per aquest punt F, tireu el segment FG perpendicular al CE. El punt G d'aquest segment dimidia EC.

Lm 11. Considereu dues cordes AB i CD ortogonals en un punt E diferent del centre. La suma dels quadrats de costats els segments AE, BE, EC i ED equival al quadrat de costat el diàmetre del cercle.

Lm 12. Proveu la proposició auxiliar a la qual recorre el traductor àrab en la demostració d'aquest lema i que recollim en la nota 1586 (pàgina 556). [*Indicació.* La demostració, per reducció a l'absurd, d'Abul Hassan és força més llarga que la directa de Borelli.]

Lm 13. En un cercle, considereu un diàmetre AB i una corda CD que no és un diàmetre. Pels punts A i B, tireu les perpendiculars A i BF a CD. Els segments CF i DE són iguals.

Lm 15. En un cercle de diàmetre AB, considereu la corda AC, que és el costat d'un pentàgon regular. Considereu l'arc $\widehat{AD}$, que equival a la meitat del $\widehat{AC}$. Tireu el segment CD i prolongueu-lo fins a CE, que talla el diàmetre pel punt E. Tireu DB, que talla CA per F.[460] Per aquest punt, tireu FG perpendicular a AB. El segment EG equival a un radi. [*Indicació.* Ortiz-García (2009), p. 321-342.]

Problema 42. Sigui $\triangle ABD$ un triangle amb l'angle $\hat{D}$ agut. Tirem les perpendiculars AI i BF als costats BD i AD [Ei 12]. Es tallen en un punt E [P 5]. Unim DE [P 1] i el prolonguem fins que talli el costat AB pel punt C [P 2 i P 5].

a) Afirmo que el segment DC és perpendicular al costat AB.

459. Ens podem preguntar què passa amb les longituds de les circumferències.

460. Per què es tallen els segments indicats?

a_1) Tirem la circumferència de diàmetre AB [P 3 i EI 10]. Aquesta circumferència passa pels punts F i I, atès que els angles $\widehat{AFB}$ i $\widehat{AIB}$ són rectes [EIII 31].

a_2) Considerem ara la de diàmetre DE. Passa també pels punts F i I per la mateixa raó que abans.

a_3) Tirem FI [P 1]. Els angles $\widehat{EDI}$ i $\widehat{IFE}$ són iguals [EIII 21].

a_4) I, per la mateixa raó, els angles $\widehat{IFE}$ i $\widehat{BAI}$ també ho són [EIII 21]. I, de retruc, ho són $\widehat{BAI}$ i $\widehat{BDC}$ [Nc 1].

a_5) Per tant, els triangles $\triangle BAI$ i $\triangle BDC$ són semblants [EI 32 i EVI 8].

a_6) Però l'angle $\triangle BIA$ és recte. Per tant, el $\triangle BCD$, també [Nc 1].

a_7) I, de retruc, el segment DC és perpendicular al AB [DI 10], ja que DC és perpendicular a AB.

b) De tot això, se'n segueix fàcilment que, en tot triangle, les tres perpendiculars d'un vèrtex al costat oposat es tallen en un punt.

Suposem que DC és perpendicular a AB, que BF ho és a AD.

Es tallen per un punt E [P 5].

Unim AE P 1].

Pel punt B, tirem la perpendicular a AE o a la seva prolongació [P 2 i EI 12].

Sigui I el peu de la perpendicular.

b_1) Unim ID [P 1].

Afirmo que la línia BID és rectilínia.

b_2) Si no ho és,[461]

el segment que uneix els punts B i D talla AI o la seva prolongació per un punt G o H, rewspectivament.[462]

$b_{2.1}$) D'entrada, suposem que ho fa pel punt G, és a dir, que és BGD. Aleshores, l'angle $\widehat{BGA}$ és recte i l'angle $\widehat{BIA}$, també.

Però això és impossible perquè l'angle $\widehat{BGA}$, que és exterior al triangle, i el $\widehat{BIA}$, que és interior i oposat, serien iguals [P 4] però són diferents [EI 18].

461. Hipòtesi de l'absurd.

462. Disjunció de casos.

$b_{2.2}$) Ha de passar, doncs, per H. Sigui BHD la línia rectilínia. Aleshores, l'angle $\widehat{BIA}$, que és exterior al triangle, i el $\widehat{BHA}$, que és interior i oposat, serien rectes. I això és impossible. [P 4 i EI 18]

$b_{2.3}$) Per tant, el segment que uneix B i D passa necessàriament pel punt I. O sigui que la línia BID és rectilínia. [*Indicació*. Analitzeu la demostració. És correcta, és a dir, prova que les altures de un triangle arbitrari es tallen en un punt. Sabríeu donar una demostració d'aquest fet?[463]]

Problema 43. Proveu:

a) La proposició CE 1. [*Indicació*. Vegeu el text B 6.$d_{1.1}$ (pàgines 426-428) i les notes corresponents.]

b) La proposició CE 2. [*Indicació*. Vegeu els text B 6.$d_{1.2}$ (pàgines 428-431) i les notes corresponents. En llenguatge actual, tenim els rectangles $R_i = a\times(i\,h)+(i\,h)^2, i = 1,\ldots,n$. Es compleixen les desigualtats: $\frac{n\,R_n}{R_1+\cdots+R_{n-1}+R_n} < \frac{a+n\,h}{\frac{n\,h}{3}+\frac{a}{2}}$ i $\frac{n\,R_n}{R_1+\cdots+R_{n-1}} > \frac{a+n\,h}{\frac{n\,h}{3}+\frac{a}{2}}$. Cal recórrer a CE 1, $n\times(n\,h\,a) < 2(a\,h+\cdots+a\,(n-1)\,h+a\,n\,h) < 2(a\,h+\cdots+a\,(n-1)\,h$ i, per LE 10, $n\times(n\,h)^2 < 3\,(h^2+\cdots+((n-1)\times h)^2+(n\,h)^2)$.

D'això en resulta fàcilment que l'expressió $\frac{a\,n^2\,h}{2}+\frac{n\times(N\,h)^2}{3}$, d'una banda, $< \big((a\,h+h^2)+\cdots+(a\times(n\,h)+(n\,h)^2)\big) = R_1+\cdots+R_n$ i, d'una altra, $> \big((a\,h+h^2)+\cdots+(a\times((n-1)\,h)+((n-1)\,h)^2)\big) = R_1+\cdots+R_{n-1}$, tal com volíem.

Problema 44. Proveu que les ordenades de l'el·lipse i de la circumferència són com el semidiàmetre petit de la primera i el radi de la segona. O sigui, que $\frac{ML}{KL} = \frac{OQ}{GQ} = \frac{BH}{EH}$ (figura CE 4, pàgina 435).

Problema 45. Vegeu, ara, la qüestió oberta de CE 7 (pàgina 104).

a) Useu els triangles semblants adequats (figura CE 7, pàgina 104) per a arribar a $\frac{QE}{EC} = \frac{AD}{DC}$ i $\frac{ER}{EC} = \frac{DB}{DC}$.

b) Componeu els primers membres i els segons, i obtindreu: $\frac{QE\times ER}{EC^2} = \frac{AD\times DB}{DC^2}$.

c) Considereu la disjunció de casos següent:[464]

Si l'angle $\hat{F} = \widehat{AQE}$, aleshores, òbviament, $\frac{AE}{QE} = \frac{ER}{EF}$ i, en conseqüència, $AE\times EF = QE\times ER$.

463. Vegeu l'ítem *a* del lema 5 de <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/lemmes.htm#06>.

464. Disjunció de casos.

Però l'angle $\hat{F} = \widehat{CBA} - \widehat{BAF} = \widehat{CAB} - \widehat{BAF}$. O sigui, $\hat{F} < \widehat{CAB} = \widehat{AQE}$. Per tant, tenim que $\frac{AE}{QE} > \frac{ER}{EF}$, o sigui que $AE \times EF > QE \times ER$.

d) Substituïu les relacions dels ítems c_1 i c_2 en la igualtat de raons de l'ítem b.

e) Aconseguiu, òbviament, $AD \times DB = \left(\frac{1}{2}\, AB\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\text{ diàmetre gran}\right)^2$.

f) Proveu les afirmacions de les notes 1228 i 1229 (pàgina 438).

g) Constateu que l'afirmació «El quadrat de la meitat del diàmetre gran és al rectangle de costats AD i DB com el quadrat de [costat] HK al [rectangle] de costats AK i KB» es tradueix, quan l'expressem en termes algebraics, en l'equació $\frac{y^2}{(a+x)\,(a-x)} + \frac{b^2}{a^2} = 1$. I, si la de l'el·lipse és $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en la terminologia de la proposició d'Arquimedes, es tradueix en $\frac{(\frac{1}{2}\text{ diàmetre gran})^2}{AD \times DB} = \frac{HK^2}{AK \times KB}$.

h) Establiu la cadena d'igualtats: $\frac{EA \times EF}{QE \times ER} = \frac{(\frac{1}{2}\text{ diàmetre gran})^2}{AD \times DB}$, $\frac{EA \times EF}{QE \times ER} = \frac{AL \times LF}{LO \times LP}$. Apliqueu [Ev 7 o Nc 1] $\frac{(\frac{1}{2}\text{ diàmetre gran})^2}{AD \times DB} = \frac{AL \times LF}{LO \times LP}$ i, finalment, $\frac{AL \times LF}{LO \times LP} = \frac{HK^2}{AK \times KB}$.

i) Proveu que, si $\frac{LM^2}{LC^2} = \frac{HK^2}{KC^2}$, llavors $\frac{LM}{LC} = \frac{MK}{KC}$. I d'això es deduirà l'alineació. [*Indicació.* Vegeu la nota 1233 de CE 7 (pàgina 439).]

Problema 46. Proveu que la figura inscrita en el segment de paraboloide és més gran que el con $\triangle X$.

Problema 47. Demostreu la proposició CE 11 (pàgines 444-445).

Problema 48. Establiu que el rectangle de costats AH i HC és al de costats EH i HF com el quadrat de costat NT al de costat TB. Figura CE 12 (pàgina 446).

Problema 49. Vegeu que, efectivament, és absurda la situació en la qual trobaríeu dos plans perpendiculars en un mateix pla per un segment que no és perpendicular al darrer d'aquests plans[, perquè heu suposat que l'eix no és perpendicular als plans]. [*Indicació.* Vegeu la nota 1278 (pàgina 1278).]

Problema 50. Proveu que, si $0 < \hat{\alpha} < \hat{\beta} < \frac{\pi}{2}$, aleshores $\frac{\sin\hat{\alpha}}{\sin\hat{\beta}} < \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} < \frac{\tan\hat{\alpha}}{\tan\hat{\beta}}$. [*Indicació.* Vegeu Pla (2021), p. 143.]

Problema 51. [La fórmula d'Heró] Voleu establir la validesa de la fórmula d'Heró (pàgina 142).

Considereu el triangle $\triangle ABC$.

Siguin a, b i c les longituds dels costats BC, CA i AB, respectivament.

Proveu que:

a) Les tres bisectrius del triangle $\triangle\, ABC$ es tallen en un punt H que és el centre del cercle inscrit en el triangle $\triangle\, ABC$. [*Indicació.* Pla (2018), problema 40, p. 65.]

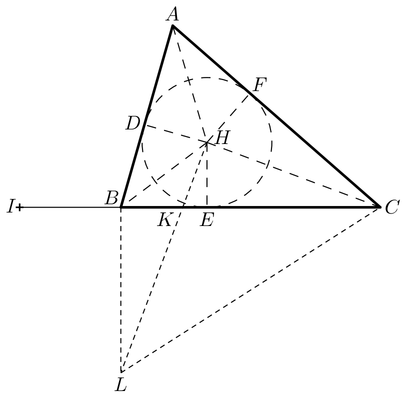


Figura 2.43. Problema 51

b) L'àrea $\mathcal{S}_{\triangle\, ABC}$ del triangle $\triangle\, ABC$ és igual a $p \times r$, en què $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ i r és el radi del cercle inscrit.

c) Vegeu, ara, els passos de l'establiment de la fórmula d'Heró:

c_1) Uniu el centre H del cercle inscrit en el triangle $\triangle\, ABC$ amb els vèrtexs A, B i C del triangle i els radis perpendiculars als costats AB, BC i CA [P 1 i EI 10].

c_2) Prolongueu CB amb el segment BI igual a AD [P 2].

Òbviament IC té la longitud del semiperímetre p.

c_3) Pel punt H, tireu la perpendicular HL a HC i, pel B, BL a BC [EI 11].

Es tallen en un punt L [P 5].

c_4) Observeu que el quadrilàter $\square\, LBHC$ és circumscrivible. [*Indicació.* Els angles $\widehat{CHL}$ i $\widehat{ABL}$ són rectes. Per tant, LC és el diàmetre del cercle que circumscriu el quadrilàter [EIII 31].]

c_5) I els angles $\widehat{CAB}$ i $\widehat{AHD}$ són iguals [Nc 1 o EI 10, P 4, Nc 2 i Nc 3]. [*Indicació.* Les parelles d'angles $\widehat{CHB}$ i $\widehat{CAB}$, $\widehat{CHB}$ i $\widehat{AHD}$ sumen dos angles rectes [EIII 22 i per construcció].]

c_6) Les parelles de triangles $\triangle\, CLB$ i $\triangle\, AHD$, i $\triangle\, EHK$ i $\triangle\, BAK$ són semblants [EI 32, Nc 2, Nc 3 i DVI 1, i EI 28 i EI 29].

Per tant, $\frac{BC}{BL} = \frac{DA}{DH} = \frac{BI}{EH}$ [DVI 1, EVI 2, EV 7 i DI 15].

De retop, *alternando* [EV 16], $\frac{BC}{BI} = \frac{BL}{EH} = \frac{BK}{KE}$ [EVI 2].

Aleshores, *componendo*, $\frac{IC}{BI} = \frac{BE}{KE}$ [EV 18].

I, per EVI 1, Nc 1 o EV 10, i EVI 12, $\frac{CI^2}{CI \times BI} = \frac{BE \times CE}{EK \times CE} = \frac{BE \times CE}{EH^2}$.

Finalment, usant Evi 22 estès a àrees i l'ítem b, obtenim el que cercàvem. [*Indicació.* Substituïu, ara, $BI = p-a, CE = p-c, AE = p-b, CI = p$ i $EH = r$. Vegeu Dijksterhuis (1987), p. 412-414.]

d) Sabríeu fer alguna altra mena de demostració? [*Indicació.* En línia a <http://www.ms.uky.edu/~corso/teaching/math330/Heron.pdf>.]

Problema 52. [El problema de la corda trencada] Siguin AB i BC dues cordes diferents d'un cercle. El segment angular ACB rep el nom de *corda trencada.*

Siguin M el punt mitjà de l'arc $\widehat{ACB}$ i F el peu de la perpendicular per M sobre la corda més llarga. Afirmo que F és el punt mitjà de la corda trencada.

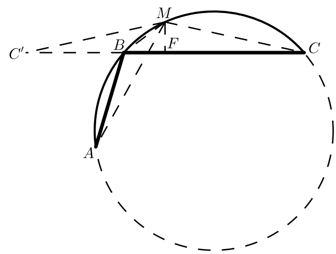


Figura 2.44. Problema 52

Reviseu la demostració següent:

Prolongueu CB de manera que el segment FC' sigui igual a FC. [P 2 i Ei 2 o Ei 3]

Els triangles $\triangle MBC'$ i $\triangle MBA$ són semblants perquè tenen els angles iguals.[Ei 47, Ei 5, Ei 32, Eiii 21 i Evi 4]

I el costat BM és comú.

Per tant, BC' i BA són iguals. [Dvi 1]

En conseqüència, el segment CC' —que s'obté ajuntant AB i BC— és igual a ACB.

El punt F el dimidia perquè dimidia el segment CC'. [Nc 6′]

Problema 53. El resultat de la corda trencada equival a demostrar la identitat trigonomètrica $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$. [*Indicació.* Suposeu que $\widehat{MC} = 2\,\alpha$ i $\widehat{MB} = 2\,\beta$. D'això en resulta que $\widehat{AB} = 2\,(\alpha-\beta)$. Les cordes són: $MC = 2\,\sin\alpha, BM = 2\,\sin\beta$ i $AB = 2\,\sin(\alpha-\beta)$. Les projeccions de MC i MB sobre BC són $FC = 2\,\sin\alpha\cos\beta$ i $FB = 2\,\cos\alpha\sin\beta$.]

Si considereu BC, que és igual a BF i FC, podreu establir la fórmula de $\sin(\alpha+\beta)$.

Problema 54. [La construcció de l'heptàgon regular]

Comenceu fent una anàlisi de l'heptàgon regular.[465]

465. Recordem que l'anàlisi del pentàgon regular porta a considerar el

a) Considereu l'heptàgon regular $⬠ BHLZGEF$.

La diagonal BZ talla HE pel punt K i HG pel A.

I BG talla HE per T.

Designeu x, y i z les longituds dels segments ZA, AK i KB i α l'angle inscrit que correspon a un arc que és la setena part de la circumferència.[466]

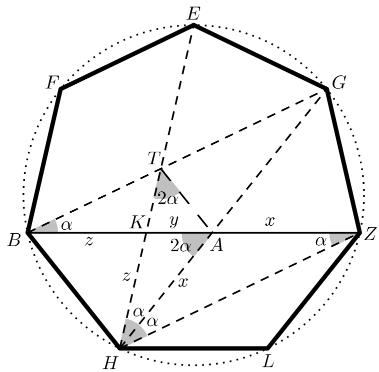


FIGURA 2.45. L'heptàgon regular

Òbviament, AH amida x, i KH z. [EIII 21 i EI 5]

Els triangles $\triangle ZHK$, $\triangle HAK$ i $\triangle HTA$ són semblants. [EVI 4]

La proporcionalitat dels costats corresponents porta a les proporcions: $\frac{z}{x+y} = \frac{y}{z}$ i $\frac{z}{x} = \frac{x}{y+z}$.

En conseqüència, CF' —igual al segment trencat que obteniu ajuntant AB i BF— és igual a FC.

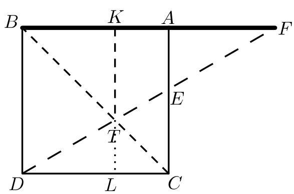


FIGURA 2.46. La diagonal existeix

b) Trobeu tres segments alineats de longituds x, y i z.

Tot consisteix a considerar la diagonal BC del quadrat $\square ABCD$ i la transversal $DTEF$ perquè els triangles $\triangle DTC$ i $\triangle AEF$ siguin iguals.[467]

Aquesta diagonal existeix. [*Indicació.* Feu girar la transversal pel vèrtex D.]

Un cop tirada la transversal, considereu les perpendiculars TK i TL per T a AB i CD, respectivament [EI 12].

Per construcció $DC \times LT$ i $AF \times AE$ són iguals.

triangle isòsceles amb els angles de la base dobles que l'angle en vèrtex, i a la divisió d'un segment —la diagonal— en mitjana i extrema raó. PLA (2018), nota 580, p. 175 i 252-255.

466. WAERDEN (1954), edició de 1961, p. 226-227.

467. Aquesta construcció no es pot fer amb regle i compàs. Cal recórrer a la *neusi*. De fet, apareix per primera vegada en l'obra d'Hipòcrates de Quios sobre les lúnules. Vegeu el § 3.4.7, ítem 4, de PLA (2016*b*), p. 244-248.

Però tenim que $TL = LC = AK$ [EI 6 i EI 33] i, de retop, $AB \times AK$ i $AF \times AE$ són iguals [EVI 1].

Atès que $AB > AE$, resulta que $AF > AK$ [EVI 16 i DV 7].

Usant que $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{TL} = \frac{AF}{LD}$ i que $\frac{TL}{TK} = \frac{LD}{KF}$ o $\frac{AK}{KB} = \frac{KB}{KF}$, resulta que $AB \times KB = AF^2$ i $ZF \times AK = KB^2$, que és el que volíem establir.

Resulta que la mida de TK és z; la de TL, y, i la de AF, x.

Problema 55. Dividiu una esfera en tres parts mitjançant dos plans paral·lels: *a*) Amb superfícies equivalents. *b*) Amb volums equivalents.

Problema 56. En la figura de la pàgina 136, suposem que el cercle és una el·lipse. Proveu la validesa dels passos següents:

a) $\frac{EA}{AQ} = \frac{EC}{QS} = \frac{MS}{QS} = \frac{AC}{AS} = \frac{HA}{AS}$. [*Indicació.* Useu EVI 4 i $HA = AC$ i $EC = MN$.]

b) $\frac{MS^2}{MS \times QS} = \frac{HA}{AS}$. [*Indicació.* Useu EVI 1.]

c) La raó $\frac{AS \times SC}{SO^2}$ és constant. [*Indicació.* És una propietat de l'el·lipse. De fet, en una el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tenim que $\frac{(a-x)\,(a+x)}{y^2}$ és constant.]

d) $\frac{AS^2}{SQ^2} = \frac{AK^2}{KB^2}$. [*Indicació.* Useu EVI 4.]

e) $\frac{PS^2}{PO^2} = \frac{AS^2}{AS \times SC2}$. [*Indicació.* Useu EVI 16.]

f) $\frac{QS}{QM} = \frac{AS}{EM} = \frac{AS}{SC}$. [*Indicació.* Useu EVI 2.]

g) $\frac{QS^2}{SP \times QM} = \frac{AS}{AS \times SC} = \frac{QS^2}{SO^2}$.

h) $SO^2 = SP \times QM$. [*Indicació.* Useu EV 9.]

i) $QS \times (QM + QS) = QS \times MS = QS^2 + SO^2$. [*Indicació.* Useu EII 3.]

j) $\frac{HA}{AS} = \frac{MS^2}{MS \times SQ} = \frac{MS^2}{QS^2 + SO^2}$. [*Indicació.* Useu EVI 1.]

k) $HA \times (\bigcirc OP + \bigcirc QR) = AS \times \bigcirc MN$. [*Indicació.* Useu EXII 2.]

En definitiva, $HA \times v(\text{con}) + v(\text{el·lipsoide}) = AK \times v(\text{cilindre})$. [*Indicació.* Useu el mètode d'Arquimedes (pàgina 132).]

Problema 57. Proveu el supòsit que fa Arquimedes a CFI 8, nota 1397 (pàgina 499).

Sabríeu fer-ho basant-vos en EI 8, EI 4 i EI 13, EII 9, i EXI 14?

Problema 58. *a*) Recordeu l'equació de la quadratriu i doneu-la en coordenades polars, paramètriques i cartesianes. [*Indicació*. Pla (2016*b*), exercici 22, p. 252.]
b) Usant la descripció que fa Arquimedes de l'hèlix cònica generada per una espiral d'Arquimedes (§ 2.2.5a_2, pàgina 98), doneu-ne l'equació en coordenades paramètriques, polars i cartesianes.
c) Usant la descripció que hem fet de l'hèlix cilíndrica —cocleoide— generada per una espiral (§ 2.2.5a_2, pàgina 98), doneu-ne l'equació en coordenades paramètriques, polars i cartesianes.

Problema 59. Una *cocleoide* és una corba amb forma de cargol, similar a un *estrofoide*, que es pot representar amb l'equació polar $\rho = \dfrac{a\sin\theta}{\theta}$, en què a és un paràmetre.
a) Dibuixeu-la quan a_1) $a = 1$, a_2) $a = 0'75$ i a_3) $a = 3$.
b) Expresseu-la en coordenades cartesianes i també en forma paramètrica.

Problema 60. La corba estrofoidal que correspon a la corba $\mathcal{C}$, al punt fix A i al pol O es construeix de la manera següent. Sigui L una recta mòbil que passa per O i talla $\mathcal{C}$ per K. Siguin P_1 i P_2 els dos punts de L, de manera que $P_1K = P_2K = AK$. El lloc geomètric dels punts P_1 i P_2 s'anomena l'*estrofoide* de la corba $\mathcal{C}$ relativa al pol O i amb el punt fix A.
a) Considereu diverses corbes $\mathcal{C}$: un segment, un cercle, una paràbola, etc., i, en cada cas, un punt fix A i un pol O.
b) Dibuixeu els estrofoides corresponents.
c) Expresseu la corba $\mathcal{C}$ en coordenades polars —o cartesianes o paramètriques— i doneu l'equació corresponent de l'estrofoide en el mateix sistema de coordenades.
d) Demostreu que AP_1 i AP_2 són segments ortogonals.

Problema 61. Proveu que:
a) El segment FI de la figura B.5h_1 (pàgina 414) és perpendicular al radi BC.
b) Si talleu una superfície helicoidal d'equació $y = x\tan 2\pi\frac{z}{h}$ i un pla que passa per una de les generatrius rectes $z = m\,y$ i, un cop fet això, projecteu la intersecció ortogonalment en el pla $z = 0$, obteniu una quadratriu de Dinostrat.

Però, si el pla, en lloc de passar per una generatriu de la superfície helicoidal, és arbitrari, la projecció ortogonal és una quadratriu allargada o escurçada [Chasles (1860), p. 30].

c) El punt K de la figura B.5h_2 (pàgina 416), és a dir, de l'hèlix cònica es troba en la intersecció de les superfícies d'equacions $z^2 = x^2 + y^2$ i $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{r}{2\,\pi}$ arctan $\frac{y}{z}$.

Doneu l'equació de la corba en coordenades: cartesianes, paramètriques i polars.

Problema 62. Proveu que:

a) L'angle $\widehat{BHG}$ és agut (figura de la pàgina 570)?

b) L'afirmació anterior s'obté directament aplicant Ei 16 o Ei 32.

2.5 Programes

Programa 1. Feu un algorisme que proporcioni $\sqrt{3}$ amb deu xifres decimals exactes i digui quin error cometeu adaptant les fraccions $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{180}$ com a valor aproximat de $\sqrt{3}$.

Quines aproximacions obteniu amb les altres fitacions d'Arquimedes (pàgines 113-115)?

Programa 2. Feu un programa que simuli el «mètode iteratiu» que fa servir Arquimedes per a aproximar el valor de la raó $\frac{\mathcal{L}}{d}$, és a dir, del nombre π.

Determineu quin valor obteniu, si com fa Arquimedes, partiu d'un hexàgon regular i, després, considereu polígons de 12, 24, 48, 96, 192 i 384 costats.

Programa 3. Feu un programa que aproximi π seguint les indicacions de l'exercici 65 (pàgina 117).

Programa 4. Feu un programa que resolgui el sistema de set equacions lineals amb vuit incògnites de la pàgina 144.

Programa 5. Feu un programa que:

a) Calculi el nombre de vèrtexs (v), arestes (a) i cares (c) dels semipoliedres regulars.

b) Constati si la fórmula d'Euler $c + v - a = 2$ és vàlida.

Apèndix A

Textos de la vida i de les obres d'Arquimedes

> Tunc is, quum haberet eius rei curam, casu venit in balineum, ibique quum in solium descenderet, animadvertit, quantum corporis sui in eo insideret, tantum aquae extra solium effluere. Itque cum eius rei rationem explicationis ostendisset, non és moratus, sed exsilivit gaudio motus de solio et nudus vadens domum verius significabat clara voce invenisse quod quaereret; nam currens identidem graece clamabat: *Ευρηκα! Ευρηκα!*
>
> MARC VITRUVI POL·LIÓ[468]

468. «[Arquimedes] es va interessar per l'encàrrec que li havia fet el rei Hieró. Casualment estava a punt de rentar-se i, en entrar a la banyera, es va adonar que en sobreeixia tanta aigua com el volum del cos que hi submergia. Aquesta experiència tan concreta va fer que veiés ben clara la solució del problema i, exultant d'alegria, va sortir prest de la banyera, tot nu. Mentre anava cap a casa deia a tothom qui trobava pel carrer: "He resolt el problema". I, tot corrent, cridava una vegada i una altra: "*Ευρηκα! Ευρηκα!*"». VITRUVI (1995), llibre novè, capítol III, § IX, p. 212. Vegeu A.1.3 b_1 (pàgines 198-199).

Summis ingeniis dux i magister fuit.

JOHAN LUDVIG HEIBERG[469]

En aquest capítol aplegarem textos relatius a allò que ens ha arribat de la vida i la mort d'Arquimedes, i a les anècdotes que se li atribueixen.[470] Però, molt particularment, el dedicarem als fragments més significatius de la seva obra seguint la cronologia d'Itard.[471] El tancarem amb un text crític d'Eratòstenes.[472]

A.1 Notes de la vida d'Arquimedes i anècdotes

A.1.1 La vida i la vàlua del siracusà

p. 5 Com ja hem dit, els fets biogràfics coneguts i acceptables d'Arquimedes són escassos, però les anècdotes són quantioses.

A.1.1*a* La vida

El text de Tzetzes en proporciona l'edat, exposa alguns dels ginys que va inventar i recorda la frase que ratifica Pappos: «Doneu-me un punt on em pugui recolzar i aixecaré el món.» I l'altre text, de Valeri Màxim, lloa la prudència de Marcel quan vol salvaguardar la vida del geòmetra.

A.1.1a_1 [100] Arquimedes, el savi —inventor d'enginys mecànics—, va néixer a Siracusa i va dedicar tota la vida a l'estudi de la geometria. Li va arribar la mort als setanta-cinc anys. Va dominar les forces

---

469. «Va ser guia i mestre de l'enginy més alt.» HEIBERG (1880-1881), llibre III, prolegomena CXV.

470. A.1 (pàgines 180-209).

471. De B.1 a B.14 (pàgines 209-225, 225-248, 249-271, 271-348, 348-413, 417-455, 456-462, 462-487, 487-512, 513-548, 549-558, 558-568, 569-577 i 577-581). Sortosament, en català, disposem també de les traduccions acurades de MASIÀ (2010) i (2016), i de la traducció comentada del *Mètode* a ARQUIMEDES (1997), que conté una exposició molt detallada de la vida del siracusà.

472. B.15 (pàgina 583).

mecàniques i va construir molts ginys. Amb un de tres politges, va arrossegar un vaixell de càrrega[473] de cinquanta mil medimnes[474] usant només la mà esquerra.

Quan el general romà Marcel [110] va atacar Siracusa per terra i mar,[475] Arquimedes, amb els seus aparells, va aixecar els vaixells de subministrament dels [assetjadors] i els va penjar a la paret de la muralla de Siracusa. Després els va llençar de nou a les profunditats del mar amb la tripulació a bord. Marcel, veient aquests artefactes, es va allunyar una mica més de les muralles de la ciutat i l'ancià va mostrar als siracusans la manera com podien aixecar pedres de la mida d'un carro gran i projectar-les contra les naus romanes per enfonsar-les. Aleshores, el romà va fer retrocedir les naus a la distància del tir d'un arc comptada des de les muralles. Però el vell geòmetra va fer construir una mena de mirall hexagonal amb [120] petits miralls tetragonals a distàncies proporcionals a la mida gran.[476] Després el va moure amb cordes i frontisses fins a aconseguir centrar-lo, de manera que es convertís en el centre dels raigs del Sol del migdia, tant a l'estiu com a l'hivern. Els raigs solars, un cop s'hi reflectien, es concentraven en els vaixells, els incendiaven i els convertien en cendres, malgrat trobar-se a la distància d'un arc. Així fou com Arquimedes va aconseguir mantenir l'exèrcit de Marcel allunyat de les muralles de la ciutat.

I, en dialecte dòric, que era el propi de Siracusa, va dir: [130] «Doneu-me un punt on recolzar-me i amb el meu *caristió* (*χαριστίων*)[477] aixecaré el món» (*δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω*).[478]

---

473. A.1.1a_4 i A.1.1a_5 (pàgines 183-184).

474. El text parla de «medimnes (*μέδιμνος*)», una mesura de capacitat d'uns cinquanta-dos litres i mig. El vaixell tenia un volum, doncs, de 2.626,5 metres cúbics.

475. Aquest atac és descrit a Plutarc (1932-1946), *Marcel*, § xv i xvi; a Polibi (1925), llibre viii, § 3-7, i a Livi (2002), llibre xxiv, § 34.

476. Aquesta descripció del mirall ustori, Tzetzes la copia d'Antemi de Tral·les, Antemi de Tral·les (1777).

477. Dijksterhuis (1987), p. 16-18.

478. Aquesta expressió la trobem també en el llibre viii de la *Sinagogé* (*Συναγωγή*) o *Col·lecció matemàtica* de Pappos (A.1.1a_3, pàgina 183). També la proporciona Zonaràs en els termes següents: «"πὰρ κεφαλάν" ἔφη "καὶ μὴ παρὲ γραμμά"» (Thomas (1939), vol. ii, nota *c*, p. 22).

Segons Diodor,[479] quan la ciutat de Siracusa va ser traïda i lliurada totalment a Marcel o, segons Dió,[480] va ser saquejada pels romans mentre els ciutadans celebraven un festival nocturn en honor d'Àrtemis,[481] Arquimedes va ser occit de la manera següent. Estava inclinat sobre un diagrama mecànic, totalment absort, quan un soldat romà va intentar endur-se'l presoner. Ell, veient l'efecte de l'acció sobre la seva feina i sense adonar-se del que passava realment, va dir: [140] «No trepitgis el dibuix.»[482] El soldat va començar a estirar-lo i ell, en adonar-se que era un soldat romà, li va dir: «Que algú em doni un dels meus ginys.»[483] El romà, endut per l'excitació i espantat, va matar l'ancià, que havia esdevingut diví del tot gràcies a les seves obres. Quan Marcel se'n va assabentar, ho va lamentar molt i el va fer enterrar amb honor davant dels millors ciutadans i de tots els romans. I, amb una destral, va llevar la vida al soldat que l'havia mort.

Dió i Diodor han deixat constància de tot això i molts altres se n'han fet ressò: Antemi, l'escriptor de paradoxes, el primer, i Heró, Filó i Pappos, després. Però també tots el qui havien llegit sobre els seus ginys mecànics i s'havien assabentat del que havia aconseguit: el cargol per a poar aigua, el molí de vent, els rellotges d'aigua i el mirall reflector. I molts d'altres també que hem conegut per les seves obres.[484]

Pappos confirma que Arquimedes havia afirmat que només cal un punt per a aixecar la Terra.

p. 6 **A.1.1**$\boldsymbol{a_2}$ Moure un pes donat mitjançant una potència donada pertany a la mateixa teoria. Aquesta és una de les invencions d'Arquime-

Simplici, en el *Comentari a la física d'Aristòtil*, es refereix al «caristió» i diu que s'usava per a pesar. Favaro (1923). Es tracta molt probablement d'un giny semblant al polispast —de *πολύς*, 'molt', i *σπάω*, 'tirar'—, que s'usa per a aixecar i baixar vaixells.

479. Diodor de Sicília (1976), llibre xxvi, edició anglesa, vol. xi, p. 195-196.

480. Aquest text no s'ha conservat.

481. Nota 475.

482. Diu: *Ἀπόστηθι, ὦ ἄνθρωπε τοῦ διαγράμματός μου.*

483. Diu: *Ἐβόα, τὶ μηχάνημα τὶς ἐμῶν μοι δότω.*

484. Tzetzes (1826), llibre ii, 3, història 35, edició anglesa electrònica, p. 40-41. I el text grec d'aquest fragment a <http://seec.cat/wp-content/uploads/2012/04/primerpremi10.pdf>.

des, la que li va fer exclamar: «Doneu-me un punt on em pugui recolzar i aixecaré el món.»[485]

Procle parla de la facilitat d'usar una politja.

A.1.1*a*₃ Recordem el que s'explica sobre el que va dir Hieró a Arquimedes. Hieró de Siracusa havia fet construir un vaixell de tres pals per a regalar-lo al rei Ptolemeu d'Egipte. Com que els siracusans no podien fer-lo surar, Arquimedes se les va haver d'enginyar perquè Hieró, tot sol, el desplacés fins a la riba del mar. Davant d'això, Hieró va exclamar amb gran delit: «A partir d'aquest dia, ens hem de creure tot el que digui Arquimedes.»[486]

És curiosa aquesta dualitat. Vitruvi, que coneixia perfectament l'obra d'Arquimedes, quan fa referència a les politges múltiples, no l'esmenta. I, tanmateix, és anterior a Procle, que sí que ho fa. p. 17

A.1.1*a*₄ [9] Es baixen les cordes al bloc inferior per la part interior i es passen per les dues politges, que es treuen enfora per poder-les ajuntar amb les dues col·locades a la part més alta. Després, es duen a la part inferior una vegada i una altra. En el peu de la màquina, s'hi fixa un tercer aparell de politges que en grec s'anomena $\epsilon\pi\alpha\gamma o\nu\tau\alpha$ i, en la nostra llengua, *artemon*. Se subjecta bé. Consta de tres politges, per les quals es passen unes cordes que s'han d'estirar per fer funcionar l'aparell. D'aquesta manera, tres quadrilles d'homes poden elevar les càrregues amb rapidesa i sense cabrestant (o argue).[487] *Polispast* (o *bossell*) és el nom d'aquesta màquina, que té moltes politges i ofereix una gran comoditat i rapidesa de maneig. El fet que solament utilitzi una fusta fa que el pes es pugui col·locar al costat dret o esquerre, com es vulgui, només inclinant-la.[488]

485. PAPPOS (1932), llibre III, XI, proposició 10, edició francesa, vol. I, p. 836-837.

486. PROCLE DE LÍCIA (1970), § 63, línia 16, edició anglesa, p. 51. I, francesa, p. 54.

487. DIEC (1995): «Màquina per a moure o alçar grans pesos, consistent en un torn de tambor vertical sobre el qual s'enrotlla un cable.»

488. VITRUVI (1995), llibre X, capítol II 3, edició castellana, p. 251.

A.1.1a_5 El nom d'aquest dispositiu mecànic és *trispast* (*τρῖσπαστος*) perquè gira mitjançant tres politges. Si en té dues en l'arreu inferior i tres en el superior en diem *pentapast* (*πενταπαστος*).[489]

A.1.1a_6 Sobre les màquines van escriure-hi autors com Diades, Arquites, Arquimedes, [...] i Filó de Bizanci. Em vaig adonar que els grecs n'havien publicat molts més volums que no pas els nostres escriptors. Tot allò que he considerat útil de les seves obres per al tema que ens ocupa ho he sintetitzat en un de sol.[490] En efecte, el primer que va preparar la publicació d'una obra sorprenent sobre aquest tema va ser Fufici. I Varró, dins del seu *Tractat de les nou ciències* (*Disciplinarum libri* IX), en va dedicar una a l'arquitectura [...].[491]

A.1.1*b* La vàlua

Valeri Màxim lloa la prudència de Marcel.

A.1.1b_1 Amb una demostració de gran prudència, va manar que ningú no li llevés la vida, considerant que el fet d'haver-l'hi salvat li donaria tant d'honor com la presa de Siracusa.[492]

p. 5 El primer que va infomar d'aquest fet va ser Plini el Vell.

A.1.1b_2 «Glòria a Arquimedes!» és el reconeixement de Marcel a la seva gran vàlua, basada en els seus coneixements de geometria i els seus ginys mecànics. Quan Siracusa va caure en mans dels romans, va ordenar que li respectessin la vida, però la imprudència dels soldats va fer que el seu desig no es complís.[493]

489. Vitruvi (1995), llibre x, capítol ii 9, edició castellana, p. 249.
490. Vitruvi (1995), llibre vii, edició castellana, p. 169.
491. Vitruvi (1995), llibre vii, introducció 14, edició castellana, p. 169. Les nou ciències eren les del trívium i el quadrívium, la medicina i l'astronomia: g ramàtica, didàctica, retòrica, geometria, aritmètica, astronomia, música, medicina i arquitectura.
492. Valeri Màxim (1471), llibre viii 7, edició castellana, p. 7.
493. Plini (2002), llibre vii, xxvii [1], edició castellana en línia, p. 314.

I ho va reblar Ciceró.

A.1.1*b*$_3$ [131] Tornant a Marcel, [. . .] diuen que va fer cercar Arquimedes, aquell home talentós i gran coneixedor de la ciència. En saber que havia mort, li va saber molt de greu.[494]

Dant, però, no l'esmenta i, en canvi, Vitruvi el situa entre els més grans geòmetres grecs. p. 17

A.1.1*b*$_4$

Després, aixecant un xic les celles,
vaig cercar el mestre dels qui desitgen rebre
la llum dels estels filosòfics.
  Tots el contemplaven i l'honoraven.
  I jo mirava cap a Sòcrates i Plató,
que són els dos que li són més propers.
  També Demòcrit, que va ser creador per atzar,
Anaxàgores, Diògenes, i
Tales i Heràclit. I l'ordenador
de qualitats, Dioscòrides, i la clara
faç de Zenó.[495] I Empèdocles i Orfeu,
Linus i Tul·li. I Sèneca, amb la cara
de moralista, Euclides, Ptolemeu
Hipòcrates (de Cos), Galè, Avicenna
i el gran comentarista, Averrois.
I tants d'altres, de qui el nom i
la grandesa em costa recordar,
perquè un no pot dir tot el que val la pena.
  Després ens vam separar dels quatre
i el mestre em va dur per la via tosca,
lluny de la pau i a prop del gemec.
I vam entrar dins l'imperi de la foscor.[496]

494. Ciceró (1929-1953), llibre iv, lviii, edició catalana, vol. v, p. 77.
495. No sabem si es refereix a Zenó d'Elea o a Zenó de Cítium.
496. Dante Alighieri (1304), cant iv, edició catalana de 1950, vol. i, p. 54-55. Recordem que, per a Dant, el «mestre» és Aristòtil, «el filòsof».

A.1.1b_5 Tots aquells als quals la natura ha concedit prou enginy, agudesa i memòria per a assolir profunds coneixements de geometria, astrologia, música i altres ciències, i que aconsegueixen sobrepassar les funcions dels arquitectes, s'acaben convertint en matemàtics.[497] Així els resulta senzill discutir sobre aquestes ciències, ja que estan proveïts dels nombrosos dards de llurs coneixements. Realment són persones rares, i es compten amb els dits. Em refereixo a erudits com ara Aristarc de Samos, Filolau, Arquites de Tàrent, Apol·loni de Perge, Eratòstenes de Cirene, Arquimedes i Escopines de Siracusa, que ens van llegar molts instruments orgànics, gnomònics, els quals van descobrir i explicar d'acord amb les lleis de la matemàtica i de la natura.[498]

A.1.2 El setge de Siracusa i la mort d'Arquimedes

A.1.2*a* El setge i la caiguda de Siracusa

Reunim, ara. cinc textos que expliquen la caiguda de Siracusa —i, de retruc, de Sicília— a mans del general romà Marcel. Són textos de Polibi (200-118 aC), Tit Livi (59 aC - 17 dC), Valeri Màxim (15 aC - 35 dC) i Plutarc (46-127 dC). Aquest darrer autor planteja un paral·lelisme entre Pelòpides i Marcel i, en parlar del general romà, dedica un text força extens i detallat a Arquimedes.

A.1.2a_1 Llibre VIII, III [3] Disposaven de vímets, projectils i tot el necessari en cas de setge. Gràcies a l'abundància de mà d'obra estaven convençuts que superarien l'enemic en cinc dies. No van calcular, però, la força d'Arquimedes ni van preveure que, de vegades, l'enginy resulta més eficaç que un aplec de mans. Però els esdeveniments els feren comprendre la veracitat d'aquesta sentència. [4] La ciutat estava molt ben fortificada. La muralla l'envoltava i, en alguns indrets, es trobava en llocs molt elevats, en cims de pujols. Aquests indrets, àdhuc quan no estaven defensats, eren de molt difícil accés i això en dificultava la conquesta. Solament era feble en uns pocs llocs molt

497. Vitruvi era arquitecte i, en aquest text, fa una distinció entre qui és teòric i qui aplica la teoria.

498. VITRUVI (1995), llibre I, capítol I 17, edició castellana, p. 31.

concrets. [5] Arquimedes havia disposat, dins la ciutat, un aparat tan important de defenses pensades tant per als atacs per Terra com per a les escomeses per mar, que als defensors de la ciutat no els calia ja més temps per a preparar la defensa. Estaven en situació de respondre a l'atac.[499]

A.1.2a_2 Llibre VIII, V [1] Els romans, ben avituallats, pensaven prendre les torres. [2] Però Arquimedes havia disposat ginys per tal de protegir tots els espais oberts pels quals l'enemic podia envair la ciutat. I, de lluny, feria els assaltants amb catapultes molt potents.

Col·locava els ginys en una situació molt compromesa i difícil. [3] I, en feia servir de mides diferents, proporcionats a cada distància. Amb això desencoratjava els romans, els impedia la invasió i debilitava l'escomesa. [4] Quan es va fer de nit, Marcel[500] es va veure obligat a retirar-se i ocultar-se. [5] I, quan la infanteria romana estava a tir, feia servir ginys contra els que lluitaven des de les naus. [6] Va construir una gran quanti tat d'obertures d'un pam a la banda exterior de les muralles, a l'altura d'un home. Dins la muralla hi va apostar arquers i escurçons que disparaven damunt la flota sense descans i anorreaven els atacants. Així tenien al seu abast tant els que eren a prop com els que eren més lluny. N'occiren la majoria. [8] I encara, quan els romans preparaven les sambuques, s'aixecaven darrere la muralla per damunt dels merlets uns altres aparells que fins aleshores havien restat ocults. [9] Transportaven pedres que pesaven com a mínim sis-centes lliures i blocs de plom. Aquestes màquines de guerra, amb un sistema de rotació, es col·locaven en la situació idònia i, amb un mecanisme de fona, llançaven damunt els atacants la pedra i el plom [11], segaven la vida dels homes i posaven en perill les naus.

VI [1] A més, es protegien dels trets dels atacants amb uns enreixats de vímet. [2] Llançaven pedres contra les proes dels vaixells i tenien una grapa de ferro que, estirada per una cadena que la subjectava, es manejava com una nau i era capaç d'enganxar les proes de les naus atacants. [3] I, un cop enganxades, s'aixecava i les deixava incli-

499. POLIBI (1925), llibre VIII, capítol III, edició catalana, p. 94-95.
500. A l'edició catalana de POLIBI (1925), p. 96, l'anomenen Marc.

nades a la muralla de la proa a la popa. Així, els artefactes de la proa de les naus quedaven inutilitzats. I un cop afluixada la cadena [4], unes s'enfonsaven i unes altres bolcaven i s'inundaven. Tot això causava una gran confusió en la flota romana. [5] Marcel, totalment pertorbat per les defenses d'Arquimedes, veia com, una vegada i una altra, els seus atacs eren repel·lits. I això li provocava gran dany i l'avergonyia. Però, tot i que es va disgustar en gran manera, [6] va fer broma amb les gestes d'Arquimedes tot dient: «Aquest home ha convertit les nostres naus en gerres per a poar aigua i les sambuques, indignes de la companyia, són percudides i tretes d'escena.» Aquesta va ser la fi del setge per mar.[501]

A.1.2a_3 Llibre XXV [31] Havent refrenat així la impetuositat dels soldats i donat temps i ocasió perquè s'escapessin els desertors que eren a Acradina,[502] els siracusans van quedar alleujats de les aprensions i van obrir les portes. Van enviar de seguida una delegació a Marcel amb l'única petició que ells i els seus fills quedessin indemnes. Aquest va convocar un consell de guerra, al qual van assistir els refugiats siracusans que eren al campament romà, i va replicar així a la delegació: «Els crims comesos contra el poble de Roma durant aquests últims anys per aquells que controlaven Siracusa són molt superiors a tots els bons serveis de Hieró durant els cinquanta anys del seu regnat. La majoria, és cert, han recaigut sobre els caps dels culpables, i ells mateixos s'han castigat per la seva violació dels tractats amb encara més severitat de la que pogués haver desitjat el poble romà. Durant tres anys he estat assetjant Siracusa, no perquè Roma la vulgui esclava, sinó perquè els caps dels desertors i renegats no la poguessin mantenir oprimida i esclavitzada. El que els siracusans hagin

501. Polibi (1925), llibre VIII, § V i VI, edició catalana, p. 96-97.

502. Acradina (Ἀχραδίνη) és el nom d'un barri de l'antiga ciutat de Siracusa que significa 'terra de pereres salvatges'. Allà hi ha la pedrera Latomia dels caputxins que s'usava ja al segle VI aC i de la qual ofereix una descripció Tucídides (A.1.3*i*, pàgines 207-208). Avui Acradina és la cinquena circumscripció de la ciutat. Una «latomia» (*latomia*) era una cova en la qual s'empresonaven els esclaus. És una paraula llatona que deriva de la grega *λατομίαι*, composta de *λάς*, 'pedra', i *τομίαι*, derivat de *τέμνειν*, 'tallar'.

pogut fer queda palès en les actuacions d'aquells que han viscut dins les línies romanes, com la de l'hispà Mèric, que va rendir els seus homes, i, finalment, per la tardana però valent resolució que ara heu pres. Després de totes les fatigues i els perills patits durant tant de temps davant les muralles de Siracusa, per mar i per terra, el fet que hagi aconseguit capturar la ciutat no suposa per a mi tanta recompensa com la d'haver pogut salvar-la.» Després de donar aquesta resposta, va enviar el qüestor amb una escorta a Nasos per rebre, sota la seva custòdia, el tresor reial. Acradina va ser lliurada al saqueig de la soldadesca després d'haver posat guàrdies a les cases dels refugiats que es trobaven dins de la part romana. D'entre molts altres horribles exemples de fúria i rapacitat, s'ha de destacar el destí d'Arquimedes. No pot deixar de quedar gravat per sempre més a la memòria que, enmig de tot el terror i enrenou produïts pels soldats que corrien per la ciutat capturada a la recerca de botí, el geòmetra restava absort en silenci davant d'algunes figures geomètriques que havia dibuixat a la sorra, i que va ser assassinat per un soldat que no sabia qui era. Marcel, en conèixer el fet, va quedar molt afligit i va encarregar que el funeral fos apropiat a la vàlua de l'home. Assabentat d'on es trobaven els seus familiars, els va protegir i honrar en nom i memòria d'Arquimedes. Aquestes foren, principalment, les circumstàncies sota les quals es va capturar Siracusa. El valor del botí va ser gairebé més gran que si s'hagués pres Cartago, la ciutat que lliurava una guerra amb Roma en peu d'igualtat. Uns dies abans de la captura de Siracusa, Tit Otacili va creuar des de Marsala[503] a Útica amb vuitanta galeres de cinc rengles de rems. I va entrar al port abans de l'alba i va capturar tot el botí que va poder. Va tornar a Lilibea, tres dies després d'haver marxat, amb cent trenta naus carregades de gra i botí. Va fer que el gra l'enviessin immediatament a Siracusa. Sense aquest subministrament tan oportú, tant els vencedors com els vençuts haurien patit molta fam.[504]

A.1.2a_4 L'activitat d'Arquimedes va ser molt profitosa per a ell: li havia donat la vida però també va fer que la perdés. Durant el setge de

503. L'antiga Lilibea.
504. Livi (2002), llibre xxv, [31].

Siracusa, Marcel s'havia adonat que eren els invents d'Arquimedes el que l'havien frenat tant de temps i havien obstaculitzat la seva victòria amb tanta perícia. No obstant això, estava tan encantat amb la intel·ligència superior d'aquest gran home que havia donat ordres explícites de conservar-li la vida, ja que considerava que seria tan reconegut per aquest fet com per la victòria mateixa. Però, mentre Arquimedes dibuixava figures amb la vista fixa a terra, un soldat va entrar a la casa a robar i, posant-li l'espasa al coll, li va preguntar qui era. El geòmetra, interessat totalment a trobar la solució que buscava, no va encertar la resposta. Va posar les mans a terra i només va dir: «Si us plau no aixequeu polseguera.»[505] El soldat va considerar que la resposta suposava un menyspreu a l'ordre que li havia donat i li va tallar el cap. En barrejar-se amb la sorra, la sang que va emanar de la ferida va esborrar la figura geomètrica. Per tant, l'activitat que li havia reportat tantes satisfaccions al llarg de la vida, li va causar la mort.[506]

A.1.2$\boldsymbol{a_5}$ XIV [1] Aleshores [Marcel], enutjat pels ultratges d'Hipòcrates, general dels siracusans que, per tal de complaure els cartaginesos i aconseguir la tirania, havia mort un gran nombre de romans a Leontins, pren aquesta ciutat sense fer cap mal al poble. Solament fa assotar i matar els desertors. [3] Llavors, Hipòcrates fa córrer per Siracusa la brama que Marcel passa a degolla tot el jovent de Leontins. I, quan té irritats els siracusans, pren la ciutat. En saber-ho, Marcel marxa cap a Siracusa amb tot l'exèrcit. [5] Acampa a prop de la ciutat i envia ambaixadors que expliquin la veritat dels fets de Leontins als habitants. [5] El siracusans, tanmateix, no se'l creuen perquè domina en ells el relat d'Hipòcrates.

Ataca, doncs, per terra i per mar. Api mena l'exèrcit de terra i una seixantena de galeres de cinc rengles de rems curulles d'armes de guerra i de catapultes. [6] A més, damunt una plataforma col·locada a sobre de vuit naus lligades juntes, transporten un giny. Marcel boga

505. Probablement escrivia damunt una capa de pols, com es feia en l'àbac romà antic.

506. Valeri Màxim (1471), llibre VIII, § VII, 7, edició castellana. En línia, p. 172.

cap a la muralla confiant en l'abundància i l'esplendor dels efectius i en el seu prestigi. [7] Però no compta amb Arquimedes i les seves invencions. [8] No les considera dignes d'un esforç seriós, sinó únicament exemplificacions pràctiques d'una geometria que el diverteix. En altres temps, el rei Hieró havia desitjat ardentment que el geòmetra derivés el seu art de les nocions abstractes a les coses materials i fes una teoria més evident per a la gent, una teoria més aplicada a coses tangibles que entressin pels sentits. I havia persuadit Arquimedes que ho fes així.

[9] Èudox i Arquites deuen a la mecànica —tan estimada i preuada en els nostres dies— el primer impuls que els va dur a brodar la geometria amb finesa i a tenir, davant de problemes difícils de veure, per simple raonament o per dibuix en el pla, un suport basat en els exemples sensibles i en els instruments,[507] [10] com ara el problema de les dues mitjanes proporcionals, element necessari per a moltes figures geomètriques. Tots dos el van resoldre recorrent a disposicions mecàniques i adaptant al seu propòsit una mena de línies intermèdies i seccions corbes. [11] Però Plató es va indignar molt per això i va arribar a dir que corrompien tot allò bo que té la geometria en allunyar-la de l'incorpori i l'ideal i dur-la als objectes sensibles, que necessiten molta mà d'obra per a ser realitzats. Així, la mecànica que havia quedat separada de la geometria i, de retruc, menyspreada pels filòsofs, havia esdevingut una art estratègica.

[12] I Arquimedes, parent i amic del rei Hieró, va escriure-li que, p. 17 amb una força adequada, és possible moure qualsevol pes donat. I asseguren que, endut per la passió de la jovenesa, va dir que, amb la força de la demostració, si pogués tenir una altra Terra, mouria la nostra des d'aquella. [13] Hieró, meravellat, li va demanar que executés el problema i li mostrés que podia moure una massa gran amb una força petita. Aleshores, Arquimedes va fer que traguessin de l'aigua un vaixell reial de tres pals. La tasca va requerir una munió de braços. Després el va fer omplir d'homes i de la càrrega habitual. Es va allunyar de la nau, es va asseure a terra, i, sense esforç, bellugant

507. Pla (2016*b*), p. 256-259, 310-312 i 323-328.

tranquil·lament l'extrem de cordes i politges amb una mà, va moure el vaixell cap al port tan llisament i sense entrebancs com si llisqués per l'aigua del mar. [14] Atònit, doncs, el rei es va adonar de la potència de la màquina[508] feta amb aquella art i va persuadir Arquimedes perquè li construís màquines defensives i ofensives per a quan hi hagués un setge. [15] Tanmateix, ell no se'n va servir perquè va viure en pau, en contínua festa. Però aquest giny va ser d'una gran utilitat als siracusans i també a qui l'havia creat.[509]

XV [1] Quan els romans van atacar la ciutat per les dues bandes, els siracusans, morts de terror, creien que no podien fer res en contra d'una força i una puixança tan imponents. [2] Però Arquimedes va posar en funcionament les màquines i va anar a l'encontre de l'enemic. De seguida van començar a caure, damunt l'exèrcit de terra, amb un gran brunziment i rapidesa, tota mena de pedres d'una grandària enorme. No hi havia cap manera d'arrecerar-se i protegir-se del seu pes. En queien un munt i desbarataven les línies. [3] A més, per damunt de les muralles van aparèixer unes antenes que feien caure sobre els vaixells pesos enormes que els enfonsaven o unes grapes de ferro i becs de grues que els aixecaven per les proes i els submergien verticalment per la popa, o que, mitjançant lligaments creuats, els feien giravoltar i rodar sobre si mateixos. I es rebatien contra els espadats i els esculls que sobresortien a la part baixa de la muralla. Així esclafaven i destrossaven els qui els tripulaven. [4] Molt sovint, un vaixell aixecat de les aigües, suspès i giravoltant, gitava els homes i els precipitava i escampava com si fossin llançats per una fona. El deixaven buit i, per fi, queia contra les muralles o es despenjava de l'urpa metàl·lica que el retenia. [6] La màquina que Marcel feia avançar des de la plataforma es deia *sambuca* per la semblança amb l'instrument musical d'aquest nom.[510] Quan encara es trobava a una certa distància de la muralla, li va caure al damunt una pedra de deu talents

508. Galè usa l'expressió *πολυσμάστος*. És la mateixa paraula que fa servir Hipòcrates de Cos en *De Articulations*. En canvi, Tzetzes parla de la *politja triple* (*τῇ τρισπάστῳ μηχανῇ*). Vegeu també Heath (1894), p. xx.

509. Compareu-lo amb els textos precedents.

510. Instrument grecoromà de corda, semblant a l'arpa. DIEC (1995). Era triangular i tenia quatre cordes.

depes,[511] i una segona i una tercera. Hi queien al damunt amb un gran estrèpit i terrabastall, li esclafaven la base i desballestaven les cordes que lligaven la plataforma. Marcel, perplex, es va allunyar amb la flota ràpidament i va donar l'ordre de retirada a l'exèrcit terrestre.

XV [8] En un consell de guerra, van acordar acostar-se, si es presentava l'ocasió, a les muralles de nit perquè els ginys d'Arquimedes serveixen —gràcies a la força que despleguen— per a llançar pedres molt amunt i, en conseqüència, molt lluny de les muralles. Però, en la distància curta, són ineficaços del tot. [9] Feia temps que Arquimedes també havia preparat ginys adequats per a distàncies i trets curts. Havia fet foradar la muralla amb obertures petites però nombroses, molt properes les unes de les altres, i hi havia fet col·locar escorpions de curt abast[512] però prou potents per a colpir l'enemic que estigués a prop de la muralla. Els havia fet instal·lar de manera que restessin ocults a la mirada de l'invasor.

XVI [1] Així, doncs, quan els romans es van trobar al peu de la muralla i creien que havien passat desapercebuts i que estaven a recer de les eines de guerra dels que es troben intramurs, van rebre una pluja de sagetes i pedres que els impactaven al cap en caiguda vertical. Van recular. [2] Però això no va ser tot. Quan, en la retirada, ja es trobaven lluny de la muralla van ser fuetejats novament pels ginys que ja els havien destrossat abans. Es va esdevenir una gran desfeta d'homes i una terrible destrossa de naus que no podien respondre a l'embat de l'enemic. [5] I és que, efectivament, Arquimedes havia fabricat les seves màquines a recer de les muralles i als romans els semblava que lluitaven contra déus perquè milions de mals els arribaven des d'una font invisible.

XVII [1] Marcel, però, va escapar dels perills i es va adreçar als seus artífexs i enginyers dient-los: «Com acabarem amb aquest Briàreu —gegant de cent braços— de la geometria[513] que a cops d'urpes ha destrossat la sambuca i ens ha vilipendiat? Supera els monstres amb cent mans disparant-nos des de tants indrets alhora.» [3] Perquè, de

511. Uns 500 quilograms.

512. Catapulta petita que serveix per a tirar dardells.

513. Amb el sentit de «gegant amb cents argúcies».

fet, tots els siracusans eren el cos de la maquinària d'Arquimedes, però l'ànima que ho animava tot era una de sola. Les altres armes van restar quietes i la ciutat només feia servir les seves per a l'atac i per a la defensa.
[4] A la fi, Marcel, observant l'esfereïment dels romans quan veien una tija metàl·lica o de fusta sobresortint per damunt de les muralles, que vociferaven que Arquimedes movia alguna màquina contra ells i que giraven l'esquena i fugien a correcuita, va desistir de combatre i assaltar la ciutat i va confiar que el temps ho arranjaria tot.

XVII [5] I, no obstant això, Arquimedes, que posseïa un esperit tan sublim, una ànima tan pregona i una riquesa tan curulla d'imaginació que els seus ginys li havien donat un gran renom i la glòria d'una intel·ligència superior a la humana, de fet, divina, no va voler deixar cap tractat d'aquests ginys, [6] perquè considerava que l'enginyeria i, en general, tota art relativa a les qüestions pràctiques eren innobles i vulgars.[514] La seva ambició la posava només en aquells estudis la bellesa i la subtilesa dels quals no es barrejava amb l'aplicabilitat, [7], aquells que no poden comparar-se, en res, amb els altres i que representen una disputa entre la matèria i la demostració. Les primeres proporcionen la grandesa i la bellesa mentre que les segones proporcionen l'exactitud i la força en grau superlatiu [8] perquè és impossible trobar en geometria proposicions més difícils i més importants tractades amb tanta simplicitat, elegància i netedat. [9] Hi ha qui ho atribueix al talent natural de l'home; d'altres, a un excés de treball que aconseguia presentar-les com si s'haguessin assolit amb simplicitat i sense esforç. [10] Sols no aconseguiríem trobar-les però, un cop llegides les que ell proporciona, sembla que també les hauríem pogut formular per nosaltres mateixos. Tan ràpid i planer és el camí que duu a la prova. [11] No hi ha, doncs, cap raó per a no creure el que es diu d'ell. Vivia sempre atret per una sirena familiar i domèstica. S'oblidava de menjar i negligia la higiene. I quan l'obligaven a banyar-se,

514. De fet, Plutarc recorre a l'opinió platònica però hi ha un altre motiu possible: els treballs i els plànols dels ginys de guerra s'havien de mantenir en complet secret. Això no obstant, és totalment increïble que no se n'hagi conservat cap. Vegeu PLA (2016*b*), p. 334-335 i p. 414, nota 929.

s'entretenia dibuixant figures geomètriques en la cendra dels fogars. I, fins i tot en el cos untat amb ungüents, hi tirava línies dominat per la passió i el plaer, posseït per les muses. [12] Autor de moltes descobertes d'una gran bellesa, va demanar als amics i parents que, un cop hagués mort, dibuixessin un cilindre circumscrivint una esfera en la seva tomba i, com a inscripció, hi posessin la proporció amb la qual el sòlid continent excedeix el sòlid contingut.[515]

xviii [1] Així era Arquimedes, l'home que, amb les seves capacitats, va conservar invicte tant la ciutat com a si mateix.[516]

A.1.2*b* La mort d'Arquimedes

Els textos sobre la mort d'Arquimedes —que complementen els que es descriuen a A.1.2*a* sobre la descripció del setge de Siracusa— els hem recollit a *Grècia IIIa*.[517] Ara, però, per lligar les descripcions del setge i les de la presa de Siracusa per les tropes de Marcel, completem el text de Plutarc que planteja un paral·lelisme entre la pena del general romà per la desfeta d'una ciutat tan preciosa i rica i la que sent per la mort dels seu il·lustre habitant. p. 17

A.1.2b_1 xix [1] A trenc d'alba, un cop conquerits aquests barris, Marcel va entrar a la ciutat per l'Hexapila[518] enmig dels oficials i soldats que el felicitaven. [2] I, mirant la ciutat des del punt més elevat i comprovant la seva grandesa i la seva bellesa, es va entristir i va plorar pel seu destí, perquè sabia el que hi esdevindria. El seu aspecte i la seva forma canviarien totalment pel saqueig al qual la sotmetria la soldadesca. [3] Cap dels seus oficials no es veia capaç d'oposar-se a l'enriquiment que el saqueig proporcionaria. Alguns fins i tot preferien que fos arrasada i incendiada. [4] Marcel va vetar aquesta possibilitat però els va permetre que en prenguessin els tresors i els esclaus.

515. En referència al porisma de la proposició ECi 34.

516. Plutarc (1932-1946), llibres ii i iii, *Pelòpidas i Marcellvs*, edició catalana, vol. viii (1937), p. 119-124.

517. A.6b_1, A.6b_2 i A.6b_3 de Pla (2016*b*), p. 310-311.

518. Una ala exterior formada per un parell de portes dobles, *ἐξαπυλα*, ja que *πυλα* vol dir, 'portal', «ala amb un parell de portes dobles».

[5] I va prohibir que els ciutadans[519] fossin morts, deshonrats o esclavitzats. [6] Malgrat aquesta moderació, se li barrejaven dos sentiments: l'alegria provocada per la conquesta i la llàstima pel destí de la ciutat perquè sentia compassió i pena, ja que sabia que perdria ben aviat la brillantor i la posteritat. [7] S'explica que [aquesta victòria] va proporcionar més riquesa de la que s'aconseguiria a Cartago més endavant.

La traïció li va lliurar també els altres barris, que van ser saquejats completament. Tant sols van respectar el tresor del rei. I el botí es va apartar per al fisc [de Roma]. [8][520] Però, sobretot, Marcel es va submergir en una gran desventura. [Arquimedes] es trobava tot sol al pati de casa seva, reflexionant sobre una figura geomètrica amb tota l'atenció física i mental. Tal era la concentració del seu esperit que no es va adonar que els romans havien aconseguit prendre la ciutat i que irrompien arreu. [9] De sobte, va entrar un soldat on ell era i li va manar que l'acompanyés a veure Marcel. Arquimedes es va resistir a fer-ho fins que no hagués acabat de resoldre el problema i n'hagués establert la demostració. El soldat, endut per la ira, va treure l'espasa, la va endinsar en el cos [d'Arquimedes] i el va matar. [10] D'altres diuen, en canvi, que el soldat, ja va entrar espasa en mà amb la intenció d'occir-lo i que, Arquimedes, en veure'l, li va pregar —i fins i tot suplicar— que s'esperés perquè ell no podia deixar la recerca inacabada i sense demostració. Però el soldat no li va fer cas i el va assassinar. [11] Una altra versió diu que Arquimedes portava instruments matemàtics a Marcel —quadrants astronòmics, esferes i escaires— perquè volia estudiar la magnitud del Sol. En el camí es va creuar amb uns soldats que, convençuts que portava or a la caixa, el van occir per a prendre-la-hi. [12] Tothom convé que, en saber-ho, Marcel es va entristir, va rebutjar l'assassí d'Arquimedes com si hagués perpetrat un sacrilegi i va enviar a buscar els seus parents per honorar-los.[521]

519. Els siracusans lliures.

520. A partir d'aquí, reproduïm el text A.6b_1 de Pla (2016*b*), p. 310.

521. Plutarc (1932-1946), volum segon, part tercera, *Marcel*, xix [1]-[12], edició catalana, tom viii, p. 125-126.

A.1.3 Algunes aportacions i aplicacions matemàtiques d'Arquimedes

A.1.3*a* La importància de les aplicacions matemàtiques

Pappos exposa la importància de les aplicacions de la matemàtica i esmenta alguns savis que s'hi van dedicar. Procle rebla el clau.

A.1.3*a*$_1$ Les arts més necessàries per a la vida són les següents: l'art p. 19
dels artificiers (*μαγγανάριοι*),[522] que els antics anomenaven *mecànics* (*μηκανικός*); la dels que fabriquen els ginys per a la guerra,[523] també anomenats *mecànics*, i la dels que s'anomenen *fabricants de màquines*.[524] També anomenen *mecànics* els il·lusionistes (*θαυμασιουραγοί*) que, com Heró a *Pneumàtiques* (*Πνευματικά*), treballen amb el vent, o d'altres que intenten reproduir el moviment amb l'ús de cordes de budell o d'espart, com Heró a *Autòmates* (*Αὐτόματα*) i a *Els equilibris* o a *Mecànica* (*Μηχανική*), o amb l'aigua, com Arquimedes a *Sobre els cossos que floten* (*Περὶ τῶν ἐπιπλεόντων σωμάτων*). O els que, com Heró a *Els vasos que contenen aigua*, fan rellotges [...]. Finalment, també s'anomenen *mecànics* els que són versats en la fabricació de l'esfera, *σφαιροποία*, i realitzen una representació del cel amb l'ajut del moviment uniforme i circular de l'aigua.

Hi ha autors que afirmen que Arquimedes de Siracusa coneixia totes aquestes arts i que era l'únic que les havia usat amb una naturalitat i perícia d'esperit sobre tota mena de coses, com Gemí, el matemàtic, en el seu llibre *L'organització de les matemàtiques* (*Θέορία τών μαθηματικω*). Segons Carp d'Antioquia, Arquimedes només va elaborar un text de mecànica, *L'esferope*. Aquest home admirable, reconegut per tots per la seva habilitat en l'art mecànica, dotat d'una intel·ligència superior, lloat per tothom, va elaborar, tanmateix, amb molta cura textos més abstractes sobre qüestions capitals de la

522. Referint-se als qui fabriquen les eines útils per al treball manual.
523. Diu: *οἱ ογρνοποιοί πρὸς τὸν πόλεμον ἀναγκαιοί.*
524. No queda clara quina mena de ginys fabriquen.

geometria que va connectar a l'aritmètica. Estimava les ciències que hem esmentat i evitava introduir-hi qualsevol cosa profana.[525]

I Procle afegeix:

A.1.3*a*₂ A més d'aquestes [arts o ciències] existeix una ciència que anomenem *mecànica* i que estudia una part [de les propietats] dels cossos perceptibles. Tracta de l'art que fa útils els ginys de guerra, com ara les màquines que es van emprar en la defensa de Siracusa i que s'atribueixen a Arquimedes. I de ginys molt elaborats moguts pel buf del vent, com comenten Ctesibi i Heró. L'equilibri i el desequilibri el provoquen el moviment i l'aturada produïts per cossos pesants, com mostra *Timeu*,[526] o per cordes i tensors que imiten els tendons i els moviments dels éssers vius. La mecànica també estudia la ciència de l'equilibri en general i del que es coneix com a *centre de gravetat*. A més, inclou l'art de fer esferes que simulen el moviment dels cossos celestes, tal com la va conrear Arquimedes. I totes les arts que analitzen el moviment dels cossos materials. En aquesta anàlisi, s'hi inclou l'astronomia, que es planteja els moviments còsmics, les mides i les formes dels cossos celestes, la llum que emeten, les seves distàncies a la Terra i totes les qüestions que s'hi relacionen.[527]

A.1.3*b* Arquimedes i la cocleoide

p. 17 Diodor Sícul recorda que Arquimedes va visitar Egipte i hi va inventar la *cocleoide*, fet que no és, però, avalat per Estobeu ni per Vitruvi, que en fa una descripció minuciosa.

p. 17 **A.1.3b_1** XXXIV. (38) La configuració del Delta s'assembla a la de Sicília. Cada costat té una longitud de cinc-centes cinquanta etapes i la seva base, que es renta amb l'aigua del mar, en té mil trescentes. Aquesta illa és travessada per nombrosos canals i obres humanes que en fan el més bell paratge d'Egipte.

---

525. Pappos (1932), llibre viii, introducció, edició francesa, vol. i, p. 810-814. Vegeu la nota 46 (pàgina 16).

526. Plató (2000), 57d 8-57e 10 i 62c 4-63a 8, edició catalana, p. 111 i 118.

527. Procle de Lícia (1970), § 41, línies 3-15, edició anglesa, p. 33-34, i francesa, p. 35.

La Terra al·luvial del Nil està molt ben regada. Produeix fruits abundants i molt variats (39). Cada any, després de la inundació, el Nil hi diposita llim nou i pot regar fàcilment tota l'illa mitjançant una màquina construïda per Arquimedes de Siracusa que s'anomena *cocleoide* per la forma que té.[528]

A.1.3*b*$_2$ (103) El que sorprèn més de tot això és que [els miners espanyols] van aconseguir treure tota l'aigua amb ginys que Arquimedes, natural de Siracusa, havia inventat quan es trobava a Egipte (104). Amb aquests feien pujar l'aigua fins a l'obertura de la mina i, un cop seca, podien treballar còmodament a les galeries. Aquesta màquina va ser construïda amb tant d'enginy que, quan s'usava, feia córrer l'aigua. D'aquesta manera, podien arribar a extreure un riu sencer de l'interior de la Terra. Però no tan sols hem d'admirar el talent d'Arquimedes per aquest giny. Se li deuen altres obres molt més notables i que són cèlebres a tota la Terra. Les descriurem quan arribem a l'època del siracusà.[529]

A.1.3*b*$_3$ En l'acantonament d'una de les tres legions destinades a custodiar Egipte, hi ha una rampa baixa que uneix el campament i la vora del Nil i que està dotada d'un sistema de rodes i còclees disposades al llarg d'aquesta i mogudes per l'esforç dels braços de cent cinquanta captius. Té la funció d'elevar l'aigua del Nil fins al campament. Des de Babilònia es veuen, a una distància molt curta i molt clarament, les piràmides situades a l'altre costat del Nil, cap a Memfis.[530]

A.1.3*b*$_4$ He procurat descriure amb tanta claredat com he pogut els passos que calen per a la construcció [de còclees per a poar aigua] i tot allò que provoquen els seus moviments giratoris. Aquests artefactes ens proporcionen innumerables serveis. Tot això ho he fet amb l'objectiu d'oferir una informació cabal.[531]

528. Diodor de Sicília (1976), llibre i, xxxiv 1. Vegeu la nota 290 (pàgina 99).

529. Diodor de Sicília (1976), llibre v, xxxvii 3.

530. Estrabó (1867), llibre xvii, capítol 1, § 30, p. 355.

531. Vitruvi (1995), capítol 6 [4], p. 261. Per a una informació més completa i detallada, Vitruvi (1995), capítols 6 i 7, edició castellana,

A.1.3*b*$_5$ I així va acabar la meitat de la nau en sis mesos. I cada part del vaixell, un cop terminada, va ser coberta amb plaques de plom. Hi havia tres-cents treballadors que tractaven la fusta, a més dels jornalers subordinats que havien d'ajudar-los. I, quan es va plantejar la millor manera d'avarar-la, Arquimedes, el mecànic, ho va dur a terme ell mateix amb l'ajuda d'algunes persones. Havia preparat una espiral que, enorme com era, va desplaçar aquell vaixell cap al mar. Ell va ser el primer a inventar aquesta espiral.[532]

A.1.3*b*$_6$ No tan sols se li atribueix la invenció d'aquesta curiosa màquina que esmenta Ctesibi, sinó la de moltes altres de menes diverses. Totes basades en la pressió de l'aigua. Però que, amb la de l'aire, produeixen uns efectes molt curiosos imitant la naturalesa, com ara el refilet de les merles —amb el simple moviment que generen en el líquid. Són les *figures d'aigua*, unes estàtues menudes que beuen i es mouen provocant efectes diversos que regalen la vista i l'oïda.[533]

A.1.3*b*$_7$ Hom afirma que Arquimedes va ser qui va trobar la primera aplicació mecànica de l'espiral i que això li va proporcionar molta glòria.[534]

A.1.3*c* El problema de la corona

Vitruvi explica el «problema de la corona» que li va plantejar Hieró II.

A.1.3*c*$_1$ Arquimedes va fer invents admirables i molt diferents però, de tots, n'exposaré un que, en la meva opinió, manifesta una subtilesa infinita. Hieró, exaltat a la potestat règia i amb tots els afers en ordre, va desitjar dedicar una corona votiva als déus immortals en un temple. Va contractar l'obra amb un preu fixat i va proporcionar, a l'artista, la quantitat d'or que necessitava [per a fer-la]. La corona va ser lliurada en el temps previst i pesava el que havia de pesar. Estava feta a mà amb una gran subtilesa. Però el rei va sospitar que l'artista

p. 259-262.

532. Ateneu de Nàucratis (1927), p. 329. És molt interessant veure les notes que reuní sobre Arquimedes.

533. Vitruvi (1995), capítol 7 4, p. 262.

534. Eustaci de Tessalònica (1827), vol. iii, vers 293, p. 114-115.

havia suprimit una part de l'or i l'havia canviat pel pes equivalent de plata. El rei, ofès però no veient la manera de provar-ho, va demanar a Arquimedes que hi meditès. I aquest es va interessar d'allò més en l'encàrrec que li havia fet Hieró. Casualment, estava a punt de banyar-se i, en entrar a la banyera, es va adonar que en sobreeixia tanta aigua com el volum del cos que hi submergia. Aquesta experiència tan concreta va fer que trobés la solució del problema. Exultant d'alegria, va sortir prest i nu de la banyera. Mentre anava cap a casa deia a tots els qui trobava pel carrer: «He resolt el problema.» I, mentre corria, cridava una vegada i una altra: «Ευρηκα! Ευρηκα!».

D'acord amb el seu descobriment, Arquimedes va fer dues masses del mateix pes que la corona: l'una d'or i l'altra de plata. Seguidament, va omplir d'aigua una palangana prou gran i hi va posar la massa de plata. Se'n va vessar tanta aigua com volum tenia la massa. Va treure la massa de plata i va reomplir la palangana, mesurant en sesters[535] la quantitat d'aigua que necessitava per a fer-ho. Així va saber el volum d'aigua exacte que corresponia a la massa de plata. Un cop obtinguda aquesta dada, va omplir novament la palangana i hi va col·locar la massa d'or. Le'n va treure, va reomplir la palangana i va mesurar en sesters l'aigua que li havia fet falta. Es va adonar que les dues quantitats d'aigua eren diferents. La que corresponia a l'or era més petita que la que corresponia a la plata. La quantitat de menys estava en relació de conformitat amb l'excés d'una massa de plata sobre una d'or del mateix pes. Finalment, va reomplir d'aigua la palangana i hi va col·locar la corona que havia fet l'orfebre. Va resultar que li corresponia una quantitat d'aigua més gran que la que corresponia a la massa d'or del mateix pes.[536] Aquest fet el va convèncer que la corona estava feta amb una barreja de plata i d'or. I, d'aquesta manera, va quedar palès que l'orfebre havia furtat una part de l'or que li havia donat el rei.[537]

535. Segons l'entrada *sester* del DIEC (1995), és una mesura romana que equivalia a 0,547 litres.

536. Òbviament, li corresponia una quantitat d'aigua més petita que la que ho feia a la massa de plata del mateix pes.

537. Vitruvi (1995), llibre x, introducció 9, edició castellana, p. 219-220.

A.1.3*d* Arquimedes i l'esfera celeste

L'altra aportació de Ciceró a *De la república* —que també dona Claudià— estableix que Arquimedes va construir una esfera celeste. Pappos i Procle afirmen que aquesta feta el va distingir entre els matemàtics teòrics que s'havien esmerçat a aplicar la matemàtica a la mecànica i l'astronomia.

A.1.3*d*₁ Epigrama XVIII.

Quan Júpiter va veure el cel encerclat dins l'estret tancament d'un got,
va somriure i va dirigir aquestes paraules als Immortals:
«Aquí teniu l'adreça dels mortals.»
En un món fràgil representa el meu treball.
A Siracusa, un ancià transporta a la Terra, amb els esforços de la seva art,
els principis del cel, l'harmonia dels elements i les lleis dels déus.
Una intel·ligència secreta dirigeix les diverses estrelles
i, amb moviments regulars, manté animat aquest treball.
Un cercle que travessa l'esfera conté un fals zodíac
i cada mes torna a recuperar la imatge de Cíntia.
Aquest giny, que mou el món, aplaudeix la seva audàcia
i el cel queda sotmès així a l'esperit de l'home.
Per què em sorprèn que el Salmoneu innocent aconseguís imitar el tro?
Es tracta d'una mà menuda que rivalitza amb la natura.[538]

A.1.3*d*₂ [62] Tots van ser grans homes, com també ho foren els que van descobrir els fruits de la terra, van idear el vestit, van pensar en l'allotjament, van establir els refinaments de la vida civilitzada i van elaborar les defenses contra les feres. Gràcies a ells, es van endolcir i es van refinar els nostres costums. I així hem aconseguit passar de les ocupacions indispensables [per a sobreviure] a d'altres més no-

538. Claudià (1833), epigrama XVIII, «L'esfera d'Arquimedes», vol. II, p. 432.

bles i polides. I així, en adonar-se de les propietats dels sons, en va ser regulada la variació i es va aconseguir un goig per a l'oïda. Van aixecar la mirada al cel, als astres, tant als fixos com als que són, de nom però no de fet, errants. I l'home que amb gran agudesa en va copsar les evolucions i els moviments va demostrar que el seu esperit era semblant al d'aquell que els havia creat al cel. [63] Perquè, quan Arquimedes va fixar en una esfera les òrbites de la Lluna, el Sol i els cinc planetes, va fer el mateix que havia fet el déu platònic que, en el *Timeu*, és l'arquitecte del món. És a dir, en una sola revolució de l'esfera combinà els diversos moviments mitjançant diferents velocitats. I, si en l'Univers, no es pot fer sense un déu, tampoc Arquimedes no hauria pogut reproduir els mateixos moviments en una esfera sense una intel·ligència divina.[539]

A.1.3$\boldsymbol{d_3}$ XIV. [21] Aleshores Fil intervingué: «No us diré res que no sapigueu, ni res de la meva collita. Recordo que Gai Sulpici Gal, un home de gran saviesa, trobant-se casualment a casa de Marc Marcel, que havia estat cònsol amb ell, ens va narrar la visió següent: [l'amfitrió] va manar que li portessin l'esfera que el seu avi, vencedor en el setge de Siracusa, una ciutat molt rica i ben agençada, s'havia endut, com a únic botí d'aquella gran conquesta. Com que ja n'havia sentit a parlar en altres ocasions arran de la gran fama d'Arquimedes, no em va sorprendre veure-la perquè no era pas tan bonica com la que havia fabricat el mateix Arquimedes i que [l'avi] Marcel havia dipositat al temple de la Virtut. Tanmateix, així que Gal va començar a explicar, amb molta saviesa, l'estructura d'aquell giny, em vaig fer càrrec del talent que el sicilià hi havia esmerçat i em vaig adonar que era molt superior al que, al meu entendre, podia assolir la ment humana. Gal ens va dir que, d'esfera com aquella, n'existia un precedent antic, molt sòlid, modelat inicialment per Tales de Milet. En aquella, Èudox de Cnidos, deixeble de Plató, hi havia dibuixat les constel·lacions i els estels que es troben fixos al cel. Tota aquesta configuració,

539. Ciceró (1948-1950), llibre i, § xxiii [62]-[63], edició catalana, vol. i, p. 39-40. I també Ciceró (2006), llibre i [14], edició catalana, p. 61, i Plató (2000), [38], edició catalana, p. 81.

d'una gran bellesa, molts anys més tard, la va expressar Arat en uns versos més plens de gràcia poètica que de ciència astronòmica. Ara bé, aquesta mena d'esfera, en la qual s'havien de produir els moviments del Sol i la Lluna, i dels cinc sòlids errants, com si fossin rodamons, no podia encabir-se en aquella altra esfera. Per això, la troballa d'Arquimedes era digne d'admiració. Havia rumiat, i aconseguit, la manera de mantenir en un única rotació les diverses i desiguals òrbites que presentaven moviments molt irregulars.[540] I, així doncs, quan Gal movia l'esfera, el Sol i la Lluna se succeïen en aquell reduït espai com ho fan al cel amb el pas dels dies. I ara el Sol desapareixia de l'esfera i ara apareixia la Lluna just en el moment en què començava a enfosquir-se la Terra.»[541]

A.1.3*e* Arquimedes i els miralls ustoris

p. 19 Vegem, ara, textos d'Antemi, Llucià de Samòsata, Galè i Zonaràs en els quals s'afirma que Arquimedes va fer construir miralls capaços de cremar les naus romanes que assetjaven Siracusa.

A.1.3e_1 Tzetzes ha dedicat un article a la glòria d'Arquimedes en el seu *Llibre de les històries*. Entre els nombrosos ginys que va idear el geòmetra en la defensa de Siracusa, que els romans assetjaven, no podem oblidar els que tenien com a objectiu cremar les naus romanes.[542]

A.1.3e_2 En la llista tradicional d'aquesta mena d'artistes veiem Arquimedes i Sòcrates de Cnidos. Aquest va aconseguir que Ptolemeu envaís la ciutat de Memfis sense necessitat d'assetjar-la, només dividint el Nil i desviant-lo. Aquell va incendiar les galeres de l'enemic. Amb anterioritat, Tales de Milet, havent promès ajut a Cressus, va fer que l'exèrcit creués el riu Hals [. . .].[543] No era un mecànic de professió, sinó un savi amb una ment inventiva.[544]

540. Ciceró (1988-2003), llibre ii, xxxiv [87-88], edició catalana, p. 59.
541. Ciceró (2006), llibre i [xiv], edició catalana, p. 65-66.
542. Antemi de Tral·les (1777), p. 30-31.
543. Pla (2016*b*), p. 68, i A 5.2.2*a*, p. 378.
544. Llucià de Samòsata (1912), edició francesa, capítol 53, «Hippias ou le bain», § 2.

A.1.3e_3 Si la memòria no em falla, recordo que es deia que Arquimedes havia incendiat les galeres enemigues amb matèries inflamables (*διὰ τῶν πυρίων*).[545]

A.1.3e_4 Arquimedes va incendiar la flota romana d'una manera digna d'admiració. Va girar un mirall de cara al Sol i els raigs hi van impactar. I l'aire es va inflamar a causa de la seva densitat i de l'esmalt del mirall. Llavors, va adreçar els raigs cap als vaixells que es trobaven sota l'acció del foc i es van cremar.[546]

A.1.3f Eratòstenes discrepa d'Arquimedes

Segons afirma Estrabó en la *Geografia*, Eratòstenes no acceptava el primer postulat d'Arquimedes de la monografia CFI. p. 48

A.1.3f_1 No és curiós que Eratòstenes, matemàtic, es negui a ratificar el principi establert per Arquimedes en el seu *Sobre els cossos que floten*, que diu: «La superfície de qualsevol líquid en estat de repòs té la forma d'una esfera amb el mateix centre que la Terra», que és una proposició acceptada per qualsevol estudiós amb uns mínims coneixements matemàtics? Malgrat que reconeix que el nostre mar interior és un i continu, nega que les seves aigües estiguin anivellades fins i tot en punts molt propers. I a qui recorre per a garantir un error tan greu? Als arquitectes, encara que els matemàtics han proclamat que l'arquitectura forma part de la matemàtica. Explica que, quan Demetri va intentar reduir l'istme del Peloponès[547] per obrir una nova ruta a la navegació, li ho van desaconsellar els seus arquitectes que, després de mesurar-ho i observar-ho tot convenientment, van declarar que el nivell del mar al golf de Corint era superior al del mar a Cèncrees.[548] En conseqüència, si obria un pas a través de l'istme, les aigües del golf de Corint irromprien a través de l'estret d'Egina i

545. Aquestes paraules de Galè en *Els temperaments*, llibre III, capítol 2, s'han traduït per «miralls ardents», com observa EECKE (1960), p. XX. Vegeu, per exemple, DUTENS (1775), p. 6.

546. ZONARÀS (1868), p. 262.

547. És a dir, l'istme de Corint (*ισθμός της Κορίνθου*).

548. Un dels ports més antics de Corint és el de Cèncrees. L'altre és Lequeu.

les illes veïnes quedarien submergides. I, d'aquesta manera, no aconseguiria cap benefici per a la navegació. Aquest desnivell és, segons Eratòstenes, el que explica els corrents de l'Euripe,[549] en general, i els del canal de Sicília, en particular. Els compara amb els efectes del flux i reflux de l'oceà. «De fet —opinava—, aquest corrent canvia de direcció dues vegades al dia i una a la nit, com passa a l'oceà on les aigües pugen i baixen dues vegades en el mateix espai de temps. Correspon al flux de l'oceà que des de la mar Tirrena es desplaça fins a Sicília. I, com que va d'un nivell superior a un nivell més baix, s'anomena *corrent descendent*. Tot això passa amb la sortida i posta de la Lluna, tant quan es troba per sobre com quan ho fa per sota del meridià.»[550] Arriba a l'un o a l'altre per on es lleva i s'acotxa.[551]

p. 47

A.1.3*g* La definició de centre de gravetat

Pappos dona, per primera vegada, la definició de *centre de gravetat* en la *Col·lecció matemàtica* (*Συναγωγή μαθηματική*), l'única que trobem en els textos grecs.

A.1.3g_1 Però hem de dir en què consisteix i què implica el centre de gravetat d'un cos, principi i «element» fonamental de la doctrina baricèntrica de la qual depenen les altres branques de la mecànica. Creiem que així les qüestions que tractarem esdevindran més clares. I direm que el centre de gravetat d'un cos és un punt seu de manera que, si l'imaginem suspès per aquest, es manté en repòs davant l'atracció i conserva la seva posició inicial.[552]

A.1.3*h* Ciceró parla d'Arquimedes

Ciceró aporta dues informacions sobre Arquimedes. Una fa referència a l'indret on es trobava la tomba en la qual havia estat enterrat, que va reconèixer per la figura que hi havia representada.

---

549. L'estret d'Euripe *Πορθμός του Ευρίπου* es troba en el mar Egeu i separa l'Eubea i la Beòcia. Lagrange (1930).

550. Referint-se a la Lluna.

551. Estrabó (1867), llibre I, capítol III, 11.

552. Pappos (1932), llibre VIII, edició francesa, vol. II, p. 815; Vera (1970), vol. II, p. 1007.

A.1.3h_1 [64] Tornem a Dionís.[553] S'havia prohibit a si mateix, per dir-ho d'alguna manera, totes les comoditats d'una societat educada i amable. Passava els dies amb bandolers, canalles i bàrbars, i no creia que pogués ser amic de cap home lliure o amb aspiracions de ser-ho. Us imagineu una vida més horrible, més miserable i més detestable? La cosa més horrible, miserable i detestable que puc imaginar en la vida d'un home, que no compararé ni amb la de Plató ni amb la d'Arquites, tots ells homes il·lustres i savis:[554] trauré de la pols de la ciutat de Siracusa un home insignificant que va viure força temps després i que dibuixava figures amb el compàs. Es deia Arquimedes. p. 14

Quan era qüestor, en vaig trobar el sepulcre —l'indret del qual era desconegut pels siracusans, que en negaven, fins i tot, l'existència. Estava envoltat i recobert completament de matolls i d'esbarzers. Jo recordava uns breus senaris[555] que diuen, segons la tradició, que s'havia gravat una esfera i un cilindre en la seva tomba.[556] [65] Un dia que observava tota la zona al voltant de la porta d'Agrigent, que conté un gran nombre de sepulcres, em vaig fixar en una columneta que gairebé no sobresortia dels matolls i esbarzers. Tenia gravada la figura de l'esfera i el cilindre.[557]

A.1.3*i* Les pedreres de Siracusa

Tucídides, en el context de les guerres del Peloponès, ofereix una descripció de les pedreres de Sicília, on treballaven infatigablement els vençuts.

553. Es refereix a Dionís de Siracusa, conegut també com a Dionís el Vell.

554. Pel que fa referència a Arquites, CICERÓ (1948-1950), llibre I, XXXVI [78], edició catalana, vol. IV, p. 96.

555. Versos compostos de sis elements. Vegeu DIEC (1995).

556. En memòria de la proposició 34 del llibre primer de *Sobre l'esfera i el cilindre* (*Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*).

557. CICERÓ (1948-1950), llibre V, XXII [63]-XXIII [64]-[65], edició catalana, vol. III (1950), p. 35-36. Sembla que la informació li va proporcionar Posidoni, però la posa en boca de Furi Fil. Vegeu GIGON (1973), p. 145.

A.1.3$\boldsymbol{i_1}$ [1] A les pedreres, el tractament imposat pels siracusans en els primers temps era molt dur: a la intempèrie, ple de multituds entre els murs de la pedrera estreta, al principi els reclusos patien el fuet del Sol ardent i de la flama que molestava l'alè. Aleshores, al contrari, van tenir lloc les fredes nits de tardor, que amb el pas del clima van provocar l'esgotament i les malalties més greus. [2] A causa de l'estretor, es van veure obligats a satisfer les seves pròpies necessitats a la mateixa pedrera, i amb les piles de cadàvers que van créixer a prop, llençats els uns damunt dels altres, aquells que sagnaven i morien per les ferides, aquells altres tallats per les sacsejades de les pedres i pels rigors de la temporada, aquells assassinats per altres causes, tots plegats escampaven una pudor intolerable. I, a tot això, s'hi afegia el turment de la fam i la set que els anava colpejant (ja que durant els primers vuit mesos els siracusans els van llançar solament una còtila[558] d'aigua i dues de blat com a ració diària per a cadascun). Per acabar, no se'ls va concedir relleu, ni tenint en compte els sofriments que s'enterraven també en un abisme similar.
[3] Aquesta munió de gent patia d'aquesta manera durant setanta dies. Després, excloent-hi les tropes ateneses, els sicilians i els ilotes responsables directes de l'expedició, tots els altres acabaven al mercat d'esclaus. [4] El nombre total de presoners és difícil de concretar però no eren menys de set mil. [5] Per al grecs, aquesta campanya fou la més gran de totes les d'aquesta guerra i, pel que he sentit, de totes les guerres.[559] Fou una victòria esplèndida per als vencedors i una derrota desastrosa per als vençuts. [6] Tanmateix, la pèrdua fou enorme en tots els camps. En tots ells el fracàs va ser absolut i la desfeta total, en termes col·loquials. Tot es va perdre tant en la infanteria com en la flota atenenques. Del contingent que havia anat a lliurar la batalla, ben pocs van retornar a casa. Aquests van ser els esdeveniments a Sicília.[560]

558. Una mesura de capacitat molt antiga (730-700 aC). En grec, *κοτύλη*; en llatí, *cotyla*.

559. Llegim: *ξυέβη τε ἔργον τοῦτοο Ἑλληνικόν τῶν κατὰ τόν πῖλεμον τόνδε μέγιστον γενέσθαι.*

560. Tucídides (1981), llibre vii, lxxxviii, [1]-[6], edició catalana, vol. vii, p. 88-89.

Apèndix B

Textos de l'obra matemàtica i física d'Arquimedes

> All my life I have been reading about Homer, philological, historical, archaeological, geographical, etc. Now I want to read him as pure art only, as commensurate with the heart and mind [. . .]
>
> BERNARD BERENSON[561]

B.1 EPI: *Sobre l'equilibri de les figures planes*, llibre I, complet

En aquest paràgraf oferim el text del llibre primer de l'equilibri de les figures planes (EPI) que, com veurem, és una monografia senzilla. Conté set postulats que, de fet, estableixen la «unicitat» del centre de gravetat i quinze proposicions. p. 52

561. «Tota la vida he llegit textos sobre Homer —filològics, històrics, arqueològics, geogràfics, etc. Des d'ara el vull llegir només com a art pur, com una obra proporcional al cor i a la ment.» BERENSON (1964), p. 294. Com s'aplica de bé aquest text pel que fa a l'obra d'Arquimedes per a molts de nosaltres, matemàtics!

El contingut del llibre segon (EPII), que és un pèl més complicat però que no arriba a ser difícil, el recollim en el paràgraf B.3 (pàgines 248-271).

B.1*a* Els postulats d'EPI (*Αἰτήματα*)

p. 53 [EPI postulat 1][562] Pesos iguals suspesos a longituds iguals s'equilibren[563] i suspesos a distàncies diferents no ho fan. I el que té el braç més llarg es troba desplaçat cap avall.[564]

[EPI postulat 2] Si [dos] pesos suspesos en els extrems del braç s'equilibren i s'afegeix un pes a un d'ells, es desequilibren de manera que aquest últim cau.

[EPI postulat 3] De manera semblant, si traiem un pes d'un d'ells, es desequilibren de manera que el pes al qual no li hem tret res cau.

[EPI postulat 4] Si dues figures semblants són superposables, els seus centres de gravetat[565] coincideixen.

[EPI postulat 5] Si dues figures semblants no són superposables, els centres de gravetat estan situats de manera semblant.[566]

[EPI postulat 6] Si dos pesos amb uns braços determinats s'equilibren, altres pesos iguals a aquests i amb els mateixos braços també ho fan.

---

562. Cal indicar que no són simples postulats, sinó postulats «definidors». I no només pel contingut del postulat setè, sinó també pel dels quatre primers.

563. Entenem que aquests pesos són superfícies o sòlids, i suposem que tant les superfícies com els sòlids són homogenis i proporcionals a les seves grandàries. Anomenem *braç* la longitud a la qual es troba el pes.

564. Direm que el pes «cau» quan es desplacin cap avall.

565. Recordem que Arquimedes no defineix què entén per «centre de gravetat». Hi ha qui diu que la definició l'havia establert en una obra perduda (pàgina 27). La primera definició coneguda l'ofereix Pappos (A.1.3g_1, pàgina 206).

566. I entenem que els punts de figures semblants «estan situats de manera emblant» quan els segments tirats des dels punts als angles iguals (de la figura) formen angles iguals amb els costats corresponents. Fixem-nos que, de fet, suposem que la figura plana és poligonal. Potser es podrien acceptar costats corbats, però aquesta suposició semblaria excessiva.

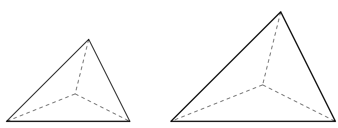


FIGURA EPI 1

[EPI postulat 7] El centre de gravetat d'una figura arbitrària de contorn còncau es troba dins la figura.[567]

B.1*b* Les proposicions d'EPI

Si acceptem els postulats de l'apartat anterior, tenim les proposicions següents: p. 53

B.1*b*₁ [EPI 1] *Si dos pesos amb braços iguals s'equilibren, és que són iguals.*[568]

[*Demostració.*] Si són diferents,[569]
del pes gran en traiem l'excés [sobre el petit].[570]

Els dos pesos no s'equilibren perquè d'un n'hem tret un pes.
[EPI, postulat 5]

[Però pesos iguals amb braços iguals s'equilibren. [EPI, postulat 1]]

I, per tant, els dos pesos són iguals. ♠

B.1*b*₂ [EPI 2] *Dos pesos diferents amb braços iguals no s'equilibren i el més pesat cau.*[571]

[*Demostració.*] Un cop sostret l'excés,
la balança s'equilibra, ja que els pesos i els seus braços són iguals.
[EPI, postulat 1]

Si ara hi afegim la part que hem sostret, el pes més gran cau perquè hem agregat una càrrega a un dels que es trobaven en equilibri.
[EPI, postulat 3] ♠

B.1*b*₃ [EPI 3] *Dos pesos diferents amb braços diferents poden equilibrar-se i això fa que el pes més gran es trobi suspès del braç més curt.*

[*Demostració.*] Siguin A i B dos pesos diferents,
i A el més gran.

Els equilibrem suspenent-los a les distàncies AC i CB.
Volem demostrar que el braç AC és més curt que el CB.

---

567. Nota 566.

568. És el recíproc d'EPI, postulat 1.

569. Hipòtesi de l'absurd. Usa, doncs, un recurs lògic que ja hem trobat abans en els geòmetres que el van precedir i, d'una manera molt profusa, en els *Elements* d'Euclides.

570. Donats dos pesos diferents, tenen un excés que és un pes.

571. Complementa EPI, postulat 2.

a)[572] Suposem que el braç AC és igual al CB.[573]

Traiem l'excés de pes de A sobre B i el pes B cau. [EPI, postulat 2]

Però això és impossible perquè, atès que els braços AC i CB són iguals, hi hauria d'haver equilibri [entre els pesos].

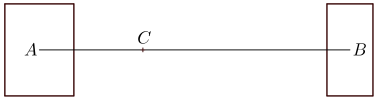


FIGURA EPI 3

b) Si el braç AC és més gran que el CB, el pes que cau és A. I això és impossible. [EPI, postulat 1]

Per tant, [el braç] AC és més curt que [el] CB. ♠

B.1*b*$_4$ [EPI 4] *Si dos pesos iguals no tenen el mateix centre de gravetat,*[574] *el* [*que correspon al pes*] *equivalent als dos* [*junts*] *és el punt mitjà del segment que uneix els centres de gravetat dels dos primers.*

[*Demostració.*] Suposem que D —punt mitjà del segment AB— no és el centre de gravetat d'un pes equivalent als pesos A i B junts.[575]

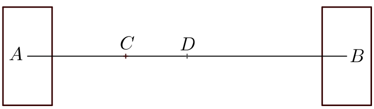


FIGURA EPI 4

Hem demostrat prèviament —*προδέδεικται*— que aquest centre de gravetat es troba en el segment AB.[576]

I els pesos A i B s'equilibren [amb els braços AC i CB].[577]

Però això és impossible, perquè pesos iguals amb braços diferents no ho fan. [EPI, postulat 1]

---

572. Disjunció de casos.

573. Hipòtesi de l'absurd.

574. Aquests pesos són, de fet, figures poligonals planes. Fixem-nos que aquesta hipòtesi no es dona necessàriament. Considerem dues circumferències concèntriques i el cercle petit amb l'àrea igual a la de la corona. Les dues figures tenen el mateix centre de gravetat.

En aquest cas, però, falla el postulat 7. Però, com ja hem dit abans, Arquimedes s'oblida dels cercles.

575. Hipòtesi de l'absurd.

576. Aquest fet no es troba en cap obra d'Arquimedes que coneguem. Potser era en la monografia sobre la balança però no ens ha arribat (ítem *f*, pàgina 27).

577. Aquí Arquimedes fa servir el fet que, si C és el centre de gravetat que correspon a A i B junts, els pesos A i B, amb braços AC i CB, s'equilibren. Recordem que no disposem de la definició de *centre de gravetat*.

De fet, hem de recórrer a la que dona Pappos (A.1.3g_1, pàgina 206).

En definitiva, el centre de gravetat d'un pes equivalent a A i B junts és el punt D. ♠

B.1*b*$_{\mathbf{5}}$ [EPI 5] *Si els centres de gravetat de tres pesos iguals*[578] *estan alineats i són equidistants, el d'un pes equivalent als tres junts és el del pes del mig.*

[*Demostració*.] Siguin A, B i C tres pesos iguals amb centres de gravetat A, B i C,[579] i els braços AC i CB iguals.

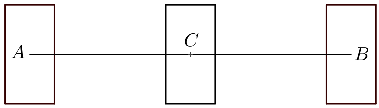


FIGURA EPI, porisma 5a

Per tant, el centre de gravetat de A i B junts és C. [EPI 4]

Però C és el centre de gravetat del pes del mig.

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.1*b*$_{\mathbf{5.1}}$ [EPI, porisma, 5a] *El centre de gravetat d'un pes equivalent a un nombre senar de pesos iguals amb centres de gravetat alineats i equidistants del centre de gravetat mitjà és el centre de gravetat del pes situat en el mig.* ♠

B.1*b*$_{\mathbf{5.2}}$ [EPI, porisma 5b] *El centre de gravetat d'un pes equivalent a un nombre parell de pesos iguals equidistants del centre del segment* [*que uneix els centres de gravetat dels pesos extrems iguals*] *i amb centres de gravetat alineats, és el punt mitjà del segment esmentat.* ♠

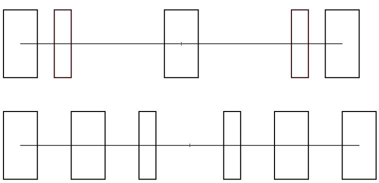


FIGURA EPI, porisma, 5b

B.1*b*$_{\mathbf{6}}$ [EPI 6] [Llei de balança per a pesos commensurables] *Dos pesos commensurables s'equilibren si els seus braços són inversament proporcionals als pesos.*[580]

578. De vegades, Arquimedes usa el terme *magnitud*. Nosaltres, però, solament farem servir l'expressió *pes* i entendrem que és una magnitud i que, com a tal, està sotmesa a allò que Euclides va establir en el llibre V.

579. Arquimedes usa el mateix símbol per a designar la figura plana i el seu centre de gravetat.

580. Fixem-nos que tota la proposició —que amb EPI 7 proporciona la condició necessària per a l'equilibri de la balança— segueix el model de les

Siguin A i B dos pesos, dues magnituds bàriques, commensurables, A i B els seus centres de gravetat,[581]
i ED un segment arbitrari.

Suposem que $\frac{A}{B} = \frac{CD}{CE}$.[582]

Volem veure que C és el centre de gravetat del [sistema] de pesos.
[*Demostració*.] Atès que $\frac{A}{B} = \frac{CD}{CE}$ i A i B són commensurables, [els segments] CD i CE també ho són. [Ex 11]

Sigui NM aquest segment.[583]

Ara fem les prolongacions DG i DK iguals a CE, i EL igual a EG. [Ei 2 i 3]

Com que LG i GK són dobles de CD i CE, respectivament, MN fa la suma LG i GK, ja que amida les seves meitats. [Ev 15 o Ex 12]

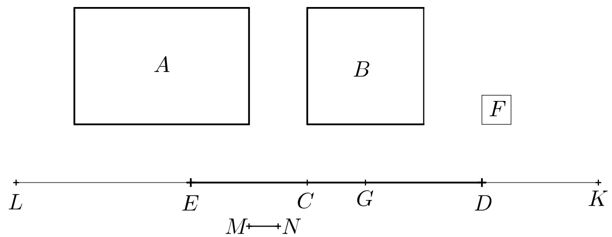


Figura EPi 6

Això és així perquè $\frac{A}{B} = \frac{CD}{CE}$ i $\frac{CD}{CE} = \frac{LG}{GK}$[, atès que són els dobles]. [Ev 15]

Tenim, doncs, que $\frac{A}{B} = \frac{LG}{GK}$. [Ev 11]

Determinem el pes F de manera que A el contingui tantes vegades com LG conté MN.[584]

Per tant, $\frac{LG}{MN} = \frac{A}{F}$. [Dv 5]

---

proposicions euclidianes, tal com hem exposat a § 3.2.12 de Pla (2021), p. 96-98. És interessant veure la literatura que aquesta proposició ha generat. Dijksterhuis (1987), p. 291-304.

581. Nota 165 (pàgina 54).

582. El punt C és del segment ED.

583. Arquimedes usa solament la lletra N. Nosaltres introduïm MN per simplificar-ne la lectura. Designem els segments amb dues lletres i els pesos amb una.

584. És possible dividir un pes —una magnitud— en parts iguals un nombre donat de vegades.

Però, *invertendo*, tenim que $\frac{B}{A} = \frac{GK}{LG}$. [Dv 13]

I, *ex æquali*, que $\frac{GK}{MN} = \frac{B}{F}$. [Ev 22]

Per tant, GK conté MN tantes vegades com B conté F. [Dv 5]

Però hem vist que A és un múltiple de F.

En definitiva, F és una mesura comuna de A i B.

Ara dividim LG en parts iguals a MN i A en parts iguals a F.

El nombre de parts en un cas i en l'altre és el mateix.

Col·loquem pesos iguals a F, que tenen el centre de gravetat en el punt mitjà de F, a cada un dels costats de LG.

Fet això, la suma dels pesos F col·locats en LG és A
i el centre de gravetat de[l sistema de] pesos és el punt E. [EPi 5a]

Anàlogament, podem demostrar que, si en cada una de les parts en les quals s'ha dividit KG s'hi col·loca un pes igual a F, amb el centre de gravetat en el punt mitjà,
tots els pesos iguals junts equivalen al pes B,
i el centre de gravetat de[l sistema de] pesos és el punt D. [EPi 5b][585]

Per tant, el pes A està col·locat a E i el B a D.

Tenim, doncs, un nombre parell de pesos iguals situats en un segment de manera que els seus centres de gravetat són equidistants.

Conseqüentment, resulta evident que el centre de gravetat del conjunt de tots els pesos és el punt mitjà. [EPi 5a]

I, atès que L és igual a CD i CE a DK,
la suma LC ho és a la suma CK.

En definitiva, el centre de gravetat del sistema és el punt C.

D'això en resulta que els pesos A i B, col·locats en els punts E i D, respectivament, amb fulcre a C,
s'equilibren. ♠

B.1*b*₇ [EPi 7] [Llei de balança per a pesos incommensurables] *Dos pesos incommensurables s'equilibren si els seus braços són inversament proporcionals a ells.*

Siguin A i B junts i C dos pesos incommensurables amb braços DE i EF [respecte del fulcre E].

Suposem que satisfan la proporció $\frac{A \text{ i } B}{C} = \frac{DE}{EF}$.

585. Atès que F mesura A.

Afirmo que el centre de gravetat dels dos pesos A i B junts i C és [el fulcre] E.[586]

[*Demostració.*] Si A i B junts col·locats en F no equilibren C col·locat en D,[587] resulta que:[588]

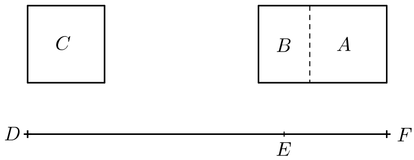


FIGURA EPI 7

a) A i B junts és més gran respecte de C del que cal per a aconseguir l'equilibri.
b) A i B no és més gran respecte de C del que cal per a aconseguir l'equilibri i, per tant, és més petit.

a) Si A i B supera el pes que necessitem per a equilibrar C [amb fulcre E],[589]
traiem una quantitat més petita de la que necessitaríem per a aconseguir l'equilibri,
de manera que el pes que queda, A, és commensurable amb C.[590]

Ara els pesos són commensurables i $\frac{A}{C} < \frac{DE}{EF}$. [DV 5 i 7]

Per tant, A i C no s'equilibren amb el fulcre E, A en F i C en D [és a dir, amb braços DE i EF].[591]

b) Per les mateixes raons, C no pot ser més gran del que cal per a aconseguir l'equilibri. ♠

B.1b_8 [EPI 8] *Si d'un pes arbitrari en sostraiem un altre que no té el mateix centre de gravetat per a aconseguir el centre de gravetat del residu, primer cal prolongar el segment que uneix els dos centres de gravetat en la direcció d'aquell que es troba en el centre de gravetat del pes sencer. Tot seguit cal considerar, en aquesta prolongació, un segment que és respecte del que uneix els centres de gravetat com el pes sostret és al pes del residu. I el centre de gravetat del pes restant es troba a l'extrem del segment que hem agafat en la prolongació.*

586. És a dir, hi ha equilibri.
587. Hipòtesi de l'absurd.
588. Disjunció de casos.
589. La balança cau de la banda de F per EPI, postulat 1.
590. Problema 2 (pàgina 152).
591. Atès que $\frac{A}{C} < \frac{DE}{EF}$, no hi ha equilibri i la balança cau de la banda de D.

Sigui C el centre de gravetat del pes AB.[592]

Sostraiem el pes AD, que té el centre de gravetat E, del pes AB.

Tirem el segment CE. [P 1]

El prolonguem un segment CF, [P 2]

de manera que $\frac{CF}{CE} = \frac{AD}{DG}$. [EVI 12]

Volem veure que el punt F és el centre de gravetat del pes DG.

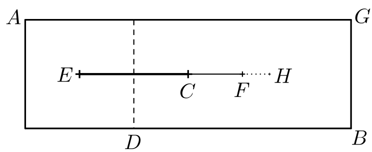


FIGURA EPI 8

[*Demostració.*] Suposem que no ho és.[593]

Llavors és un altre punt.[594]

En direm H.

Atès que els centres de gravetat de AD i DG són E i H, respectivament,

el centre de gravetat de AD i DG junts es troba en el segment EH i el divideix de manera que les parts resultants són inversament proporcionals als pesos. [EPI 6 i 7][595]

En conseqüència, el centre de gravetat dels pesos AD i DG, és a dir, de AB, no és el punt C.

Però, per hipòtesi, ho és.

Per tant, el punt H no ho és. ♠

B.1*b*₉ [EPI 9] *El centre de gravetat d'un paral·lelogram es troba en el segment que uneix els punts mitjans dels costats oposats.*[596]

Considerem el paral·lelogram ▱ $ABCD$.

592. Atenció! Arquimedes usa dues lletres per a designar el pes, la magnitud ja que l'entén com una figura. No hem de confondre els pesos amb els segments.

593. Hipòtesi de l'absurd.

594. Tot pes, és a dir, qualsevol figura plana que considerem, té un centre de gravetat.

595. Se suposa que el centre de gravetat de DG és en el segment que passa pels punts E i C, ja que els centres de gravetat de AD, DG i AB han d'estar alineats.

596. És la primera proposició, de tres, en la qual s'indica la manera de determinar els centres de gravetat dels paral·lelograms, els triangles i els trapezis.

Sigui EF el segment que uneix els punts mitjans dels costats AB i CD.

Afirmo que el centre de gravetat del paral·lelogram ▱ $ABCD$ és al segment EF.

[*D*emostració.] Suposem que no és així.[597]

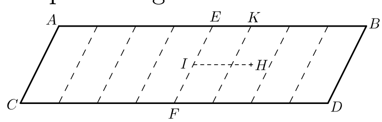


Figura EPi 9

Sigui H el centre de gravetat.

Pel punt H tirem la paral·lela HI al costat AB.

Dividim el segment EB per la meitat i considerem una part EK més petita que [el segment] IH.[598] [Ex 1]

Dividim també AE i EB en parts iguals a EK
i, pels punts obtinguts, tirem segments paral·lels a EF.

El paral·lelogram inicial queda, així, dividit en paral·lelograms iguals i semblants a ▱ FK.

Si ara superposem els paral·lelograms semblants i iguals a ▱ FK, tenim que els centres de gravetat també coincideixen.

[EPi, postulat 4]

El nombre de paral·lelograms iguals a ▱ FK és parell i els centres de gravetat estan alineats i són equidistants.

Per tant, el centre de gravetat del conjunt de tots aquests paral·lelograms és el punt mitjà del segment que uneix tots els centres de gravetat. [EPi 5*a*]

I això és impossible perquè hem suposat que és H i H és exterior a ▱ FK.

Per tant, el centre de gravetat del paral·lelogram ▱ $ABCD$ està situat en el segment EF. ♠

B.1*b*$_{\mathbf{10}}$ [EPi 10] *El centre de gravetat d'un paral·lelogram és el punt d'intersecció de les seves dues diagonals.*

Considerem el paral·lelogram ▱ $ABCD$,
el segment EF que dimidia els costats AB i CD [Ei 10 i P 2]
i el segment KL que dimidia els AC i BD. [Ei 10 i P 2]

597. Hipòtesi de l'absurd.

598. Aquest segment EK, a més, és commensurable amb AB. Altrament, la construcció que proposa la demostració no seria possible.

[*Demostració.*] El centre de gravetat del paral·lelogram ▱ $ABCD$ es troba en el segment EF. [EPi 9]

Per la mateixa raó, també ho fa en el segment HL.

Per tant, és el punt H.

Però el punt H és el d'intersecció de les dues diagonals del paral·lelogram.

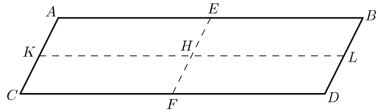


Figura EPi 10

I això és el que volíem demostrar. ♠[599]

B.1b_{11} [EPi 11] *Considerem dos triangles semblants i dos punts* [*de l'interior*] *col·locats de manera semblant respecte de cada triangle.*[600] *Si un és el centre de gravetat del triangle al qual pertany, l'altre també ho és del seu.*

Considerem els triangles semblants $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$,
tenint en compte que AB és a DE com BC a EF [i com CA a FD]. [Dvi 1]

Siguin H i N punts [de l'interior] dels triangles,
col·locats de manera semblant.

Suposem que H és el centre de gravetat del triangle $\triangle\, ABC$.

Afirmo que [el punt] N ho és del triangle $\triangle\, DEF$.

[*Demostració.*] Suposem que no ho és.[601]

Aleshores, el centre de gravetat del triangle $\triangle\, DEF$ és el punt G.[602]

Tirem els segments HA, HB i HC, DN, EN i FN, i DG, EG i FG. [P 1]

Atès que els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$ són semblants i tenen els centres de gravetat H i G,
i que els centres de gravetat de figures semblants estan col·locats de manera semblant, [EPi, postulat 5]
els angles $\widehat{GDE}$ i $\widehat{HAB}$ són iguals.

599. Arquimedes n'ofereix una demostració alternativa. Vegeu el problema 5 (pàgina 152).

600. Això vol dir que: «Si els unim pels vèrtexs, els angles que determinen amb els costats són iguals, respectivament.»

601. Hipòtesi de l'absurd.

602. Assumim que el triangle té un centre de gravetat.

Però l'angle $\widehat{HAB}$ ho és a l'angle $\widehat{EDN}$.

Per tant, és igual a $\widehat{GDE}$, [Nc 1]

el gran al petit.

I això és impossible.

En conseqüència, no pot ser que el punt N no sigui el centre de gravetat del triangle $\triangle DEF$.

Per tant, ho és. ♠

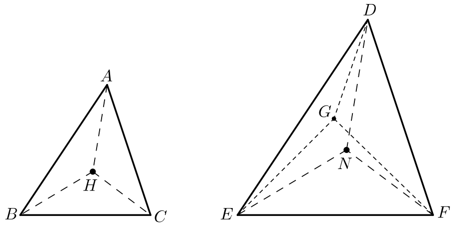


Figura EPi 11

B.1b_{12} [EPi 12] *Considerem dos triangles semblants. Suposem que el centre de gravetat d'un es troba en el segment que uneix un vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat. Aleshores, el centre de gravetat de l'altre és en el segment disposat de manera anàloga.*

Considerem dos triangles semblants $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$,
tenint en compte que AB és a DE com BC a EF [i com CA a FD]. [Dvi 1]

Sigui G el punt mitjà de AC. [Ei 10]

Unim BG. [P 1]

Suposem que el centre de gravetat [del triangle $\triangle ABC$] és en el segment BG.

Afirmo que el centre de gravetat de $\triangle DEF$ es troba en la recta anàloga [del triangle $\triangle DEF$].

[*Demostració.*] Dimidiem DF. Sigui M el punt mitjà. [Ei 10]

Unim EM. [P 1]

Determinem el punt N de manera que $\frac{BG}{BH} = \frac{EM}{EN}$. [Evi 12]

Tirem els segments AH, HC, DN i NF.

Atès que AG i DM són la meitat de AC i de DF, respectivament, tenim la proporció $\frac{AB}{DE} = \frac{AG}{DM}$. [Ev 15]

Els costats que formen angles iguals són proporcionals
i els angles $\widehat{AGB}$ i $\widehat{DME}$, iguals. [Evi 6][603]

Per tant, $\frac{AG}{DM} = \frac{BG}{EM}$. [Evi 6]

Però tenim que $\frac{BG}{BH} = \frac{EM}{EN}$.

603. Els dos triangles $\triangle BAG$ i $\triangle EDM$ són semblants. Tenen, doncs, els angles corresponents iguals.

Per tant, *alternando*, $\frac{AB}{DE} = \frac{BH}{EN}$. [Nc 1 i Ev 16]

Els costats que formen angles iguals són proporcionals,

és a dir, els angles $\widehat{BAH}$ i $\widehat{EDN}$ són iguals.

En definitiva, els angles restants $\widehat{HAC}$ i $\widehat{NDF}$ també ho són. [Ei 32]

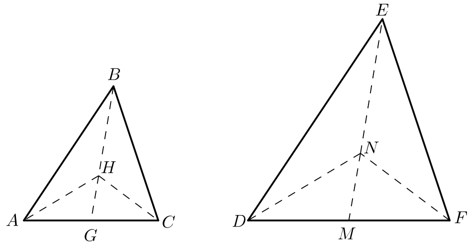


Figura EPi 12

Per les mateixes raons, els angles $\widehat{BCH}$ i $\widehat{EFN}$ són iguals, i els $\widehat{HCG}$ i $\widehat{NFM}$ també.

Però hem vist que els angles $\widehat{ABH}$ i $\widehat{DEM}$ també ho són.

Per tant, també ho són els angles restants $\widehat{HBC}$ i $\widehat{NEF}$. [Ei 32]

De totes aquestes raons en resulta que els punts H i N estan col·locats de manera semblant

i, atès que el punt H és el centre del triangle $\triangle ABC$,

el punt N ho és del triangle $\triangle DEF$. [EPi 11]

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.1b_{13} [EPi 13] *El centre de gravetat d'un triangle es troba en el segment que va d'un vèrtex al punt mitjà de la base.*[604]

Considerem el triangle $\triangle ABC$.

Tirem el segment AD [des del vèrtex A] fins al punt mitjà de la base BC. [P 1 i Ei 10]

Volem demostrar que el centre de gravetat del triangle $\triangle ABC$ es troba en el segment AD.

[*Demostració*.] Suposem que no és així[605]

i que el centre de gravetat [del triangle $\triangle ABC$] és el punt H.[606]

Tirem el segment HI paral·lel al costat BC. [Ei 31]

Si dividim iteradament per la meitat [la base] BD, aconseguim un segment més curt que HI. [Ex 1]

604. Arribem així al moll de l'os d'aquesta monografia que, juntament amb EPi 14, que n'és un porisma, estableix on es troba el centre de gravetat d'un triangle.

605. Hipòtesi de l'absurd.

606. Suposem que existeix.

Ara dividim BD i DC en parts iguals a aquest segment. [Ei 2 o 3][607]

Per cada un dels punts de divisió, tirem un segment paral·lel a AD. [Ei 31] [Aquests paral·lels tallen els costats AB i BC. [P 5]

Tirem els segments EF, GK i LM. [P 1]

Són paral·lels a la base BC.[608]

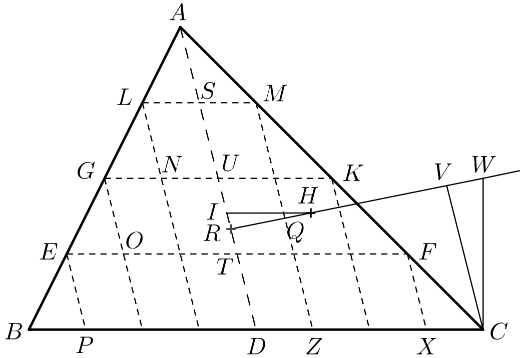


Figura EPi 13

Els centres de gravetat dels paral·lelograms ▱ MN, ▱ KO i ▱ FP es troben en els segments SU, UT i TD, respectivament. [EPi 9]

Per tant, el centre de gravetat de la figura conjunta [formada per aquests paral·lelograms] és en el segment SD. [EPi 4]

Imaginem que és el punt R.

Unim i prolonguem RH, [P 1 i 2]

Pel punt C, tirem el segment CV, paral·lel a AD. [Ei 31]

La raó del [triangle] $\triangle ADC$ i els triangles construïts sobre els segments AM, MK, KF i FC, semblants al $\triangle ADC$,
és la raó de CA i AM,
ja que els segments AM, MK, KF i FC són iguals. [Evi 1]

I la raó de[l triangle] $\triangle ADB$ i els construïts sobre els segments AL, LG, GE i EB[, semblants a $\triangle ADB$,]
és la de BA i AL. [Evi 1]

La raó del triangle $\triangle ABC$ i cada triangle [fet amb els triangles sobre AM i AL, MK i LG, etc.] és la de AC i AM. [Evi 6]

Però la dels segments AC i AM és més gran que la de VR i RH, perquè la raó de AC i AM és la de VR i RQ.[609]

607. Hem d'agafar aquest segment més petit que HI commensurable amb BC.

608. Per completar les afirmacions, vegeu l'exposició que hem fet d'aquesta proposició en la pàgina 56.

609. Problema 6 (pàgina 153).

I la raó del triangle $\triangle\, ABC$ i cada un dels esmentats és més gran que la de UR i RH.

En definitiva, per composició, la raó dels paral·lelograms ▱ MN, ▱ KO i ▱ FP i els triangles que resten és més gran que la que hi ha entre VH i HR.

Fem, ara, que la raó que hi ha entre WH i HR sigui la que hi ha entre els paral·lelograms i els triangles. [EVI 12]

Atès que, del triangle $\triangle\, ABC$ amb centre de gravetat H, en sostraiem un pes —una magnitud— igual al conjunt de paral·lelograms ▱ MN, ▱ KO i ▱ FP, amb centre de gravetat R, el centre de gravetat del residu, format pels triangles residus, es troba en la prolongació del segment RH, que és un segment la raó del qual amb RH és la del pes sostret i el pes que queda. [EPI 8]

És a dir, és el punt W. I això és impossible, ja que tots [els triangles] estan en una mateixa banda respecte del segment paral·lel a AD per W.

I això és el que volíem demostrar. ♠[610]

B.1*b*$_{14}$ [EPI 14] *El centre de gravetat d'un triangle és el punt d'intersecció dels segments que uneixen els vèrtexs amb els punts mitjans dels costats oposats.*[611]

Sigui $\triangle\, ABC$ un triangle.

[*Demostració.*] Tirem els segments AD i BE [dels vèrtexs A i B] als punts mitjans dels segments BC i AC. [P 1]

El centre de gravetat del triangle $\triangle\, ABC$ està situat en cada un d'aquests segments. [EPI 13]

Per tant, el punt H és el centre de gravetat [del triangle $\triangle\, ABC$].

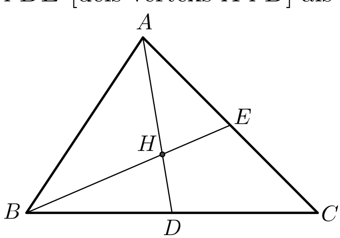


FIGURA EPI 14

I això és el que volíem demostrar. ♠

610. Alguns traductors i comentaristes d'Arquimedes li atribueixen una altra demostració. Vegeu el problema 7 (pàgina 153).

611. Aquests segments s'anomenen avui en dia les *mitjanes* del triangle. Aquesta proposició és un porisma immediat d'EPI 13.

B.1*b*₁₅ [EPi 15] a*) El centre de gravetat d'un trapezi amb les bases paral·leles està situat en el segment que uneix els punts mitjans de les bases.* b*) I ho està de manera que el segment que es troba més a prop de la base petita és a l'altre segment com el doble de la base més gran més la petita al doble de la petita més la gran.*[612]

Siguin ⏢ $ABCD$ el trapezi de bases paral·leles AD i BC
i EF el segment que uneix els punts mitjans d'aquestes bases.

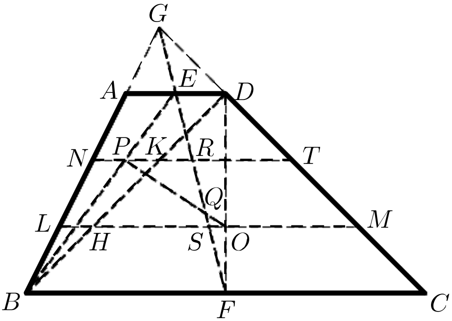


Figura EPi 15

[*Demostració.*] *a*) És obvi que el centre de gravetat es troba en aquest segment,[613]
ja que les prolongacions dels segments CD, FE i BA es tallen en un punt G, [P 5]
i els centres de gravetat dels triangles GBC i GAD són en els segments GF i GE, respectivament. [EPi 13]

En definitiva, el centre de gravetat del trapezi està situat en el segment EF. [EPi 8 i EPi, postulat 8]

b) Unim el segment BD [P 1]
i el dividim en tres parts iguals pels punts H i K. [Evi 10]

Per H i K, tirem els segments LHM i NKT paral·lels a BC. [Ei 31]

Considerem els segments DF, BE i PO. [P 1]

El centre de gravetat del triangle $\triangle\, DBC$ es troba en el segment HM,
ja que HB és la tercera part de BD.[614]

D'altra banda, el centre de gravetat del triangle $\triangle\, DBC$ és en el segment DF. [EPi 13]

O sigui que O és el centre de gravetat del triangle. [EPi 13]

Anàlogament, el centre de gravetat del triangle $\triangle\, ADB$ és el punt P. [EPi 13]

612. Vegeu les observacions de la pàgina 59.
613. Exercici 14 (pàgina 59).
614. Exercici 13 (pàgina 59).

I el centre de gravetat de la figura formada pels triangles $\triangle ABD$ i $\triangle BDC$, que és el trapezi, es troba en el segment OP.[615]

Però en l'ítem *a* hem vist que el centre de gravetat del trapezi és en el segment EF.

Per tant, el centre de gravetat del trapezi ⏢ $ABCD$ és el punt Q.[616]

I el triangle $\triangle BCD$ és al $\triangle ABD$ com PQ a QO[, és a dir, $\frac{\triangle BCD}{\triangle ABD} = \frac{PQ}{QO}$]. [EPi 6 i 7]

Però $\frac{\triangle BCD}{\triangle ABD} = \frac{BC}{AD}$ [Evi 1]

i $\frac{PQ}{QO} = \frac{RQ}{QS}$. [Evi 4][617]

Per tant, $\frac{BC}{AD} = \frac{RQ}{QS}$. [Nc 1 iterat]

D'això en resulta que $\frac{2\,BC+AD}{2\,AD+BC} = \frac{2\,RQ+QS}{2\,QS+RQ}$.[618]

Però $2\,RQ + QS = RS + RQ$ i $2\,QS + QR = RS + RQ = QF$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.2 QP: *Quadratura de la paràbola*, fragments

Oferim, ara, alguns textos de QP,[619] aplegats en cinc blocs, imprescindibles per a comprendre els dos mètodes seguits per Arquimedes a l'hora d'establir la quadratura de la paràbola. p. 60-69

B.2*a* La introducció de QP

La introducció proporciona informació de primera mà sobre el contingut de la carta, però també sobre els matemàtics d'Alexandria que Arquimedes coneixia i respectava. p. 60

A continuació estableix cinc propietats de la paràbola, tres de les quals ja eren conegudes. I, un cop fet això, dona els dos procediments que menen a la resolució del problema.

615. L'ítem *b* de l'exercici 14 (pàgina 59).
616. L'ítem *c* de l'exercici 14 (pàgina 59).
617. L'ítem *d* de l'exercici 14 (pàgina 59).
618. L'ítem *e* de l'exercici 14 (pàgina 59).
619. Com ja hem dit abans, disposem d'una traducció al català completa i més acurada a Masià (2016).

B.2a_1 Arquimedes a Dositeu: Salut!

La mort de Conó m'ha entristit enormement. Va ser un veritable amic durant tota la vida i era un bon coneixedor de la ciència matemàtica. Tu també en vas ser amic i ets hàbil per a la matemàtica. Per això he pres la decisió d'enviar-te, com hauria fet amb Conó, un teorema del qual ningú no s'ha preocupat fins ara. M'ha plagut estudiar-lo. D'entrada, se'm va fer palès per mitjà de consideracions mecàniques. I, després, el vaig establir mitjançant el raonament geomètric.

Alguns dels qui m'han precedit en el cultiu de la geometria han aconseguit trobar una figura rectilínia equivalent a un cercle o a un segment de cercle. I han mirat de quadrar l'àrea limitada per un con complet i una recta.[620] Acceptaven lemes difícils d'admetre, i per això, molts van creure que la qüestió no s'havia resolt del tot.[621]

Però, que jo sàpiga, ningú no s'ha preocupat de buscar la quadratura de l'àrea limitada per una recta i una paràbola. Ho he resolt i he trobat que el segment parabòlic equival a quatre vegades la tercera part del triangle de la mateixa base i la mateixa altura que aquest.

Per a establir-la he fet servir el lema següent: «Si la diferència de dues àrees diferents s'afegeix a si mateixa successivament, se n'aconsegueix una que supera una àrea donada.»[622] Els geòmetres que m'han prece- dit l'han fet servir per a demostrar que la raó dels cercles és igual a la raó doble dels seus diàmetres i que la dels volums de les esferes és la raó triple dels seus diàmetres.[623] I també que una piràmide equival a una tercera part d'un prisma de la mateixa base i la mateixa altura i que un con és una tercera part d'un cilindre de la mateixa base i altura.[624] Ara bé, els teoremes demostrats d'aquesta

620. Es refereix a una el·lipse? El text grec no és gaire clar: *τᾶς ὅλου τοῦ κώνον τομᾶς*.

621. Pla (2016*b*), p. 248.

622. Ev 4 i Ex 1. Ho estableix com a postulat a ECi, postulat 5.

623. La raó dels quadrats, dels cubs i dels diàmetres en sentit geomètric, respectivament.

624. És interessant observar que Arquimedes fa un relat dels continguts del llibre XII dels *Elements* d'Euclides que aclareix que no s'havia fet cap avenç important en la quadratura de superfícies ni en la cubicatura de sòlids. La demostració que presenta el siracusà constitueix un primer avenç en aquest sentit, al qual, com veurem, en seguiran molts d'altres.

manera no semblen pas menys evidents que els demostrats d'una altra. I els que t'envio tenen el mateix grau d'evidència. Podràs adonarte de la manera com els vaig resoldre primer amb la mecànica i després amb la geometria. Els he precedit de les propietats elementals de les seccions còniques necessàries per a demostrar-los. Passa-t'ho bé![625]

B.2*b* Les cinc propietats dels segments parabòlics

Ara presentem les cinc propietats de la paràbola que obren l'exposició teòrica de la monografia QP. Com hem dit abans (pàgina 61), les tres primeres són conegudes i no en dona la demostració.[626] En canvi, demostra la quarta i la cinquena. p. 61

B.2*b*₁ [QP 1] *Siguin* $\smile ABC$ *un segment de paràbola,*[627] BD *un segment rectilini paral·lel al diàmetre o el mateix diàmetre i* ADC *el segment [rectilini] paral·lel a la tangent pel punt* B.

Els segments AD *i* DC *són iguals.*

I, si els segments AD *i* DC *són iguals, el* AC *és paral·lel a la tangent pel punt* B. ♠

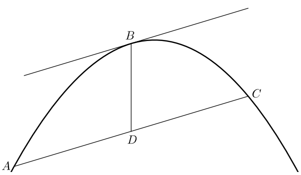


Figura QP 1

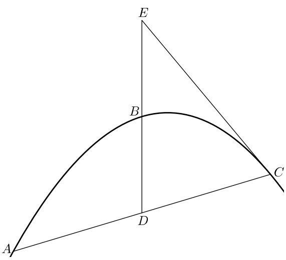


Figura QP 2

B.2*b*₂ [QP 2] *Siguin* $\smile ABC$ *un segment de paràbola,* BD *un segment rectilini paral·lel al diàmetre o el mateix diàmetre,* ADC *una corda paral·lela a la tangent pel punt* B *i* EC *el segment tangent a la paràbola pel punt* C *[que talla* DBE *pel punt* E*]. [Els segments]* BD *i* BE *són iguals.* ♠

B.2*b*₃ [QP 3] *Des d'un punt* B *d'un segment de paràbola* $\smile ABC$ *tirem un segment* BD *paral·lel al diàmetre o que és el mateix diàmetre, i els segments* AD *i* EF *paral·lels a la tangent de la paràbola pel punt* B.

---

625. Masià (2016), p. 148-149.
626. Les trobem, però, a Apol·loni de Perge (1963), Ci 46, 35 i 20.
627. Arquimedes s'hi refereix com a secció d'un con rectangle.

Les abscisses són com els quadrats —en potència (δυνάμει)— [de les ordenades],[628] *segons s'estableix en els* Elements de còniques (*Στοιχεία των κωνικών τομώμ*).[629] ♠

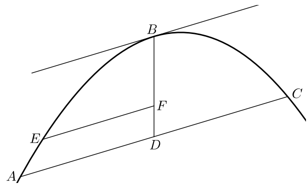


Figura QP 3

B.2*b*₄ [QP 4] *Sigui ⌣ ABC un segment de paràbola de base AC. Pel punt mitjà D [de la base AC], tirem un segment BD paral·lel al diàmetre o que és el mateix diàmetre. Prolonguem el segment BC i tirem un altre segment FH paral·lel a BD que talla el segment BC [o la seva prolongació en el punt H]. Tenim que FH és a HG com DA a DF.*[630]

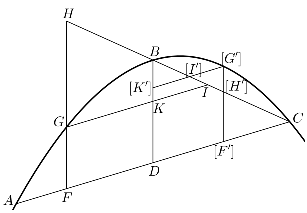


Figura QP 4

[*Demostració*.] Pel punt R,[631] tirem un segment RH paral·lel a la corda AC.

Tenim que PV és a PW com el quadrat de VA al quadrat de WR. [QP 3]

D'això en resulta que el quadrat de VA és al de VO com PA a PK, ja que VW i OR són iguals.

Per tant, el quadrat de PA és al de AF com PA a PK.

I, en conseqüència, obtenim la proporcionalitat dels segments PA, PF i PK.[632]

De fet, PA és a PF com PF a PI.

En definitiva, FO és a FR com VA a VO.

I, de retruc, FO és a FR com VB a VO, atès que VA i VB són iguals. [Ev 7]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

628. $\frac{BD}{BF} = \frac{AD^2}{EF^2}$. Pla (2021), § 3.2.13 i la nota 314 (p. 99-101).

629. No podem saber a quin text dels *Elements de còniques* es refereix Arquimedes però no és pas al d'Apol·loni, que va aparèixer més tard. Ha de ser d'Euclides o d'Aristeu el Vell.

630. $\frac{FH}{HG} = \frac{DA}{DF}$. En la figura QP 4 hem representat els punts O i O', R i R' i F i F' un a cada banda del punt V.

631. Tot val igual en el cas dels punts que es representen amb prima.

632. És a dir, $\frac{PA^2}{PF^2} = \frac{PA}{PI}$. Per tant, òbviament, $\frac{PA}{PF} = \frac{PF}{PI}$.

B.2*b*₅ [QP 5] *Siguin* $\smile\!\!/\,ABC$ *un segment de paràbola i* AB *la seva corda. Pels punts* A *i* C *tirem* AF *paral·lel al diàmetre i* CF *tangent a la paràbola pel punt* C*. En el triangle* $\triangle FAC$ *tracem un* [*segment*] LK *paral·lel a* AF*. La paràbola talla aquest segment amb la mateixa raó que* AC [*talla*] *el segment paral·lel a* AF*. I les parts corresponents en la proporció són les de* AC *i de* KL *de la banda del punt* A*.*[633]

[*Demostració.*] *a*)[634] Pel punt H, tirem DE paral·lel a AF de manera que ED talla AC per la meitat en el punt D.

Atès que $\smile\!\!/\,ABC$ és un segment de paràbola,
el segment [rectilini] BD és paral·lel al diàmetre,
els segments AD i DC són iguals
i el segment paral·lel a la base AC és tangent al segment de paràbola pel punt B. [QP 1]

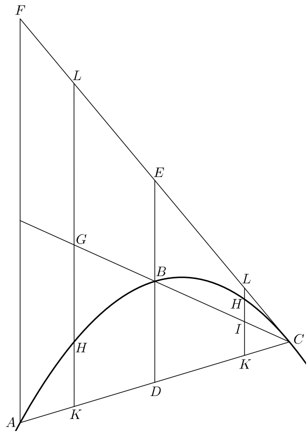


FIGURA QP 5

D'altra banda, atès que DE és un segment paral·lel al diàmetre,
que CE és tangent al segment de paràbola pel punt C
i que DC és paral·lel a la tangent pel vèrtex B,
resulta que EB és igual a BD. [QP 2]

I, en conseqüència, DA és a DC com DB a BE.

Així doncs, si el segment que hem dibuixat talla AC per la meitat, el teorema queda demostrat. ♠

b) Si el cas no és aquest,
hem de veure que AK és a KC com KH a HL.

Considerem KL paral·lel a AF.

Ara bé, BE i BD són iguals. [QP 2]

Per tant, IL i KI també. [EVI 4 i DV 5]

Tenim, doncs, que LK és a KI com AC a DA. [EV 7][635]

633. Estudiem el valor de $\frac{AK}{KC}$, en què el punt K és en el lloc en el qual el segment paral·lel a LK divideix la base AC. Observem que $\frac{AK}{KC} = \frac{AK}{KC}$.

634. Disjunció de casos. En primer lloc, suposem que K és D.

635. Recordem que AC i DC són iguals, ja que DE és el diàmetre.

Però KI és a KH com DA a AK. [QP 4]
Conseqüentment, KH és a HL com AK a KC. [Ev 23 i 17]

♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.2*c* L'àrea del segment de paràbola mitjançant l'ús d'una balança

Un cop Arquimedes ha establert les cinc propietats del segment de paràbola, enuncia i demostra vuit proposicions d'equilibri d'una balança entre un cert pes i un triangle o un trapezi. Seguidament, dona les dues proposicions —QP 14 i QP 15—, que són «elements» de la proposició bàsica —QP 16.

Nosaltres recollim solament les proposicions QP 6, 8, 10, 12, 14, 16 i 17.[636]

B.2c_1 [QP 6] *D'una balança de braç ABC en penja un triangle rectangle $\triangle CBD$, amb l'angle recte en el vèrtex B, de manera que el catet BC és igual a la meitat del braç de la balança, el vèrtex C és un dels extrems de la balança i B és el punt mitjà de[l braç] AC. I del punt A en penja un pes F de manera que la balança resta en equilibri. Afirmo que el pes F és una tercera part del triangle $\triangle CBD$.*

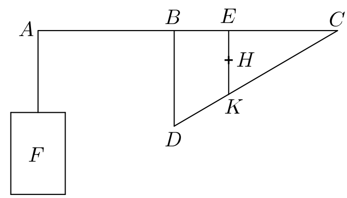


Figura QP 6

[*Demostració.*] Atès que la balança es troba en equilibri i ABC és un segment paral·lel a l'horitzó, els segments perpendiculars al segment ABC també ho són. [Ei 27 i P 4]

Del braç de la balança prenem un punt E de manera que EC és el doble de EB. [Evi 9 o Evi 10]

Pel punt E, tirem EK paral·lel a BD [Ei 31]
i el dimidiem pel punt H. [Ei 10]

Aquest punt és el centre de gravetat del triangle CBD, tal com estableix la mecànica —*ἐν τοῖς Μηχανικοῖς*. [EPi 14]

636. Masià (2016), p. 154-156, 157, 158-159, 160-161, 167-169, 169-170 i 170-171, respectivament.

Separem el triangle $\triangle BCD$ del segment BC i posem el centre de gravetat en el punt E.

Hem demostrat que, si pengem el triangle pel punt E, tot resta en equilibri gràcies al pes F.[637]

I, atès que l'un [el triangle] està suspès del punt E i l'altre [el pes] del punt A,

els seus pesos són inversament proporcionals als braços de la balança. [EPI 7]

Per tant, AB és a BE com el triangle $\triangle BCD$ al pes F.

Però AB equival al triple de B.

En definitiva, doncs, el triangle $\triangle BCD$ equival a tres vegades el pes F. [Nc 1]

I, recíprocament, si el triangle $\triangle BCD$ ho fa a tres vegades el pes F, la balança està equilibrada. ♠

B.2c_2 [QP 8] *Sigui B el punt mitjà d'un braç de balança ABC. Considerem un triangle rectangle $\triangle CED$ amb l'angle recte del vèrtex E suspès del catet CE. Suposem que F és un pes que, col·locat en el punt A, equilibra* [*el pes d*]*el triangle $\triangle CDE$ tal com es veu. Suposem també que la raó que hi ha entre els segments AB i BE és la que hi ha entre* [*el pes d*]*el triangle $\triangle CDE$ i el pes K.*[638] *Afirmo que el pes F és més petit que el* [*pes de*] *$\triangle CDF$ i més gran que el* [*pes*] *de K.*

[*Demostració.*][639] Considerem el centre de gravetat H del triangle $\triangle CDE$. [EPI 14]

Pel punt H, tirem el segment GH paral·lel a DE. [EI 31]

Com que el triangle $\triangle CDE$ s'equilibra amb el pes F,

se'ns fa evident la proporció

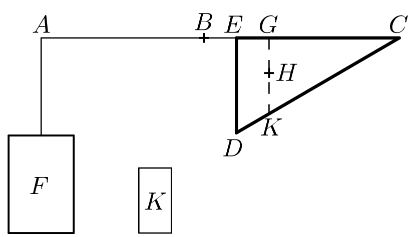


FIGURA QP 8

637. Probablement, Arquimedes ho havia demostrat en la monografia perduda *Sobre les balances* (*Περὶ ζυγῶν*) (pàgina 27).

638. $\frac{AB}{BE} = \frac{\triangle CDE}{K}$.

639. Aquesta demostració, que estableix una doble desigualtat, necessita la proposició d'igualtat de proporcions següent: $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ i $\mathfrak{D} < \mathfrak{C}$, aleshores $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$. [Immediat de la definició d'EV 5.]

següent: la raó que hi ha entre [el triangle] $\triangle CDE$ i [el pes] F és la mateixa que hi ha entre AB i BG. [EPI 6 i 7]

Per tant, [el pes] F és més petit que el [pes del triangle] $\triangle CDE$ [, ja que $AB > BG$]. [Nota 639]

Ara bé, també sabem que la raó que hi ha entre AB i BE és la mateixa que la de[ls pesos] $\triangle CDE$ i K.

I que la raó que el triangle $\triangle CDE$ té amb K és més gran que la que té amb F. [Nota 639]

En definitiva, doncs, F és més gran que K. [Dv 7] ♠

B.2*c*3 [QP 10] *Sigui B el punt mitjà d'un braç de la balança ABC. Considerem un trapezi $\bigtriangleup BDGK$ amb angles rectes en els vèrtexs B i G, i el costat DK inclinat cap al vèrtex C[, és a dir, que la seva prolongació passa per C]. Suposem que AB és a BG com $\bigtriangleup BDGK$ a L.*[640] *I pengem de la balança el $\bigtriangleup BDGK$ pels punts B i G, i una àrea F per A, que el mantingui en la posició d'equilibri en la qual es troba. Afirmo que l'àrea F és inferior a la L.*

[*Demostració.*] Tallem el segment AC pel punt E de manera que la raó que hi ha entre dues vegades BD i KG junts i dues vegades KG i BD junts és la mateixa que hi ha entre EG i BE. [EVI 10]

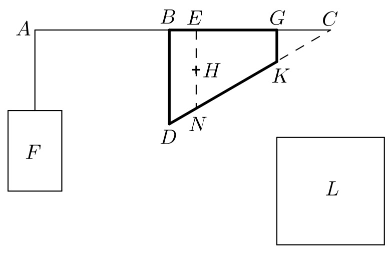


FIGURA QP 10

Dimidiem, per H, el segment paral·lel a BD pel punt E.

El punt H és el centre de gravetat del trapezi $\bigtriangleup BDKG$, segons s'ha establert en els llibres de mecànica. [EPI 15]

Si pengem el trapezi esmentat del punt E i el separem dels punts B i G, s'equilibra amb el pes F que penja del punt A per les mateixes raons que hem fet servir abans.

Per tant, la raó que hi ha entre AB i BE és la mateixa que la del trapezi $\bigtriangleup BDKG$ i l'àrea F. [EPI 6 i 7]

Així doncs, la raó que el trapezi $\bigtriangleup BDKG$ té amb F és més gran que la que té amb L,

640. $\frac{AB}{BG} = \frac{\bigtriangleup BDGK}{L}$.

ja que la raó que AB té amb BE ho és més que la que té amb BG. [Dv 7]

En definitiva, el pes F és més gran que el pes L. [Dv 7] ♠

B.2*c*₄ [QP 12] *Sigui C el punt mitjà d'una balança AC. Considerem el trapezi ⏢$DEKH$ que té els angles rectes en els vèrtexs E i H i els costats KD i EH orientats cap a l'extrem C [de la balança]. Suposem que el segment AB és al BH com el trapezi a l'àrea M i que el AB al BE com el trapezi a l'àrea L. Finalment, pengem el trapezi ⏢$DEKH$ al braç de la balança pels punts E i H i l'equilibrem amb un pes F situat en l'extrem A [de la balança].*

Afirmo que [el pes de] l'àrea F és més gran que [el de] la L i més petit que [el de] la M.

[*Demostració.*] Sigui G el centre de gravetat del trapezi ⏢$DEKH$. [EPI 15]

Pel punt G, tirem el segment GI paral·lel a DE. [EI 31]

Si despengem el trapezi dels punts E i H i el pengem pel punt I, mantindrà l'equilibri amb l'àrea F per les raons que hem exposat amb anterioritat. [QP 6]

Ara bé, atès que el trapezi ⏢$DEKH$ i l'àrea F suspesos pels punts I i A, respectivament, s'equilibren,
el trapezi és a l'àrea F com el segment AB al BI.
[llei de la balança, EPI 6 i 7]

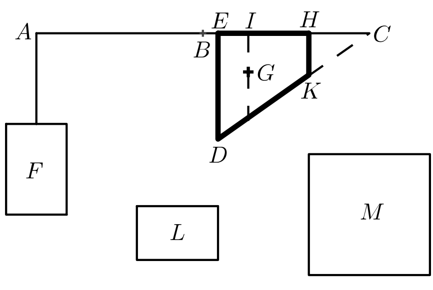


FIGURA QP 12

I d'això en resulta que la raó que hi ha entre el trapezi i l'àrea L és més gran que la que hi ha entre aquest i l'àrea F, [Ev 8]
i que la que hi ha entre el mateix trapezi i l'àrea M és més petita que la que hi ha entre aquest i l'àrea F. [Ev 8]

En definitiva, l'àrea F és més gran que la L i més petita que la M. [Dv 7] ♠

B.2*c*₅ [QP 14] *Sigui ◡BQC un segment parabòlic determinat per una corda i un arc de paràbola. Considerem el segment BC perpendicular* *al diàmetre i, pels punts B i C, tirem els segments BD i CD, el primer paral·lel al diàmetre i el segon tangent a la paràbola pel punt C. Obtenim un triangle rectangle $\triangle BDC$. Ara, dividim BC en les parts iguals BE, EF, FG, GI i IC. Pels punts de divisió, tirem ES, FT, GU i IO i unim l'extrem lliure amb el punt C. Afirmo que el triangle $\triangle BDC$ és:* a*) inferior al triple de la suma de ⏢KE, ⏢LF, ⏢MG, ⏢NI i el triangle $\triangle OIC$, i* b*) superior al triple de la suma dels trapezis ⏢FV, ⏢GH, ⏢IQ i el triangle $I\triangle PC$.*[641]

[*Demostració.*] Tirem el segment ABC en el qual els segments AB i BC són iguals [i BC és la corda del segment parabòlic].

Considerem AC com una balança amb el fulcre a B.

Col·loquem el triangle $\triangle BDC$ a la balança de manera que el catet BC penja dels punts B i C.

I, a l'altre extrem, en el punt A, hi tenim els pesos R, W, X, Z i D_1, de manera que R, W, X i Z equilibren els trapezis ⏢DE, ⏢FS, ⏢TG i ⏢UI, col·locats allà on són, respectivament, i D_1 el triangle $\triangle OIC$ [també col·locat al seu lloc].

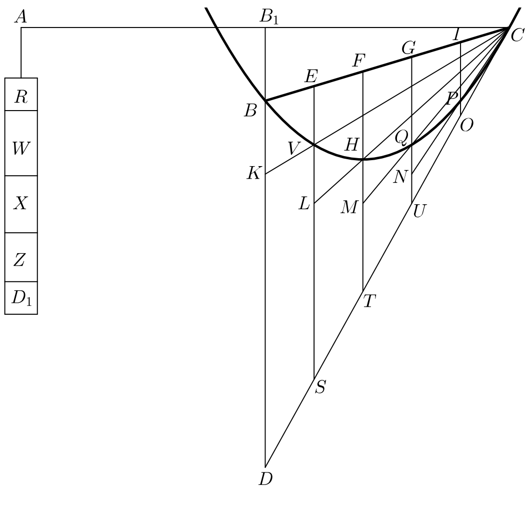


FIGURA QP 14 i 15[642]

I tots [els pesos] junts equilibren totes les figures [geomètriques juntes],

641. Per a demostrar-ho, usa la balança i, per tant, els resultats previs, que adquireixen tot el seu significat.

La proposició QP 15 estableix el mateix resultat però estès al cas en el qual la base no és perpendicular al diàmetre de la paràbola.

642. En el cas QP 14, els punts B i B_1 coincideixen i el segment de paràbola té la corda BC perpendicular al diàmetre, o sigui, a BD.

és a dir, el triangle $\triangle BDC$ equival al triple de la suma dels pesos R, W, X, Z i D_1. [QP 6]

Com que el segment de paràbola ⌣ BDC està limitat per una corda i una paràbola,
que, pel punt B, hem tirat el segment BD paral·lel al diàmetre i, pel punt C, el segment CD tangent a la paràbola per C,
i que hem tirat un altre segment SE també paral·lel al diàmetre,
diem que el segment BC és al BE com SE a EV. [QP 5]

Per tant, BA és a BE com el trapezi ⏢ DE al ⏢ KE.[643]

Anàlogament, podem establir que AB és a BF com el trapezi ⏢ SF al ⏢ LF,
que AB és a BG com el trapezi ⏢ TG al ⏢ MG i que AB és a BI com el trapezi ⏢ UI al ⏢ NI.

a) Aleshores, com que
el trapezi ⏢ DE té un angle recte en els vèrtexs B i E,
els costats no paral·lels es tallen en el punt C,
equilibra, col·locat al seu lloc, un pes R penjat del punt A
i BA és a BE com el trapezi ⏢ DE al ⏢ KE,
resulta que el pes de l'àrea del trapezi ⏢ KE és més gran que el pes R. [QP 10]

I, a més, com que el trapezi ⏢ DF, amb angles rectes en els punts F i E i el costat ST convergint a la base en el punt C, i com que s'equilibra col·locat al seu lloc amb el pes W que penja del punt A, tenim que AB és a BE com el trapezi ⏢ FS al ⏢ FV, i que AB és a BF com el trapezi ⏢ FS al ⏢ LF.

I d'això en resulta que el pes W és més petit que [el pes d]el trapezi ⏢ LF i més gran que el del ⏢ FV.

Per les mateixes raons, el pes X és més petit que [el pes d]el trapezi ⏢ MG i més gran que [el d]el trapezi ⏢ HG,
el pes Z és més petit que [el pes d]el trapezi ⏢ $NPIG$ i més gran que [el d]el trapezi ⏢ QI,

643. El trapezi ⏢ DE és al ⏢ KE com el segment mitjà de BE paral·lel a BD, limitat pel segment DS, al mitjà de BE paral·lel a BD, limitat pels segments BK i KV. Però el primer segment és al segon com SE a VE, i SE és a VS com BC [o BA] a EB. Per tant, BA és a BE com el trapezi ⏢ DE al ⏢ KE. Vegeu l'exercici 20 (pàgina 65).

i el pes D_1 és més petit que [el d]el triangle $\triangle\, OIC$ i més gran que [el d]el triangle $\triangle\, CIP$. [QP 12]

I, atès que els [pesos dels] trapezis ⏢ KE, ⏢ LF, ⏢ MG i ⏢ NI i [el d]el triangle $\triangle\, OIC$ són més grans que [els pesos] R, W, X, Z i D_1, la suma [dels pesos] de tots els trapezis és més gran que la suma de[ls pesos] R, W, X, Z i D_1.

Ara bé, aquesta darrera suma equival a la tercera part del triangle $\triangle\, BDC$. [QP 6]

Per tant, [el pes d]el triangle $\triangle\, BDC$ és més petit que el triple de [els pesos d]els trapezis ⏢ KE, ⏢ LF, ⏢ MG i ⏢ NI i [el d]el triangle $\triangle\, OIC$. ♠

b) Novament, els [pesos dels] trapezis ⏢ FV, ⏢ HG i ⏢ IQ són més petits que [els pesos] W, X i X, respectivament,
i [el d]el triangle $\triangle\, IPC$ més gran que [el pes de] D_1.

Per tant, la suma [dels pesos] de tots els trapezis és més petita que la de [tots els pesos] D_1, Z, X i W.

En definitiva, el triangle $\triangle\, BDC$ és més gran que [la suma dels [pesos d]els trapezis ⏢ VF, ⏢ HG i ⏢ IQ, i el triangle $\triangle\, ICP$ és més petit que tres vegades [la suma dels pesos de] les àrees abans esmentades. ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

B.2*c*₆ [QP 16] *Considerem un segment parabòlic* $\smile\, BHC$ *de base* BC*. Pel punt* B*, tirem la paral·lela* BD *al diàmetre i, per* C*, la tangent* CD *a la paràbola. Sigui* F *un pes igual a la tercera part del triangle* $\triangle\, BCD$*. Afirmo que el* [*pes del*] *segment parabòlic* $\smile\, BHC$ *és igual a*[*l pes de*] *la figura* F*.*

[*Demostració.*] Si no són iguals,[644]

[*a*)] o bé el pes del segment de paràbola és més gran,

[*b*)] o bé és més petit.[645]

a) Afirmo que el segment parabòlic $\smile\, BCH$ no és més gran que F.

Si ajuntem aquest excés un nombre [finit convenient] de vegades, superem el triangle $\triangle\, BCD$.[646]

---

644. Hipòtesi de l'absurd.
645. Disjunció de casos.
646. Aquí fa un ús explícit del postulat d'Arquimedes que, com ja hem

Ara podem considerar una àrea[647] més petita que l'excés, que també és una part del triangle $\triangle BCD$. [Ex 1][648]

Sigui $\triangle BCE$ aquesta àrea més petita que l'excés i que és part del triangle $\triangle BCD$.

És evident que el segment BE també és una part de[l segment] AB.[649]

Dividim, doncs, BD en tantes parts iguals com vegades hem ajuntat l'excés del segment sobre l'àrea F. [EVI 9 o EVI 10]

Siguin E, G, I i K els punts en els quals queda dividit [el segment BD].

Unim [els punts] E, G, I i K amb C. [P 1]

Aquests segments [EC, GC, IC i KC] tallen la paràbola, ja que [el segment] CD és tangent [a aquesta pel punt C].[650]

Pels punts de tall, tirem els segments MV, NR, OH i QP paral·lels a BD. [EI 31]

Aleshores, com que el triangle $\triangle BCE$ és més petit que l'excés del segment $\smile BHC$ sobre [l'àrea] F,
és evident que l'àrea F i [la d]el triangle $\triangle BCE$ juntes són més petites que el segment $\smile BHC$.[651]

I la suma dels trapezis $\text{⏢} ME$, $\text{⏢} VL$, $\text{⏢} HR$ i $\text{⏢} HP$ pels quals passa la paràbola i el triangle $\triangle CPS$ equival al triangle $\triangle BCE$,
ja que el trapezi $\text{⏢} ME$ és comú, el $\text{⏢} ML$ igual al $\text{⏢} VL$,
el $\text{⏢} LO$ al $\text{⏢} HR$, el $\text{⏢} WO$ al $\text{⏢} PH$,
i el triangle $\triangle CWQ$ al $\triangle CPS$.[652]

---

dit abans, estableix com a postulat cinquè a EC, però que esmenta en la introducció d'aquesta monografia i també en la de LE.

647. De fet, fa el paper d'un pes.

648. És a dir, tenim que $n(\triangle BHC - F) > \triangle BCD$. Per tant, $\frac{1}{n} \triangle BCD < (\triangle BHC - F) :=$ l'excés.

649. De fet, la mateixa part.

650. La tangent a la paràbola per un punt és única, és a dir, qualsevol altre segment, prolongat, la talla en un altre punt si es troba dins l'angle $\widehat{BCD}$. Si es troba fora, no la torna a tallar [CI 35].

651. Vegeu l'explicació més formal que hem fet en la pàgina 65.

652. L'ítem a de l'exercici 19 (pàgina 64).

Per tant, l'àrea F és més petita que la suma dels trapezis $\trapezium ML$, $\trapezium OR$, $\trapezium QH$ i el triangle $\triangle QPC$.[653]

Però el triangle $\triangle BDC$ és tres vegades l'àrea F.

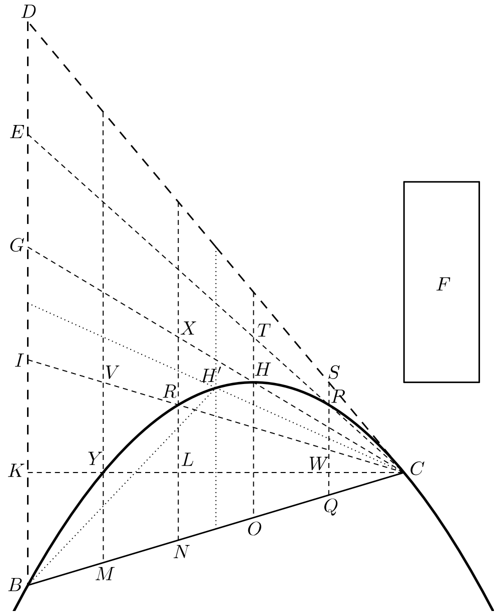


Figura QP 16

Per tant, és més petit que el triple de la suma dels trapezis $\trapezium ML, \trapezium OR, \trapezium QH$ i el triangle $\triangle QPC$.

I això és impossible ja que hem vist que era més gran que el triple.

[QP 14] ♠

Així doncs, hem establert que el segment parabòlic $\smile BHC$ no és més gran que l'àrea F.

b) Afirmo que el segment parabòlic $\smile BHC$ no és més petit que F.

Suposem que ho és.[654]

L'excés de l'àrea F sobre el segment $\smile BHC$ repetit un nombre [finit] de vegades supera el triangle $\triangle BDC$.

Per tant, podem considerar una àrea més petita que aquest excés que, alhora, forma part del triangle $\triangle BDC$.

Sigui, doncs, el triangle $\triangle BCE$ més petit que aquest excés que també és una part del triangle $\triangle BDC$.

I la resta, com abans.

653. L'àrea formada pel triangle $\triangle BCE$ i l'àrea F juntes és més petita que el segment $\smile BHC$. Si sostraiem $\triangle BCE$ a totes dues àrees, tindrem que $F < \smile BHC - \triangle BCE$, o bé que $F < \smile BHC - \trapezium ME - \trapezium ML - \trapezium HR - \trapezium HP - \triangle CRS$. És a dir, $F < \trapezium M + \trapezium OR + \trapezium QH + \triangle QPC$.

654. Hipòtesi de l'absurd.

Com que el triangle $\triangle\, BCE$ és més petit que l'excés de l'àrea F sobre el segment parabòlic $\smile\!\!/\, BHC$,
el triangle $\triangle\, BCE$ i el segment [parabòlic] $\smile\!\!/\, BHC$ junts són més petits que l'àrea F.

Però aquesta àrea és més petita que la suma dels trapezis ⏢ EM, ⏢ VN, ⏢ XO, ⏢ QT i el triangle $\triangle\, CQS$,
ja que el triangle $\triangle\, BDC$ és tres vegades l'àrea F
i més petit que el triple de la suma dels trapezis que acabem de sumar, com hem vist en la proposició precedent. [QP 15]

Per tant, el triangle $\triangle\, BCE$, juntament amb el segment [parabòlic] $\smile\!\!/\, BHC$, és més petit que la suma dels trapezis ⏢ EM, ⏢ VN, ⏢ OX, ⏢ QT i el triangle $\triangle\, CQS$.

En conseqüència, si sostraiem el segment comú,
el triangle $\triangle\, CBE$ esdevé més petit que la suma de les àrees restants.

I això és impossible,
ja que hem demostrat que el triangle $\triangle\, BEC$ equival a la suma dels trapezis ⏢ EM, ⏢ VL, ⏢ HR, ⏢ HO i el triangle $\triangle\, CPS$,
que és més gran que la suma de les àrees restants.

Per tant, el segment [parabòlic] $\smile\!\!/\, BHC$ no és més petit que l'àrea F. ♠

Ara bé, abans ja hem demostrat que tampoc no és més gran.

Per tant, el segment $\smile\!\!/\, BHC$ és igual a l'àrea F. ♠

B.2*c*7 [QP 17] *Un cop demostrada la proposició anterior, és evident que el segment parabòlic comprès entre un arc de paràbola i la seva corda* [*el segment que uneix els seus extrems*] *equival a quatre terceres parts el triangle que té la corda com a base i l'altura del segment parabòlic.*[655]

[*Demostració.*] Considerem un segment de paràbola,
limitat per un arc de paràbola i la seva corda
i de vèrtex el punt G.

Sigui $\triangle BGC$ el triangle inscrit de la mateixa base i la mateixa altura que el segment parabòlic.

655. És un porisma immediat. Vegeu l'ítem *b* de l'exercici 19 (pàgina 64).

Atès que G és el vèrtex del segment en qüestió,[656]
el segment rectilini EG paral·lel al diàmetre pel punt G [E I 31]
dimidia la base BC,
que és paral·lela a la tangent a la paràbola pel punt G. [QP 1]

Ara, pel punt B, tirem el segment BD paral·lel al diàmetre [E I 31]
i la tangent CD a la paràbola pel punt C.

Aleshores, atès que el segment KG
és paral·lel al diàmetre,[657]
CD tangent a la paràbola per C
i EC paral·lel a la tangent a la paràbola per G,
el triangle $\triangle BDC$ equival a quatre vegades el $\triangle BGC$. [E VI 4]

I, com que el triangle $\triangle BAC$ equival al triple del segment parabòlic ⌓ BGC, [QP 16]
i alhora al quàdruple del $\triangle BGC$,
és evident que el segment ⌓ BGC equival a quatre terceres parts el $\triangle BGC$. [D V 5 o E V 15] ♠

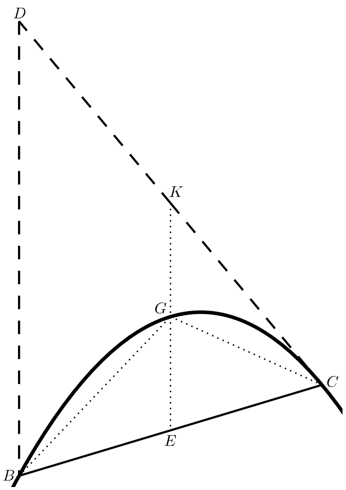


FIGURA QP 17

B.2c_6 [QP 17, definició] Donat un segment limitat per una corda i per una cònica, anomenem *base* la corda, *altura* el segment més gran de tots els segments paral·lels al diàmetre que uneixen la base amb la cònica, i *vèrtex* l'extrem d'aquest segment màxim que és en la cònica.

B.2*d* L'àrea del segment de paràbola mitjançant la geometria i l'exhaustió

p. 66 Un cop Arquimedes ha establert, amb la mecànica, quin triangle quadra el segment de paràbola, en fa la demostració geomètrica, és a dir, sense emprar cap recurs extern a la geometria.

656. Curiosament, la definició de vèrtex, base i altura d'un segment de paràbola es troba després d'aquesta demostració (pàgina 240).

657. El punt K és el punt de tall de la prolongació del segment EG i la tangent CD [P 5].

Hi dedica set proposicions que reproduïm en els textos següents. Les cinc primeres són molt elementals.[658]

B.2*d*$_1$ [QP 18] *Si, pel punt mitjà de la base d'un segment de paràbola, tirem un segment paral·lel al diàmetre o el mateix diàmetre, el punt en el qual talla la paràbola és el vèrtex del segment parabòlic.*[659]

[*Demostració.*] Sigui $\smile ABC$ un segment parabòlic.

Pel punt mitjà de la base, tirem el segment DB paral·lel al diàmetre [o el mateix diàmetre]. [Eɪ 31]

Atès que, dins el segment parabòlic, hem tirat un segment BD paral·lel al diàmetre,

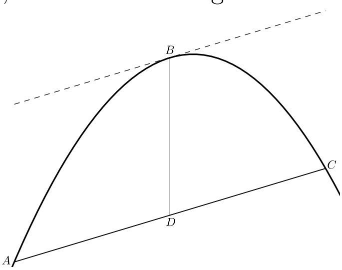


Figura QP 18

tenim que els segments AD i DC són iguals,
i la corda i la tangent pel punt B, paral·leles. [QP 1] ♠

[Porisma.] Per tant, d'entre totes les perpendiculars tirades des dels punts de la paràbola a la base DC,
la tirada des del punt B és la més gran. ♠

Per tant, B és el vèrtex del segment parabòlic. ♠

B.2*d*$_2$ [QP 19] *Tirem dos segments paral·lels al diàmetre d'un segment parabòlic, l'un pel punt mitjà de la base i l'altre pel punt mitjà d'una de les meitats de la base. El del punt mitjà de la base equival a quatre terceres parts el del punt mitjà del segment mitjà.*

[*Demostració.*] Sigui $\smile ABC$ un segment parabòlic.

Pels punts mitjans de AC i de AD, tirem els segments BD i EF paral·lels al diàmetre BD. [Eɪ 10 i 31]

Després tracem el segment FH paral·lel a AC.

658. Per a una millor comprensió de les proposicions, llegiu abans els exercicis 21 i 22 (pàgines 67 i 68) i la demostració més formalitzada (pàgina 68).

659. La recta que passa per aquest i és paral·lela a la base és la tangent per aquest punt a la paràbola, i recíprocament. La perpendicular que baixa de la tangent a la base proporciona l'altura del segment parabòlic. Vegeu l'ítem *a* de l'exercici 21 (pàgina 67).

Com que en una paràbola hem tirat el segment BD paral·lel al diàmetre i els segments AD i FH paral·lels a la tangent a la paràbola pel punt B,

el segment BD és al BH com el quadrat de costat AD al de costat FE. [QP 3]

Per tant, BD és quatre vegades BH.

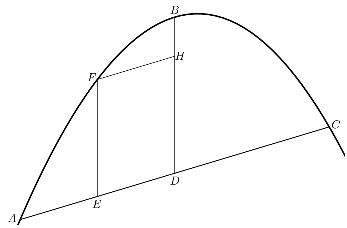


Figura QP 19

I és evident que el segment BD és igual a quatre terceres parts del segment EF. ♠

B.2$\boldsymbol{d_3}$ [QP 20] *El triangle inscrit en un segment parabòlic de la mateixa base i la mateixa altura que aquest és més gran que la seva meitat.*

[*Demostració.*] Considerem el segment parabòlic ⌣ ABC i el triangle $\triangle ABC$ amb la mateixa base i la mateixa altura que aquest. [QP 18]

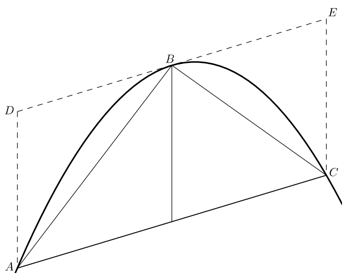


Figura QP 20

Com que el triangle té la mateixa base i la mateixa altura que el segment parabòlic,

el punt B és el vèrtex del segment.

Per tant, AC és paral·lel a la tangent a la paràbola pel punt B.

I, precisament, per aquest punt B, tirem el segment DE paral·lel al segment AC, [EI 31]

i, pels punts A i C, els segments AC i CE paral·lels al diàmetre. [EI 31]

Aquests segments són exteriors a la paràbola.[660]

Per tant, el triangle $\triangle ABC$ és la meitat del paral·lelogram. [EI 38]

Resulta, doncs, indiscutible que és més gran que la meitat del segment.[661] ♠

660. Aquí s'accepta que les tangents a la paràbola per un punt seu no la tallen en cap altre punt i no entren dins el segment parabòlic [CI 35].

661. L'evidència, basada en la figura, es fonamenta en el fet que el triangle $\triangle ABC$ està inscrit en el segment ⌣ ABC que, al seu torn, ho està en

B.2$d_{3.1}$ [Porisma.] *Un cop hem establert aquest resultat, és evident que podem inscriure un polígon en el segment de paràbola, de manera que la suma dels segments que resten* [*del segment parabòlic*] *és més petita que una àrea donada.*[662]

[*Demostració.*] Això és així ja que hi sostraiem de manera continuada una àrea més gran que la meitat,

el romanent —que és la suma dels segments parabòlics obtinguts— disminueix de manera ininterrompuda

fins a aconseguir-ne un de més petit que l'àrea donada. [Ex 1] ♠

B.2d_4 [QP 21] *Considerem un segment parabòlic. Suposem que s'hi inscriu un triangle de la mateixa base i la mateixa altura que aquest i que, en els segments que s'originen contínuament, s'hi inscriuen altres triangles de la mateixa base i la mateixa altura que aquests segments. El triangle inscrit en el segment equival a vuit vegades cada un dels altres triangles inscrits en els altres segments.*

[*Demostració.*] Considerem el segment parabòlic ⌣ ABC.

Dimidiem AC en dues parts iguals pel punt D. [EI 10]

Tirem el segment BD paral·lel al diàmetre. [EI 31]

Aleshores, el punt B és el vèrtex del segment parabòlic. [QP 18]

Per tant, el triangle $\triangle ABC$ té la mateixa base i la mateixa altura que el segment parabòlic.

Ara dimidiem AC pel punt E [EI 10]

i tirem el segment EF paral·lel al diàmetre. [EI 31]

El segment AB queda dividit en dues parts iguals pel punt H. [EVI 2]

Per tant, el punt F és el vèrtex del segment parabòlic ⌣ AFB. [QP 18]

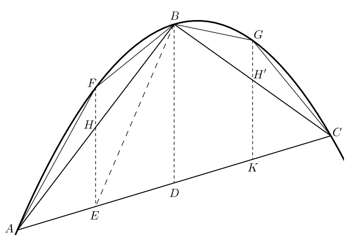


FIGURA QP 21

D'això en resulta que el triangle $\triangle AFB$ té la mateixa base i la mateixa altura que el segment parabòlic ⌣ AFB.

el paral·lelogram ▱ $ADEC$. A més, sabem que el triangle és exactament la meitat del paral·lelogram. Vegeu el cas del cercle. PLA (2021), p. 57-58.

662. Amb aquest porisma, Arquimedes prepara l'eina que necessita per a poder procedir a l'exhaustió.

Hem de demostrar que el triangle $\triangle\, ABC$ equival a vuit vegades el triangle $\triangle\, ABF$.

En efecte, el segment BD ho fa a quatre vegades la tercera part del segment EF [QP 19]
i al doble del segment HF.

Per tant, EF és el doble de HF.[663]

I, consegüentment, el triangle $\triangle\, AEB$ equival al doble del triangle $\triangle\, FBA$, [Evi 1]
ja que el triangle $\triangle\, AEH$ és el doble del triangle $\triangle\, AHF$ i el $\triangle\, HBE$, el doble del $\triangle\, FHB$. [Evi 1 i Nc 2]

Per tant, el triangle $\triangle\, ABC$ equival a vuit vegades el $\triangle\, AFB$.

De manera anàloga, podem demostrar que també equival a vuit vegades el triangle inscrit en el segment parabòlic $\smile BGC$.[664] ♠

B.2*d*₅ [QP 22] *Considerem un segment parabòlic. Ajuntem tantes àrees com vulguem* [*en nombre finit*], *cada una equivalent a quatre vegades la següent, i suposem que la més gran és igual al triangle que té la mateixa base i la mateixa altura que el segment parabòlic. Afirmo que la suma de totes aquestes àrees és més petita que aquest.*

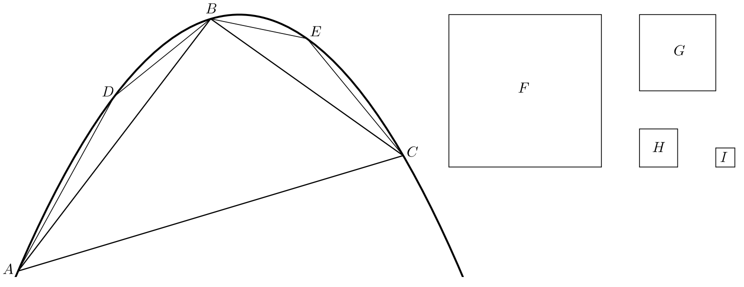


Figura QP 22

[*Demostració.*] Considerem el segment parabòlic $\smile ABC$
i les àrees F, G, H i I, cada una equivalent a quatre vegades la següent.

Suposem que la primera, F, equival a l'àrea del triangle $\triangle\, ABC$ de la mateixa base i la mateixa altura que el segment parabòlic $\smile ABC$.

663. És un càlcul simple. Vegeu l'ítem d de l'exercici 21 (pàgina 67).

664. Aquí Arquimedes inicia l'anàlisi dels termes de la sèrie $\triangle\, ABC$, $\frac{1}{4}\triangle\, ABC$, etc.

Afirmo que el segment parabòlic $\smile ABC$ és més gran que [la suma de] F, G, H i I.

[*Demostració*.] Siguin el punt B el vèrtex [del segment parabòlic $\smile ABC$] i els punts D i E els dels segments parabòlics residuals [$\smile ADB$ i $\smile BEC$].

Atès que el triangle $\triangle ABC$ equival a vuit vegades cada un dels triangles $\triangle ADB$ i $\triangle BEC$, [QP 21]
és evident que equival a quatre vegades la seva suma.

I, com que el triangle $\triangle ABC$ és igual a l'àrea F,
resulta que la suma dels triangles $\triangle ADB$ i $\triangle BEC$ equival a l'àrea G.

De manera semblant, la suma dels triangles inscrits en els segments subsegüents és igual a l'àrea H,
i els següents a l'àrea I.

En definitiva, la suma de totes les àrees donades equival a un polígon inscrit en els segment parabòlic $\smile ABC$.

I això posa de manifest que [aquesta suma] és inferior al segment parabòlic esmentat. ♠

B.2*d*$_6$ [QP 23] *Considerem tantes magnituds*[665] *com vulguem* [*en nombre finit*]*, cada una equivalent a quatre vegades la següent. Les ajuntem i hi afegim la tercera part de la més petita. El resultat és quatre terceres parts de la més gran.*[666]

Considerem les magnituds A, B, C, D i E, cada una equivalent a quatre vegades la següent.

Les ajuntem totes.[667]

Suposem que A és la més gran
i que F, G, H i I equivalen a la tercera part de B, C, D i E, respectivament.

665. Curiosament, Arquimedes usa el terme *magnitud* —μέγεϑος— i no pas *àrea*. I Mugler (1971*a*), p. 192, *segments*, i no pas *àrees* per a representar les magnituds de la proposició.

666. La demostració és un simple exercici de sumar enrere.

667. Com ja hem indicat en altres indrets, accepta que les magnituds d'una mateixa classe es poden ajuntar i que proporcionen una magnitud d'aquesta classe.

[*Demostració.*] Atès que F és la tercera part de B i que, al seu torn, és la quarta part de A,
juntes equivalen a la tercera part de A.[668]

Per les mateixes raons, G i C, H i D, i I i E juntes equivalen a la tercera part de B, C i D, respectivament.

Per tant, la suma de les magnituds B, C, D, E, F, G, H i I és igual a la tercera part de les magnituds A, B, C i D.

Però la suma de les magnituds G, H i I equival a la tercera part de la suma de les B, C i D.

En definitiva, la suma de les altres magnituds —B, C, D, E i I— és igual a la tercera part de la magnitud restant A.

Per tant, la suma de les A, B, C, D i E, juntament amb la I —que és la tercera part de la E—, equival a quatre vegades la tercera part de la primera. ♠

B.2*d*₇ [QP 24] *Un segment parabòlic equival a quatre terceres parts del triangle de la mateixa base i la mateixa altura que el segment parabòlic.*[669]

Siguin $\smile ADBEC$ un segment de paràbola,
$\triangle ABC$ el triangle amb la mateixa base i la mateixa altura que el segment parabòlic
i K l'àrea igual a quatre vegades la tercera part del triangle $\triangle ABC$.

Volem demostrar que el segment parabòlic $\smile ADBEC$ equival a K.

[*Demostració.*] Si l'àrea K no equival al segment parabòlic $\smile ADBEC$,[670]
és a) més gran, o b) més petita.[671]

a) En primer lloc, suposem que el segment parabòlic $\smile ADBEC$ és més gran que l'àrea K.

En el segment parabòlic $\smile ADBEC$, hi inscrivim els triangles $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ i $\triangle BEC$, tal com hem indicat, [QP 21]
i així successivament els altres triangles de la mateixa base i la mateixa altura que els segments parabòlics que es van generant.

668. $\mathfrak{F} + \mathfrak{B} = \frac{1}{3}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} = \frac{4}{3}\mathfrak{B} = \frac{1}{3}\mathfrak{A}$.
669. Com dèiem, un segment parabòlic és quadrable.
670. Hipòtesi de l'absurd.
671. Disjunció de casos.

La suma dels segments parabòlics restants és certament més petita que l'excés del segment parabòlic $\smile ADBEC$ sobre l'àrea K.

Per tant, el polígon inscrit és més gran que l'àrea K. I això és impossible.

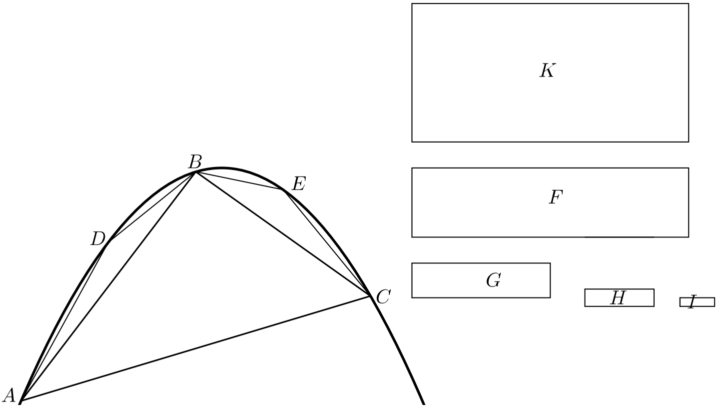


FIGURA QP 24

En efecte, el triangle $\triangle ABC$ equival a quatre vegades la suma dels triangles $\triangle ADB$ i $\triangle BEC$ que,
al seu torn, equival a quatre vegades la suma dels inscrits en els segments parabòlics següents.

I així successivament —*καὶ ἀεὶ οὕτω*. [QP 21]

És evident que la suma de totes aquestes àrees és més petita que quatre vegades la tercera part de la més gran de totes. [QP 23]

Però l'àrea K equival a quatre vegades la tercera part d'aquesta àrea.

Per tant, el segment parabòlic $\smile ADBEC$ no és pas més gran que l'àrea K. ♠

b) En segon lloc, suposem que el segment parabòlic $\smile ADBEC$ és més petit que l'àrea K.

I que el triangle $\triangle ABC$ equival a l'àrea F,
l'àrea G a la quarta part de l'àrea F,
l'àrea H a la quarta part de l'àrea G,
i així successivament fins a la darrera àrea I, que és més petita que l'excés de l'àrea K sobre el segment parabòlic $\smile ADBEC$. [Ex 1]

La suma de les àrees F, G, H i I,
juntament amb la tercera de l'àrea I,
és igual a quatre vegades la tercera part de l'àrea F. [QP 23]

Però l'àrea K equival a quatre vegades la tercera part d'aquesta àrea.

Per tant, l'àrea K equival a la suma de les àrees F, G, H i I,
juntament amb la tercera part de l'àrea I.

Però l'excés de l'àrea K sobre la suma de les àrees F, G, H i I és més petit que l'àrea I
i l'excés de l'àrea K sobre el segment parabòlic $\smile ADBEC$, més gran.

És evident, doncs, que la suma de les àrees F, G, H i I és més gran que el segment parabòlic $\smile ADBEC$.

Però això és impossible perquè hem establert que ajuntant tantes àrees com calgui, cada una equivalent a quatre vegades la següent,
i la més gran al triangle inscrit en el segment,
la suma d'aquestes àrees és més petita que el segment. [QP 21] ♠

En definitiva, el segment parabòlic $\smile ADBEC$ no és més petit que l'àrea K.

I, tampoc, com ja hem vist, no és més gran.

Per tant, equival a l'àrea K.

Però l'àrea K és igual a quatre vegades la tercera part del triangle $\triangle ABC$.

En definitiva, doncs, el segment parabòlic $\smile ADBEC$ equival a quatre vegades la tercera part del triangle $\triangle ABC$. ♠

B.3 EPII: *Sobre l'equilibri de les figures planes*, llibre II, complet

p. 69 Reprenem, ara, el text *Sobre l'equilibri de les figures planes*. És una monografia senzilla però no tant com la primera. El seu objectiu és la determinació del centre de gravetat d'un segment parabòlic. Un cop establerts els centres de gravetat de les figures poligonals

nals més corrents i la seva quadratura, és natural que Arquimedes s'ho plantegés.[672]

B.3*a* Les definicions i els lemes d'EPII

Apleguem aquí el preàmbul a la proposició EPII 2. Conté qüestions generals que Arquimedes ha establert en altres indrets. p. 69

[Definició] 1. Si en un segment parabòlic[673] inscrivim un triangle de la mateixa base i la mateixa altura que aquest[674] i, successivament, en els segments parabòlics que generen els costats dels triangles adaptem el triangle corresponent, obtenim una figura [poligonal] inscrita en el segment parabòlic de manera adequada, *γνωρίμος ἐγγραφεσθαι*.[675]
[Lema] 2. Els segments que uneixen els vèrtexs dels triangles adaptats que es corresponen són paral·lels a la base.
[Lema] 3. Els diàmetres dels segments dimidien aquests segments paral·lels.
[Lema] 4. Aquests segments paral·lels divideixen el diàmetre del segment de paràbola en parts proporcionals als nombres senars començant des del vèrtex.
Tot això ho he demostrat en l'indret adequat.[676]

B.3*b* Les proposicions d'EPII: la determinació del centre de gravetat d'un segment de paràbola

En aquest paràgraf veurem que Arquimedes ens porta, a poc a poc, a determinar el centre de gravetat d'un segment parabòlic. p. 69

672. Donem aquest text després de QP perquè acceptem que Arquimedes el va escriure després (taula 2.2, pàgina 26).
673. Recordem que Arquimedes usa l'expressió «secció recta d'un con». Diu: «τμᾶμα τὸ πριεχόμενον ὑ̓πό τε εὐ̓θείας καὶ ὀρθογωνίου κώνον τομάς.»
674. El «triangle parabòlic» o «triangle adaptat al segment parabòlic».
675. Com hem vist a QP, són els polígons que serveixen per a exhaurir el segment parabòlic. Aquests polígons successius adequats al segment de paràbola —de $2n$ costats— els anomenarem, de manera genèrica, el «polígon adaptat» al segment parabòlic o, simplement, el «polígon parabòlic» sense fer referència al nombre de costats.
676. Diu: «ἐν ταῖς τῆ̓αξεσιν». Aquestes demostracions no han perviscut. Les podem establir usant QP 4 i QP 8. Vegeu el problema 10 (pàgina 155).

B.3b_1 [EPII 1] *Considerem dos segments parabòlics amb centres de gravetat diferents que es poden aplicar a un segment donat.*[677] a*) El centre de gravetat de l'àrea composta pels dos segments es troba en el segment que uneix els centres de gravetat de tots dos. I* b*) aquest centre de gravetat divideix aquest segment en parts inversament proporcionals a les àrees dels segments parabòlics.*[678]

[*Demostració.*] Siguin AB i CD les àrees dels segments parabòlics i E i F els centres de gravetat corresponents.

Suposem que la raó que hi ha entre AB i CD és la de HF i HE.

Volem demostrar que H és el centre de gravetat de l'àrea formada per [les àrees] AB i CD.

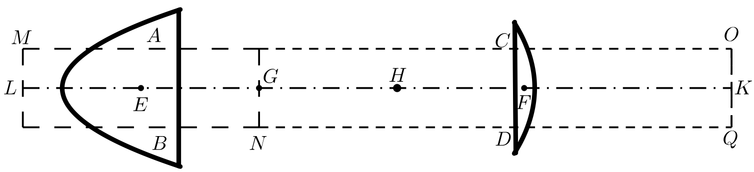


FIGURA EPII 1

Tirem els segments FG i FK iguals a[l segment] EH i el LG a[l segment] FH, o sigui a GE. [EI 2 o EI 3]

Aleshores, LH i KH són iguals. [Nc 2]

Doblant, l'àrea AB és a la CD com LG a GK. [EV 15]

Ara, a cada banda del segment LG, hi apliquem l'àrea de AB, [EVI 11][679] de manera que $\square\, MN$ és equivalent a aquesta.

El centre de gravetat de l'àrea $\square\, MN$ és el punt E. [EPI 9]

Completem el rectangle $\square\, NO$. [P 5]

L'àrea $\square\, MN$ és a la $\square\, NO$ com LG a GK. [EVI 1]

Per tant, l'àrea AB és a la CD com $\square\, MN$ a $\square\, NO$. [Nc 1 o EV 11]

677. Nota 679.

678. És un cas particular d'EPI 6 i EPI 7, però la demostració que dona Arquimedes es basa en EPI 9 i EPI 10.

679. Un segment parabòlic és quadrable (QP 24, pàgina 248) i, per tant, aplicable a un segment (EVI 11).

Permutem els termes mitjans —és a dir, apliquem *alternando*— i substituïm l'àrea AB per la ▭ MN. [Ev 7 i 16]

D'això en resulta que l'àrea CD equival a l'àrea ▭ NO [Ev 9]
el centre de gravetat de la qual és el punt F. [EPi 10]

I, atès que LH i HK són iguals
i que LK divideix els costats oposats per la meitat,
el centre de gravetat de la totalitat ▭ QM és el punt H. [EPi 9]

Però l'àrea ▭ MQ és igual a les ▭ MN i ▭ NO juntes.

En definitiva, el punt H és el centre de gravetat de l'àrea conjunta AB i CD. ♠

B.3b_2 [EPii 2] *El centre de gravetat de la figura es troba damunt el diàmetre del segment.*[680]

[*Demostració*.] Considerem el segment parabòlic ABC.

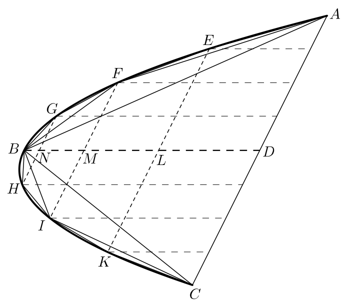


Figura EPii 2

Hi adaptem la figura poligonal $AEFGBHIKC$. [EPii, definició]
Volem demostrar que el centre de gravetat d'aquesta figura rectilínia es troba en el segment BD.

Sabem que el centre de gravetat del trapezi $AEKC$ és en el segment LD, [EPi 15]
el del trapezi $EFIK$ en el segment ML, [EPi 15]
el del trapezi $FGHI$ en el segment MN [EPi 15]
i, finalment, el del triangle $\triangle GBH$ a BN. [EPi 13]

Per tant, és evident que el centre de gravetat de la figura rectilínia sencera es troba en el diàmetre BD. ♠

B.3b_3 [EPii 3] *Inscrivim dos polígons adaptats amb el mateix nombre de costats*[681] *en dos segments parabòlics semblants —τμαματῶν ὁμοίων.*[682] *Els centres de gravetat de les figures rectilínies estan si-*

680. Com a preàmbul conté el que hem aplegat a B.3a (pàgina 249).
681. Podem veure que són semblants necessàriament. Ítem a de l'exercici 24 (pàgina 70).
682. La semblança de segments parabòlics no l'ha definit. Podem consi-

tuats de manera semblant en els diàmetres respectius.[683]

Siguin $\smile ABC$ i $\smile A'B'C'$ dos segments [parabòlics semblants].

Hi inscrivim polígons adaptats amb el mateix nombre de costats.

Siguin BD i $B'D'$ els diàmetres dels segments.

[*Demostració*.] Tirem els segments EK, FI i GH, i $E'K'$, $F'I'$ i $G'H'$ [corresponents en cada segment de paràbola].

Atès que els diàmetres BD i $B'D'$ queden dividits en parts semblants pels [segments] paral·lels,
que els segments són com els nombres senars successius [lema 4, pàgina 249]
i que n'hi ha el mateix nombre,

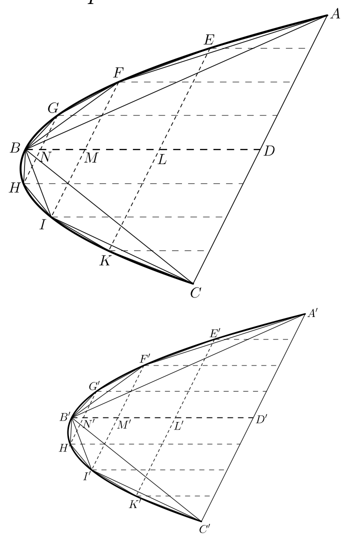


FIGURA B.1. EPII 3

és evident que no tan sols els segments dels diàmetres tenen la mateixa raó, sinó també els paral·lels.[684]

Però els centres de gravetat dels trapezis ⏢ $AEKC$ i ⏢ $A'E'K'C'$ són en els segments LD i $L'D'$ col·locats de manera semblant,
ja que la raó que hi ha entre AC i EK és la mateixa que la que hi ha entre $A'C'$ i $E'K'$.

I, anàlogament, els centres de gravetat dels trapezis ⏢ $EFIK$ i ⏢ $E'F'I'K'$ i dels trapezis ⏢ $FGHI$ i ⏢ $F'G'H'I'$
es troben col·locats de manera semblant en els segments LM i $L'M'$, i MN i $M'N'$, respectivament.

derar que els segments parabòlics semblants són aquells en els quals la base i el diàmetre són proporcionals. I tenen els segments paral·lels a la base a distàncies proporcionals també proporcionals.

683. És a dir, mantenen la raó de semblança de les bases i dels diàmetres.

684. Afirma, simplement, una cosa evident, que això és així. Diu: «δῆλον ὑς τά τε τμάματα τᾶν διαμέτρων ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσσεῖται, καὶ αἱ παράλληλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι.» Ítem *b* de l'exercici 24 (pàgina 70).

A més, els centres de gravetat dels triangles $\triangle\, GBH$ i $\triangle\, G'B'H'$ estan col·locats de manera semblant als segments BN i $B'N'$.

Finalment, els trapezis i els triangles són proporcionals.

És evident, doncs, que els centres de gravetat de les figures rectilínies senceres inscrites en els segments [parabòlics] $\smile ABC$ i $\smile A'B'C'$ es troben semblantment —*ὁμοίως διαιρεῖ*— en els diàmetres BD i $B'D'$. [EPI 6 i 7]

I això és el que volíem demostrar.[685] ♠

B.3*b*₄ [EPII 4] *El centre de gravetat d'un segment parabòlic està situat en el diàmetre del segment.*

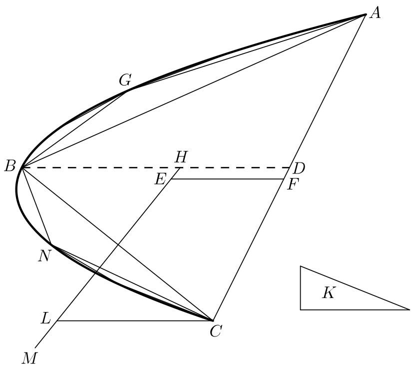


FIGURA EPII 4

Sigui $\smile ABC$ un segment parabòlic de diàmetre BD.

Volem demostrar que el centre de gravetat del segment parabòlic es troba en el segment BD.

[*Demostració.*] En cas contrari,[686]
suposem que el punt E és el seu centre de gravetat.[687]

Pel punt E, tirem EF paral·lel a BD. [EI 31]

En el segment parabòlic inscrivim el triangle $\triangle\, ABC$ adaptat, és a dir, amb la mateixa base i la mateixa altura que el segment parabòlic.

Considerem una àrea K de manera que la raó que hi ha entre el triangle $\triangle\, ABC$ i l'àrea K és la de CF i FD.

Inscrivim el polígon adaptat en el segment parabòlic
de manera que la suma dels segments restants és inferior a l'àrea K.[688]

685. Diu: «ὅπερ ἔδει δεῖξας.» Arquimedes no acaba sempre les proposicions amb aquesta expressió.

686. Hipòtesi de l'absurd.

687. Implícitament, acceptem que existeix el centre de gravetat d'un segment parabòlic.

688. Aquests polígons adaptats exhaureixen el segment parabòlic, com

El centre de gravetat de la figura rectilínia inscrita es troba en el segment BD. [EPI 2]

Suposem que és el punt H.

Tirem el segment HE, [P 1]
el prolonguem [P 2]
i considerem el segment CL paral·lel a BD. [EI 31]

És evident que la raó que hi ha entre la figura rectilínia inscrita en el segment parabòlic i la suma dels altres segments és més gran que la raó de $\triangle ABC$ i K.[689]

Però el triangle $\triangle ABC$ és a l'àrea K com CF a FD.

Per tant, la raó que hi ha entre el polígon adaptat al segment parabòlic i la suma dels segments restants és més gran que la raó que hi ha entre CF i FD,
que és la de LE i EM. [EVI 2]

Suposem que la raó que hi ha entre ME i EH és la del polígon adaptat i la suma dels segments restants.

Aleshores, atès que E i H són els centres de gravetat del segment parabòlic i del polígon adaptat, respectivament,
és clar que el centre de gravetat de la figura que es compon dels segments restants es troba en la prolongació de HE,
de manera que la raó que hi ha entre la prolongació i H és la del polígon adaptat i els residus restants. [EPI 8]

D'això en resulta que el centre de gravetat dels residus és el punt M.

I això és impossible, ja que aquests residus es troben tots a la mateixa banda de la paral·lela BD per M. [EPI, postulat 7][690]

És evident, doncs, que el centre de gravetat està situat en el diàmetre BD. ♠

B.3b_5 [EPII 5] *Si inscrivim un polígon adaptat en un segment parabòlic, el centre de gravetat d'aquest segment es troba més a prop del vèrtex que el centre de gravetat del polígon.*

---

hem vist a QP 20, porisma.

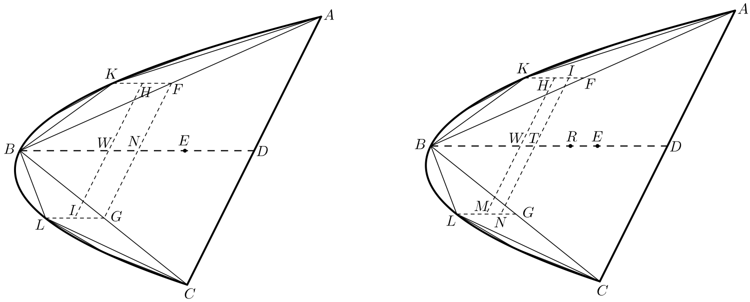
689. Si $\mathfrak{P}, \mathfrak{T}, \mathfrak{S}$ i $\mathfrak{K}$ designen les àrees del polígon, del triangle adaptat al segment parabòlic, de la suma dels segments restants i de la figura K, llavors $\mathfrak{P} > \mathfrak{T}$ i $\mathfrak{S} < \mathfrak{K}$. Apliquem DV 7.

690. Aquest argument l'ha usat abans a EPI 13.

Sigui $\smile ABC$ un segment parabòlic de diàmetre BD.

[*Demostració*.] *a*)[691] Hi inscrivim el triangle adaptat $\triangle ABC$ (figura EPII 5*a*).

Dividim BD pel punt E de manera que BE és el doble de ED. [EVI 9]



a) *b*)

FIGURA EPII 5

El punt E és el centre de gravetat del triangle $\triangle ABC$. [EPI 14]

Dimidiem els segments AB i BC pels punts F i G, [EI 10]
i, per aquests, tirem els segments FK i LG paral·lels a BD.

Aleshores, el centre de gravetat del segment parabòlic $\smile AKB$ es troba en el segment FK
i el del segment parabòlic $\smile BCL$ en el LG. [EPII 4].

Suposem que els centres de gravetat [d'aquests segments parabòlics] són els punts H i I.

Tirem HI. [P 1]

Atès que la figura ▱ $HFGI$ és un paral·lelogram[692]
i que FN i NG són iguals,
els segments WH i WI també ho són. [EI 33]

---

691. Arquimedes distingeix el primer cas, en què el polígon adaptat és el triangle, i el cas general. És a dir, procedeix per disjunció de casos.

692. Els segments KL i FG són paral·lels a AC [EPII lema 1] i el KF ho és a LG. Per tant, KF i LG són iguals [EI 34]. Però els segments FH i GI són les mateixes parts de segments iguals. Per tant, HF i GI també són iguals [EV 15 i DV 5]. I la figura ▱ $HFGI$ és un paral·lelogram.

També ho podem aconseguir aplicant QP 19 als punts L i K.

Per tant, el centre de gravetat de l'àrea formada pels dos segments parabòlics $\smile AKB$ i $\smile BLC$ és el punt mitjà de HI,[693]
és a dir, el punt W, ja que tots dos són equivalents.[694]

I, com que el centre de gravetat del triangle $\triangle ABC$ és el punt E i el centre de l'àrea composta pels dos segments parabòlics $\smile AKB$ i $\smile BLC$ el punt W,
és evident que el centre de gravetat del segment total $\smile ABC$ es troba en el segment WE,
o sigui, entre els punts W i E. [EPI 8].

Per tant, el centre de gravetat del segment parabòlic sencer és més a prop del vèrtex que el centre de gravetat del triangle inscrit adaptat. ♠

b) Hi inscrivim el pentàgon adaptat ⬠ $AKBLC$ (figura EPII 5*b*).

Siguin BD el diàmetre del segment parabòlic,
i KF i LG el diàmetre de cada un dels segments [determinats pels costats del triangle].

Considerem els punts H i I, centres de gravetat del segment parabòlic $\smile AKB$ i del triangle $\smile AKB$, respectivament,
i els punts M i N, centres de gravetat del segment parabòlic $\smile BLC$ i del triangle $\triangle BLC$, respectivament.

Siguin W el centre de gravetat de l'àrea conjunta formada pels segments parabòlics $\smile AKB$ i $\smile BLC$,
i T el de l'àrea conjunta formada pels triangles $\triangle AKB$ i $\triangle BLC$.

Aleshores, el centre de gravetat del segment parabòlic $\smile ABC$ es troba en el segment WE,

---

693. Aquí entra en joc EPII 7, que s'estableix quan són semblants els segments parabòlics. FRAJESE (1974), p. 428.

694. Els dos segments parabòlics $\smile AKB$ i $\smile BLC$ són iguals. En efecte, KF i LH són iguals, i els perpendiculars pel punt B a les prolongacions FK i GL també, ja que els segments KF i LG estan igualment allunyats del diàmetre BD. Per tant, els triangles $\triangle BKF$ i $\triangle BLG$ són equivalents. Per les mateixes raons, els $\triangle KFA$ i $\triangle LGC$ també ho són. Per tant, els triangles $\triangle BKA$ i $\triangle BLC$, també. Però els segments parabòlics $\smile BKA$ i $\smile BLC$ equivalen a quatre terceres parts dels triangles $\triangle BKA$ i $\triangle BLC$ (QP 24). Per tant, els dos segments parabòlics són equivalents. Vegeu, alternativament, el problema 11 (pàgina 156).

atès que E és el del triangle $\triangle\, ABC$ i W el de la figura conjunta formada pels dos segments parabòlics ⌓ AKB i ⌓ BLC.

A més, aquest centre de gravetat divideix [el segment] EW de manera que la raó que hi ha entre el triangle $\triangle\, ABC$ i els dos segments parabòlics junts ⌓ AKB i ⌓ BLC és la mateixa que la que hi ha entre el segment que té com a extrem el punt W i la part més petita [és a dir, l'altra part]. [EPI 8]

Però, el centre de gravetat del pentàgon ⬠ $AKBLC$ es troba en el segment ET
i el divideix de manera que la raó que hi ha entre $\triangle\, ABC$ i els triangles $\triangle\, AKB$ i $\triangle\, BLC$ junts és la que hi ha entre la part que té com a extrem el punt T i l'altra part. [EPI 8]

Ara bé, atès que el triangle $\triangle\, ABC$ té amb la suma dels triangles $\triangle\, AKB$ i $\triangle\, BLC$ una raó més gran que la que té amb els segments [parabòlics ⌓ AKB i ⌓ BLC junts], [EV 8]
és evident que el centre de gravetat del segment parabòlic ⌓ ABC es troba més a prop del vèrtex B que el de la figura adaptada inscrita.

♠

c) I el mateix raonament val per a tot polígon adaptat al segment parabòlic. ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

B.3*b*₆ [EPII 6] *Donat un segment parabòlic, hi inscrivim un polígon adaptat de manera que el segment que uneix els seus centres de gravetat és més petit que qualsevol segment donat.*[695]
Considerem el segment parabòlic ⌓ ABC
i suposem que el seu centre de gravetat és el punt H.

Hi inscrivim el triangle adaptat $\triangle\, ABC$
i considerem un segment donat F de manera que la raó que hi ha entre BH i F és la de $\triangle\, ABC$ i una àrea W.

Ara, en el segment parabòlic ⌓ ABC, hi inscrivim el polígon adaptat ⬠ $AKBLC$

695. Arquimedes usa l'exhaustió per a establir aquest resultat en una de les seves demostracions més boniques.

de manera que la suma dels segments restants és més petita que l'àrea K. [QP 20, porisma]

Finalment, sigui E el centre de gravetat de la figura rectilínia inscrita.

Afirmo que el segment HE és més petit que el F.

[*Demostració.*] Si el segment HE no és més petit que el F,[696] ha de ser igual o més gran que aquest.[697]

Atès que la raó que hi ha entre el polígon adaptat ⬠ $AKBLC$ i la suma dels segments restants és més gran que la del triangle $\triangle ABC$ i l'àrea W, [Dv 7][698] i que la que hi ha entre els segments HB i F no és inferior a la d'aquest i HE,

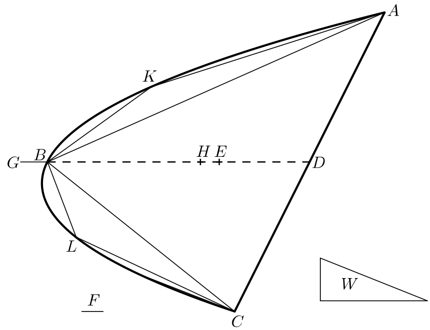


Figura EPii 6

ja que HE no és més petit que F, [Ev 8]
llavors la raó que hi ha entre el polígon adaptat ⬠ $AKBLC$ i la suma dels segments restants també és més gran —πολλῷ μείζονα λόγον ἔχει— que la de BH i EH.

D'això en resulta que, si la raó entre el polígon adaptat ⬠ $AKBLC$ i la suma dels segments restants és igual a la d'un segment i HE, aquest segment és més gran que l'altre segment de HE.

Suposem que aquest segment és BH.

La raó que hi ha entre el polígon adaptat ⬠ $AKBLC$ i la suma dels segments restants és la mateixa que la de G i HE.

Aleshores, el punt G és el centre de gravetat de l'àrea formada per tots els segments parabòlics restants.

696. Hipòtesi d'inducció.

697. Disjunció de casos.

698. És evident ja que el polígon adaptat ⬠ $AKBLC$ és més gran que el triangle i, en canvi, la suma dels segments restants és més petita que l'àrea W.

I això és impossible ja que són en una banda del segment paral·lel a la base AC per G. [EPI, postulat 7]

Tot plegat posa de manifest que HE és més petit que F.

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.3$\boldsymbol{b_7}$ [EPII 7] *Els centres de gravetat de dos segments parabòlics semblants tallen els seus diàmetres en parts proporcionals.*[699]

Siguin $\smile ABC$ i $\smile EFG$ dos segments parabòlics semblants de diàmetres BD i FH,

i K i L els centres de gravetat respectius dels segments $\smile ABC$ i $\smile EFG$.

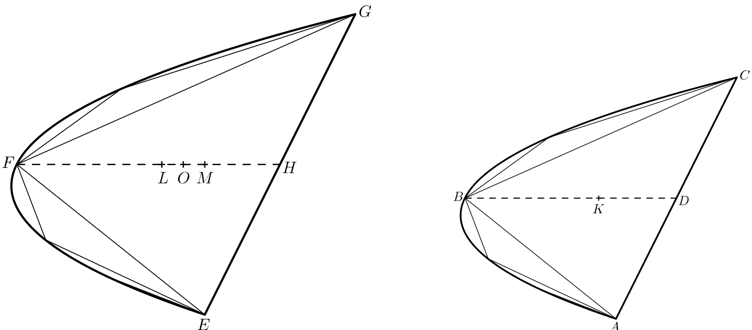


FIGURA EPII 7

Volem demostrar que els punts K i L divideixen els diàmetres en parts proporcionals.

[*Demostració*.] Suposem que no és així[700]

i que KB es a KD com FM i MH per un cert punt M de BF diferent de L.

En el segment $\smile EFG$ hi adaptem un polígon de manera que la distància del centre de gravetat del segment parabòlic al del polígon adaptat és més petita que el segment LM. [EPII 6]

Suposem que el centre de gravetat del polígon adaptat és el punt O.[701]

699. Aquesta proposició ha estat utilitzada de manera impròpia a EPII 5. Per a demostrar EPII 7, usa EPII 5. Però, així, incorre en una petició de principi. Tanmateix, vegeu HEATH (1894), p. 211, nota.

700. Hipòtesi de l'absurd.

701. El punt O està situat entre els punts L i M perquè hem suposat que LO és més curt que OM.

Suposem que el centre de gravetat del polígon adaptat és el punt O.[702]

Ara, en el segment ◡ ABC adaptem un polígon semblant al del segment parabòlic ◡ EFG.

El seu centre de gravetat és més proper al vèrtex que el segment parabòlic.

I això és impossible. [EPII 5][703]

Per tant, d'aquesta manera queda establert que la raó que hi ha entre BK i KD és la mateixa que la de FL i LH. ♠

B.3b_8 [EPII 8] *El centre de gravetat d'un segment parabòlic divideix el diàmetre de manera que la part més propera al vèrtex és igual a tres vegades la meitat de la part més propera a la base.*[704]

Siguin ◡ ABC el segment parabòlic, i BD i H el seu diàmetre i el seu centre de gravetat, respectivament.

Volem demostrar que [la longitud de] BH és una vegada i mitja [la de] HD.

[*Demostració.*] En el segment parabòlic ◡ ABC inscrivim el triangle adaptat $\triangle ABC$,

el centre de gravetat del qual és el punt E. [EPI 14]

Dimidiem els costats AB i BC pels punts F i G [EI 10]

i considerem els segments KF i GL paral·lels al diàmetre BD. [EI 31]

Els segments KF i GL són els diàmetres dels segments parabòlics ◡ AKB i ◡ BLC. [per definició]

Siguin, ara, M i N els centres de gravetat respectius dels segments parabòlics ◡ AKB i ◡ BLC. [EPII 4]

Considerem els segments GG, MN i KL. [P 1]

El centre de gravetat de l'àrea composta pels segments parabòlics ◡ AKB i ◡ BLC és el punt W.

I, considerant que BH és a HD com KM a MF, [EPII 7]

---

702. El punt O està situat entre els punts L i M perquè hem suposat que LO és més curt que OM.

703. Aquí usa explícitament EPII 5 i, d'alguna manera, incorre en un cercle viciós. Heath (1894), p. 211; Frajese (1974), p. 433-434.

704. Vegeu el problema 12 (pàgina 156).

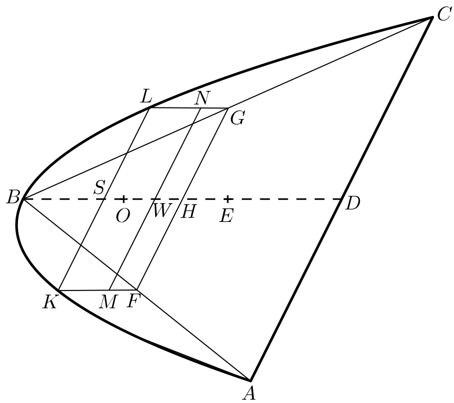
componendo i *alternando*, BD és a KF com DH a MF.

[Ev 18 i 16][705]

Però, com veurem cap al final de la demostració —*τοῦτο γὰρ ἐπό τέλει δείκνυται, οὖα σαμει˜ον*—,[706]
BD és quatre vegades KF —*τετραπλασία δὲ ἁ ΒΔ τᾶς ΚΖ*.

Per tant, DH és quatre vegades MF i, de retruc, el residu BH quatre vegades el residu KM, que és igual a SW.

Així doncs, la suma dels residus BS i WH és igual a tres vegades SW.



Fem BS igual a tres vegades SO[707]
i BD quatre vegades BS.

Per tant, OB és la tercera part de BD.

I, d'altra banda, ED ho és de DB
perquè E és el centre de gravetat del triangle $\triangle\, ABC$. [EPi 14]

Figura EPii 8

En conseqüència, la diferència OE és la tercera part de BD. [Nc 3]

A més, veient que els punts H, W i E són els tres centres de gravetat: 1) el del segment parabòlic, 2) el de l'àrea composta pels segments parabòlics ◡ AKB i ◡ BLC, i 3) el del triangle $\triangle\, ABC$, la raó que hi ha entre el triangle $\triangle\, ABC$ i els segments residuals ◡ AKB i ◡ BLC és la de WH i HE.

Però la [àrea] de $\triangle\, ABC$ és tres vegades la dels segments.

Per tant, WH és tres vegades HE.[708]

A més, hem vist que WH és tres vegades WO.[709]

705. Ítem *c* del problema 12 (pàgina 156).

706. Però Arquimedes no la demostra. Ho fa Eutoci. Vegeu l'ítem *d* del problema 12 (pàgina 156).

707. Ítem *b* del problema 12 (pàgina 156).

708. Ítems *e* i *f* del problema 12 (pàgina 157).

709. Ítem *e* del problema 12 (pàgina 157).

Per tant, OE és la cinquena part de EH,
ja que DE i OE són iguals.[710]

En definitiva, DH és la sisena part de HE.

Però BD és el triple de DE, ja que BH és una vegada i mitja [el segment] HD, com ja hem vist. ♠[711]

p. 71 La proposició EPII 9 —aritmètica— és un «element» d'EPII 10, i la presentació sintètica de la monografia fa difícil copsar-ne la raó fins que llegim EPII 10. Aleshores, però, ens sorprèn com va aconseguir Arquimedes intuir aquest resultat.[712] La demostració lingüística d'Arquimedes és enrevessada i, per això, l'exposem en llenguatge més actual en el problema 13 (pàgina 157). La darrera, EPII 10, la reproduïm d'una manera més actual en el corpus històric (pàgina 71 i en el problema 14, pàgina 158). Tanmateix, per coherència amb l'esperit de l'obra, les recollim aquí per mostrar ben clarament l'estil de l'autor de Siracusa i copsar la complexitat que suposa el fet de no disposar d'un llenguatge adient.

B.3*b*$_9$ [EPII 9] [*Considerem quatre segments proporcionals.*] *D'una banda, tenim un segment la raó del qual amb tres cinquenes parts de l'excés del costat gran sobre el tercer és la mateixa que la que hi ha entre el petit i l'excés del gran sobre el petit. I, d'una altra banda, tenim un segment la raó del qual amb l'excés del gran sobre el tercer és igual a la que hi ha entre el segment format per dues vegades el gran, quatre el segon, sis el tercer i tres el quart* [*dels donats*], *i el segment format per cinc vegades el primer, deu el segon, deu el tercer i cinc el quart. Afirmo que aquests dos segments junts fan dues cinquenes parts del gran.*

Considerem quatre segments proporcionals AB, BC, BD i BE,[713]

---

710. Ítem g del problema 12 (pàgina 157).

711. Tot rau a trobar la relació que lliga BH i HD, que és $BH = \frac{2}{3}HD$.
Això és conseqüència del fet que $ED = 5\,HE$, o sigui, $HE = \frac{1}{6}\,HD$. En efecte, $BH = BD - ED = 3\,ED - ED - HE = 2\,ED - HE = 10\,HE - HE = 9\,HE = \frac{9}{6}\,HE = \frac{2}{3}\,HE$. Vegeu el problema 12 (pàgina 156).

712. És un resultat que no es troba a Me.

713. O sigui, $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BE}$.

els segments [FH i HG] de manera que el primer és tres cinquenes parts de AD com BE a EA. [Evi 12]

i el segon és a AD com dues vegades AB, quatre BC, sis BD i tres BE junts a cinc vegades AB, deu BC, deu BD i cinc BE junts.[714]

Afirmo que FG és igual a dues cinquenes parts de AB.[715]

[*Demostració.*][716] Com que els segments AB, BC, BD i BE són proporcionals,

[*alternando* i *dividendo*,] els AC, CD i DE tenen la mateixa raó. [Ev 16 i 17][717]

D'altra banda, AB i BC junts són a BD —o el seu doble al seu doble— com AD a DE.[718]

I encara, la raó DB i BC junts i EB és la mateixa,[719] i també la de tots els antecedents i tots els consegüents. [Ev 12][720]

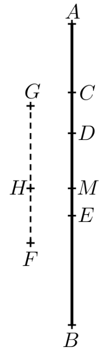


Figura EPii 9

En conseqüència, AD és a DE com el segment format pel doble del AB, pel triple de CB i per DB al format pel doble de BD i BE.[721]

D'això en resulta el segment format pel doble de AB, el quàdruple de BC, el quàdruple de BD i el doble de BE és al format pel doble de DB i per BE com el de DA a un segment DO més petit que DE.[722]

---

714. Problema 13 (pàgina 157).

715. Com dèiem, vegeu el problema 13 (pàgina 157) i seguiu els passos de la demostració observant els ítems d'aquest problema.

716. Seguiu els passos de la demostració observant els ítems del problema 13 (pàgines 157-158).

717. $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ implica $\frac{AB-BC}{BC} = \frac{BC-BD}{BD}$ [Ev 17]. O sigui, $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD}$ i, de retruc, $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD}$ [Ev 16]. Anàlogament, $\frac{CD}{BD} = \frac{DE}{BE}$. I, per Ev 11 o Nc 1, $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DE} = \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BE}$.

718. $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$ implica $\frac{AB+BC}{BC} = \frac{AC+CD}{CD} = \frac{AD}{CD}$ [Ev 18 i Ev 7 o Nc 1]. Ara, *ex æquali* [Ev 22], $\frac{AB+BC}{BC} \times \frac{BC}{BD} = \frac{AD}{CD} \times \frac{CD}{DE}$. O sigui, $\frac{AB+BC}{BD} = \frac{AD}{DE}$ i, per tant, $\frac{2(AB+BC)}{2BD} = \frac{AD}{DE}$ [Ev 15].

719. $\frac{DB+BC}{BE} = \frac{AD}{DE}$.

720. Diu: *πάντα ποτὶ πάντα*.

721. Cal recórrer a les igualtats de raons de les notes anteriors. $\frac{AD}{DE} = \frac{2(AB+BC)}{2BD} = \frac{BD+BC}{BE} = \frac{2(AB+BC)+BD+BC}{2BD+BE} = \frac{2AB+3BC+BD}{2BD+BE}$ [Ev 11 o Nc 1 i Ev 12].

722. Si al numerador del segon membre li afegim el segment $BC + 3BD$

En definitiva, el segment OA és al AD com el format pels segments doble de AB, quàdruple de CB, sèxtuple de BD i triple de BE al format pel doble de AB i BE junts i el quàdruple de CB i BD junts.

[Ev 18, Ev 7, porisma, i Ev 1 o Nc 1][723]

Ara bé, AD és a HG com el segment format per cinc vegades AB i BE junts i deu vegades CB i BD junts al segment format pel doble de AB, quatre vegades CB, tres EB i sis BD. [per hipòtesi]

I, *ex æquali*, resulta que OA és HG com el segment format per cinc vegades AB i BE junts, deu vegades CB i BD junts al format per dues vegades AB i BE junts i quatre vegades CB i BD junts.

[Ev 23]

Però, el segment format per cinc vegades AB i BE junts, deu vegades CB i BD junts és al format per dues vegades AB i BE junts i quatre vegades CB i BD junts com cinc a dos. [Dv 5]

En definitiva, el segment AO és al HG com cinc a dos. [Ev 11][724]

D'altra banda, com que el segment OD és al DA com el segment format per EB i el doble de BD al format pel doble de AB i BE junts i quatre vegades CB i BD junts,

i que el segment format pel doble de AB, el triple de CB i BD és al format per EB i el doble de BD com el segment AD a DE,

aplicant *ex æquali*, resulta que el segment format pel doble de AB, el triple de BC i DB és al format pel doble de AB i BE junts i el quàdruple de CB i BD com el segment OD al DE. [Ev 23]

En conseqüència, [*invertendo* i *dividendo*,] el segment format per CB, el triple de BD i el doble de EB és al format pel doble de AB i BE junts, el quàdruple de CB i BD junts com el segment OE és al ED. [Ev 7, porisma, i Ev 17]

I [*dividendo*, aplicat als quatre segments proporcionals de l'inici,] el segment AC és a CB com DE a EB [Ev 17 i Ev 11 o Nc 1]

$+\,2BE$ i determinem la quarta proporcional de $2AB+4BC+4BD+2BE$, $2DB+BE$ i AD [Evi 12], obtindrem un segment $DO < DE$ [Dv 7].

723. Teníem que $\frac{AD}{DO} = \frac{2AB+4BC+4BD+2BE}{2DB+EB}$. Aplicant, ara, Ev 18, Ev 7, porisma, i Ev 1 o Nc 1, obtenim la cadena d'igualtats $\frac{AO}{AD} = \frac{AD+DO}{AD} = \frac{(2AB+4BC+4BD+2BE)+(2DB+EB)}{(2AB+4BC)+(4BD+2BE)} = \frac{2AB+4BC+6BD+3BE}{2(AB+BE)+4(BC+BD)}$. En endavant, deixem que el lector faci, si li cal, el que hem fet en les notes precedents.

724. $\frac{OA}{HG} = \frac{5}{2}$.

com el triple de CD al triple de DB i com el doble de DE al doble de EB, [Ev 15]
i com el segment format per AC, el triple de CD i el doble de DE al format per CB, el triple de DB i el doble de EB. [Ev 12]

Aleshores, *ex æquali*, el segment EO és al EB com el format per AC, el triple de CD i el doble de DE al format pel doble de AB i BE junts i el quàdruple de CB i BD junts. [Ev 23]

En conseqüència, [*componendo*,] el segment OB és al BE com el format pel triple de AB, el sèxtuple de CB i el triple de BD al format pel doble de AB i BE junts i el quàdruple de CB i BD junts. [Ev 18]

I, com que els segments ED, DC i CA són proporcionals,
també ho són els segments formats per EB i BD, per DB i CB i per CB i BA. [Ev 17, 18, 22 i 11 o Nc 1][725]

En conseqüència, el segment format per EB i BD és al format per DB i BC i CB i BA com el segment ED al DA.

Per tant, el segment format per EB i BD és al format per DB i BC i per CB i BA com el segment ED al DA. [Ev 12 i 16]

I ara, *componendo*, tenim que el segment format per EB i ED, per AB i BC i per CB i BD, [Ev 18]
és a dir, el format per EB i BA i pel doble de DB i BC junts és al format per BD i BA i pel doble de BC com AE a ED
i, de retruc, el doble al doble. [Ev 15]

O sigui que el segment format pel doble de EB i BA, i pel quàdruple de CB i BD junts és al format pel doble de AB i pel quàdruple de CB com EA a AD.

D'això se segueix que el segment format pel doble de AB i BE i pel quàdruple de CB i BD junts és a les tres cinquenes parts del format pel doble de CB i BD junts i pel quàdruple de CB com el segment EA a les tres cinquenes parts de AD.

[per hipòtesi, Ev 16 i Ev 11 o Nc 1][726]

725. $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BE}$ implica $\frac{AB-BC}{AB+BC} = \frac{BC-BD}{BC+BD} = \frac{BD-BE}{BD+BE} = \frac{AC}{AB+BC} = \frac{DC}{BC+BD} = \frac{ED}{BD+BE}$ [Ev 17, 18, 22 i 11 o Nc 1].

726. Per hipòtesi, $\frac{FH}{\frac{3}{5}AD} = \frac{BE}{EA}$ i, *alternando*, $\frac{EB}{FH} = \frac{AE}{\frac{3}{5}AD}$. I ara només cal

Ara bé, hem establert que el segment format pel triple de AB i BD junts i el sèxtuple de CB és al format pel doble de AB i BE junts i el quàdruple de CB i BD com OB a EB.

Per tant, *ex æquali*, el segment format pel triple de AB i BD junts i pel sèxtuple de CB és a les tres cinquenes parts del format pel doble de AB i BD junts i el quàdruple de CB com OB a FH. [Ev 22]

Però, el segment format pel triple de AB i BD i pel sèxtuple de CB és al format pel doble de AB i BD junts i quàdruple de CB com tres a dos, [Ev 22]
mentre que el primer segment és a tres cinquenes parts del segon com cinc a dos.[727]

Però havíem establert que el segment AO és al HF com cinc a dos.

En conseqüència, el segment sencer AB és al FG com cinc a dos. [Ev 12][728]

En definitiva, doncs, el segment FG és igual a dues cinquenes parts del AB.

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.3*b*₁₀ [EPII 10] *El centre de gravetat d'un trapezi parabòlic*[*, és a dir, d'un segment parabòlic*] *es troba en un punt del diàmetre del trapezi que es determina així: si dividim el diàmetre en cinc parts iguals,* [*el centre de gravetat*] *es troba en la part mitjana, de manera que la raó que hi ha entre el segment parcial d'aquesta part que es troba més a prop de la base petita i l'altra és igual a la que hi ha entre un sòlid de base el quadrat de costat la base més gran* [*del trapezi*] *i altura el segment format pel doble de la base petita més la gran i un* [*sòlid*] *de base el quadrat de costat la base petita* [*del trapezi*] *i altura el segment que és el doble de la base petita més la gran.*[729]

---

tenir en compte el resultat anterior, per a aconseguir $\frac{EA}{\frac{3}{5}AD} = \frac{EB}{FH} = \frac{2(AB+BE)+4(CD+BD)}{\frac{3}{5}\left(2(AB+BD)+4bC\right)}$.

727. És a dir, $\frac{3(AB+BD)+6CB}{\frac{3}{5}\left(2(AB+BD)+4CD\right)} = \frac{15(AB+BD+2CB)}{6(AB+BD+2CB)} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$.

728. Tenim, d'una banda, que $\frac{OB}{FH} = \frac{5}{2}$ i, d'una altra, [nota 724, pàgina 264] que $\frac{AO}{HG} = \frac{5}{2}$. Per Ev 12, $\frac{AO+OB}{FH+HG} = \frac{5}{2}$. I, per Ev 11 o Nc 1, $\frac{AB}{FG} = \frac{5}{2}$ i, de retruc, $FG = \frac{2}{5}\,AB$.

729. Els sòlids són paral·lelepípedes rectangulars.

Considerem dues cordes paral·leles AC i DE[730] d'un segment de paràbola ◡ABC de diàmetre BF.

És clar que el diàmetre del trapezi parabòlic ⏢$ADEC$ és el segment FH [QP 1]
paral·lel al [segment] tangent al segment de paràbola pel punt B.

El dividim en cinc parts iguals. [EVI 9]

Sigui IK la part mitjana.

Suposem que la raó de IG i GK és igual a la que hi ha entre el sòlid de base un quadrat de costat igual a AF i altura el segment format pel doble de DH i AF
i el [sòlid] de base el quadrat de costat igual a DH i altura el format pel doble de AF i DH.

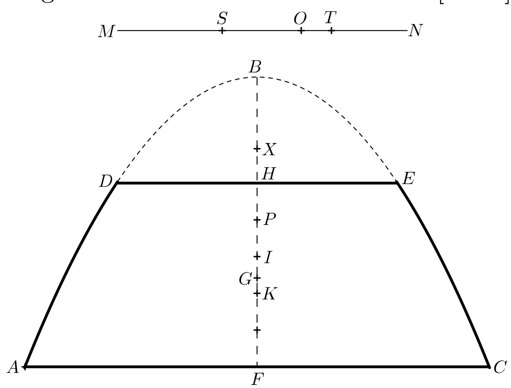


FIGURA EPII 10

Afirmo que el punt G és el centre de gravetat del trapezi ⏢$ADEC$, i això és el que hem de demostrar.[731]

[*Demostració.*] Siguin MN i NO segments iguals a FB i HB. [EII 2]

Prenem la mitjana proporcional NS dels segments MN i NO [EVI 13]
i la quarta proporcional TN [dels segments MN, NO i NS]. [EVI 12]

Considerem el punt P que fa que FI sigui a GP com TM a TN [EVI 10]
sense que importi l'indret on cau el punt P, que pot ser entre F i H o entre H i B.

Atès que FB és el diàmetre del segment parabòlic,
BF o bé n'és l'eix[732] o bé un [segment] paral·lel al diàmetre.

730. De fet, són ordenades.

731. Queda ben palès que Arquimedes té un mètode heurístic per a determinar un resultat tan poc intuïtiu.

732. Arquimedes diu: «ἁ ΒΦ ἤτοι ἀρχιτά ἐστι τᾶς τομᾶς», en el sentit de

I AF i DH són segments ordenats, [Ci, definició 4]
ja que són subsegments paral·lels a la tangent pel punt B.

Sent això així, el quadrat de costat AF és al de costat DH com el segment FB al BH, [QP 3 o Ci 20]
és a dir, com MN a NO. [Ev 7 iterat]

Però MN és a NO com el quadrat de MN al quadrat de NS. [Dv 9]

De tot això se'n segueix que el quadrat de costat AF és al de costat DH com el de costat MN al de costat NS. [Nc 1 o Ev 11]

I, per tant, els costats corresponents són proporcionals.

Per tant, el cub de costat AF és al de costat DH com el segment de paràbola ABC al de paràbola DBE, [QP 24]
i el cub de costat MN al de costat NS com el segment MN al NT.

I, per tant, *dividendo*, el trapezi parabòlic $ADEC$ és al segment parabòlic DBE com el segment MT al NT, [Ev 17]
és a dir, com tres cinquenes parts de HF a GP.

D'altra banda, el sòlid de base el quadrat de costat AF i altura la suma de dues vegades DH i AF és al cub de costat AF com dues vegades DH més AF a AF.

Per tant, també, com la suma de dues vegades NS i NM a NM, [Ev 4 i 18]
cosa que implica que el cub de costat AF és al de costat DH com el segment MN al NT.

I el cub de costat DH és al sòlid de base el quadrat de costat DH i altura la suma de dues vegades AF i DH com el segment DH a la suma de dues vegades AF i DH,
i, per tant, com TN a la suma de dues vegades ON i TN. [Ev 4 i 18]

Tenim, doncs, quatre magnituds que són:

[*a*)] El sòlid de base el quadrat de costat AF i altura la suma de dues vegades DH i AF.

[*b*)] El cub de costat AF.

[*c*)] El cub de costat DH.

[*d*)] El sòlid de base el quadrat de costat DH i altura la suma de dues vegades AF i DH.

'diàmetre principal'.

Aquestes quatre magnituds són proporcionals a unes altres quatre preses de dues en dues:
[a')] El segment suma de dues vegades NS i NM.
[b')] El segment MN.
[c')] El segment NT.
[d')] El segment suma de dues vegades NO i NT.

Aleshores, *ex æquali*, la figura sòlida de base el quadrat de costat AF i altura el segment suma de dues vegades DH i AF
és a la de base el quadrat de costat DH i altura la suma del doble de AF i DH com el segment suma de dues vegades NS i MN al de la suma de dues vegades NO i NT. [Ev 22]

Ara bé, la raó dels dos sòlids indicats és igual a la de IG i GK. [per hipòtesi]

De tot això en resulta que la raó dels dos segments suma[733] és igual a la raó de IG i GK. [Nc 1 o Ev 11]

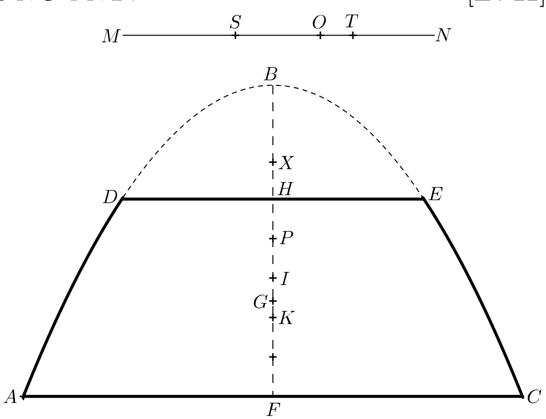


FIGURA EPII 10 (repetició de la de la pàgina 267)

Ara, *componendo* i multiplicant per cinc els antecedents, tenim que FH és a GK com el segment suma de cinc vegades MN i NT i deu vegades NS i NO al segment suma de dues vegades NO i NT. [Ev 18]

I el segment FH també és al FK com cinc vegades la suma de MN i NT més deu vegades la suma de SN i NO al segment dues vegades
la suma de MN i NT més quatre vegades la suma de SN i NO
ja que FK és igual a dues cinquenes parts de FH.

733. És a dir, $2NS + MN$ i $2NO + NT$.

Per tant, el segment FH és al FG com el segment cinc vegades la suma de MN i NT més deu vegades la suma de SN i NO al segment que obtenim ajuntant el doble del segment NM, quatre vegades NS, sis vegades ON i tres vegades NT.

Però els quatre segments MN, NS, ON i NT formen una proporció contínua,

el segment NT és a TM com el PG a tres cinquenes parts de FH, és a dir, de MO.

I, per fi, el segment format per dues vegades NM, quatre vegades NS, sis vegades NO i tres vegades NT és al format per cinc vegades la suma de MN i NT i deu vegades la suma de SN i NO com GF a FH, és a dir, a MO.

Per tant, el segment PF és igual a dues cinquenes parts de MN, [EPII 9]

o sigui, de FB.

En definitiva, el punt P és el centre de gravetat del segment parabòlic ◸ ABC. [EPII 8]

Sigui X el centre de gravetat del segment parabòlic ◡ DBE.[734]

El centre de gravetat del trapezi ⏢ $ADEC$ es troba, doncs, en la prolongació del segment XP,

en l'extrem d'un segment la raó del qual amb XP és igual a la del trapezi i la resta de la paràbola. [EPI 8] ♠

Aquest punt és I, ja que respon a aquestes condicions.

En efecte, el segment BP és igual a tres cinquenes parts de FB,

el BX a tres cinquenes de HB,

i el XP, que és la diferència de BP i BX, a tres cinquenes parts de HF, la diferència entre FB i HB.

Aleshores, hem vist que la raó del trapezi ⏢ $ADEC$ i el segment ◡ DBE com MT a TN,

és la mateixa raó que hi ha entre tres cinquenes parts de HF, que és XP, i PI.

Per tant, la raó de ⏢ $ADEC$ i el segment parabòlic ◡ DBE és la dels segments XP i PI.

734. Novament, admet que el centre de gravetat existeix.

Però el centre de gravetat del segment parabòlic sencer és el punt P i el del segment parabòlic DBE, el X.

És evident, doncs, que el punt I és el centre de gravetat del trapezi parabòlic $\bigtriangleup ADEC$. [EPI 6 i 7] ♠ ♠[735]

B.4 EC: *Sobre l'esfera i el cilindre*, fragments

En aquest apartat apleguem els escrits més rellevants d'aquesta monografia i els que complementen les descripcions fetes en el corpus històric.[736] Hi distingim quatre grups de textos del primer llibre —introducció, definicions, postulats i proposicions— i dos del segon —introducció i proposicions. p. 73

B.4.1 ECI: *Sobre l'esfera i el cilindre*, llibre I, fragments

Vegem, ara, alguns fragments del llibre primer.

B.4.1*a* La introducció d'ECI

[Introducció] Arquimedes a Dositeu: Salut! p. 74

En una altra ocasió us vaig fer arribar, amb les demostracions pertinents, els teoremes que havia descobert mitjançant la reflexió, entre els quals es trobava el següent:[737]
a) Tot segment parabòlic equival a quatre terceres parts del triangle de la mateixa base i la mateixa altura.[738]

735. Vegeu el problema 14 (pàgina 158).

736. La traducció completa i acurada en català, a Masià (2010).

737. Fixem-nos de quina manera introdueix el que avui anomenem π en les àrees i els volums. Ho fa a través de l'àrea d'un cercle adequat a cada cas.

738. En clara referència a la monografia QP. En concret, QP 24. Vegeu també Me 1.

Ara he aconseguit provar alguns teoremes que no havien estat mai demostrats,[739] com ara els següents:

b) L'àrea de l'esfera equival a quatre vegades l'àrea del cercle màxim [seu].[740]

c) L'àrea del segment esfèric equival a la d'un cercle de radi el segment que va del vèrtex a un punt de la circumferència de la [seva] base.[741]

d) El [volum del] cilindre de base el cercle màxim d'una esfera i altura el diàmetre de l'esfera equival a tres vegades la meitat —*ἡμιόλιός*— del [volum] de l'esfera.

e) L'àrea d'aquest cilindre també és tres vegades la meitat de l'àrea de l'esfera.[742]

I, malgrat que aquestes propietats són inherents a les figures, no eren conegudes pels estudiosos de la geometria que m'han precedit perquè no se'ls va ocórrer la commensurabilitat que hi ha entre aquestes figures.[743]

Però això fa que siguin equiparables amb les que han estat estudiades per altres geòmetres.[744]

I també ho són amb els resultats més notables aconseguits per Èudox en relació amb els sòlids:[745]

739. La qüestió és si aquests teoremes havien estat plantejats per algun geòmetra o bé si són absolutament originals del geni sicilià. Arquimedes respon explicant que ningú no se'ls havia plantejat abans. Concretament, diu: «ὑποπίπτω» —'em van caure al damunt.'

740. ECi 33.

741. ECi 42 i ECi 43. Ningú no s'havia preocupat de determinar àrees de sòlids de revolució.

742. ECi 34. Vegeu també Me 2.

743. Una de les constants de l'obra geomètrica d'Arquimedes és precisament establir la «commensurabilitat» entre figures que, considerades per si mateixes, poden ser incommensurables i, fins i tot, no quadrables o no cubicables.

744. Malgrat la seva originalitat, aquí Arquimedes reivindica una continuïtat en la metodologia i en la manera com desenvolupa la monografia. Simplement va més enllà. Però, amb matisos, hi va pel mateix camí.

745. Aquí tenim una referència incontestable a l'aportació d'Èudox. I, de retruc, un suggeriment del fet que aquest matemàtic havia establert el camí de l'exhaustió i la teoria de la proporció.

f) Una piràmide equival a la tercera part d'un prisma de la mateixa base i la mateixa altura.[746]

g) Un con equival a la tercera part d'un cilindre de la mateixa base i la mateixa altura.[747]

És clar que aquestes propietats també estan adscrites a les figures però, abans d'Èudox, no havien estat observades per cap geòmetra.

I tots aquells que estiguin capacitats per a fer-ho poden examinar el que exposo.

M'hauria agradat haver publicat els meus descobriments en vida de Conó perquè el considero una persona capaç de comprendre'ls i d'opinar sobre ells,[748]
però, com que em sembla que convé fer-ne partícips els qui cultiven la matemàtica —*μάθημάτων*—,
te'ls faig a mans per tal que les persones versades en aquesta ciència puguin examinar-los.[749]

Et desitjo que segueixis bé.

B.4.1*b* Les definicions (*ἀξιώματα*) d'ECɪ

En aquesta monografia, Arquimedes dona sis definicions, algunes molt notables, com hem posat de manifest en el text. p. 75

[Definició 1] En un pla hi ha certes línies corbes limitades —*καμπύλαι γραμμάι πεπερασμέναι*—,[750] totes situades a la mateixa banda del segment rectilini que uneix els seus extrems o, en tot cas, sense cap part a l'altra banda.[751]

746. Exɪɪ 7. Pʟᴀ (2021), p. 58 i 506-507.

747. Exɪɪ 10. Pʟᴀ (2021), p. 59 i 512-516. Recordem que, de vegades, aquest resultat s'ha atribuït a Demòcrit. Pʟᴀ (2016*b*), p. 254.

748. Com ja hem dit (pàgina 93), Arquimedes tenia Conó en gran estima.

749. Veiem un tracte diferent entre Conó i Dositeu que palesa que Arquimedes o no coneixia el segon tan bé com el primer o no considerava Dositeu tan fi com el seu mestre Conó.

750. Aquí, novament, Arquimedes respecta la tradició heretada que hem exposat a Pʟᴀ (2016*b*), (2018*a*), (2019*a*) i (2019*b*).

751. Tant els segments rectilinis com les línies no rectilínies i les que es componen de parts rectilínies i no rectilínies són corbes.

[Definició 2] Una corba *cóncava d'una mateixa banda* —*ϵπι τὰ αὐτάκοίλη*—[752] és aquella en la qual, si prenem dos punts arbitraris, el segment que els uneix o bé cau tot sencer en la mateixa banda de la corba còncava o bé només hi cauen alguns punts seus, o bé alguns cauen a la mateixa banda i alguns altres sobre la corba. Tanmateix, els segments en cap cas no cauen en bandes diferents [del segment].[753]

[Definició 3] Anàlogament, hi ha superfícies limitades que tenen els extrems en un pla sense pertànyer-hi[754] i que es troben situades en una mateixa banda del pla o, en tot cas, sense cap part a l'altra banda.

[Definició 4] Una superfície *còncava d'una mateixa banda* és aquella en la qual, si prenem dos punts arbitraris, el segment que els uneix al tot és a la mateixa banda de la superfície o bé té una part en aquella banda i una altra en el pla. Tanmateix, cap d'aquests segments no cau en costats diferents [del pla].

[Definició 5] Un *sector sòlid* és el sòlid limitat per la superfície d'un con amb el vèrtex en el centre d'una esfera i per la part d'esfera que talla.[755]

[Definició 6] Un *rombe sòlid* és la figura limitada per dos cons de la mateixa base, vèrtex en una banda i una altra d'aquesta base, i eixos alineats.

B.4.1*c* Els postulats (*λαμβανόμϵνα*) d'ECi

p. 76 Dels cinc postulats que el geòmetra formula, el primer i el cinquè són d'una rellevància enorme, com hem comentat en el text.

B.4.1*c*₁ [Postulat 1] El *segment rectilini* és la línia més curta de totes les que tenen els mateixos extrems.[756]

---

752. Recordem que, a P 5, Pla (2016*a*), p. 83, Euclides usa el concepte d'«una mateixa banda», i que ho fa novament a Exi 13, Pla (2018), p. 440.

753. Si considerem corbes tancades [simples] com ara la circumferència, solament una part és còncava, tota no.

754. Són evidentment superfícies de sòlids de l'espai.

755. És una generalització del concepte «sector circular». Diii 10 a Pla (2018), p. 186.

756. Compareu aquest postulat amb la definició Di 2. Arquimedes introdueix el que, en les geometries no-euclidianes, serà la propietat geodèsica

B.4.1$\boldsymbol{c_2}$ [Postulat 2] Considerem dues línies coplanàries amb els mateixos extrems, còncaves d'una mateixa banda i desiguals. Si una està totalment inclosa en l'altra o en part i l'altra és comuna, la línia interior és més curta.

B.4.1$\boldsymbol{c_3}$ [Postulat 3] Anàlogament, de les superfícies que tenen els mateixos extrems en un pla, la plana és la més petita.

B.4.1$\boldsymbol{c_4}$ [Postulat 4] De dues superfícies diferents, amb els mateixos extrems en un pla i còncaves de la mateixa banda, si una està totalment inclosa en l'altra o en part seva ho està i l'altra és comuna, la superfície interior és la més petita.[757]

---

d'una corba, el concepte que usa Legendre per a definir el *segment rectilini*. Legendre (1849), definició iii, p. 1.

757. Amb aquests postulats, Arquimedes fa un pas. Abans ningú no els havia considerat necessaris. Però són realment dignes d'admiració i indispensables per a poder garantir la validesa dels seus descobriments. Podria no haver prescindit de l'infinit, és a dir, podria haver acceptat que un segment de corba es compon d'una infinitat de segments i que un sòlid de revolució està determinat per un poliedre format per una infinitat de superfícies planes o per una infinitat de troncs de con i dos cons. És a dir, podria haver acceptat l'atomisme. Però no ho fa, ja que aquest queda bandejat pel postulat d'Arquimedes que, en aquesta monografia, s'imposa en el postulat cinquè.

Els matemàtics grecs, per exemple Eutoci, no volien acceptar aquests postulats —que Arquimedes va intentar provar—, perquè creien que era possible demostrar-los. Però per a demostrar, per exemple, que dues tangents juntes són més petites que l'arc del cercle que clouen, Eutoci raona així: dimidiem l'arc, pel punt mitjà tirem una tangent i iterem el procés en cada una de les parts [Eiii 16 i Eiii 30, Pla (2018), p. 208 i 223; Exii 2 lema, Pla (2021), p. 57 i 489-490]. L'arc s'haurà dividit en una infinitat de parts iguals. La suma de les dues tangents és més gran que el contorn de la porció del primer polígon regular circumscrit. I aquest és més gran que el contorn de la porció del polígon segon circumscrit. I així successivament. Per això cal ECi postulat 2. Per tant, la suma de les dues primeres tangents és més gran que el contorn de la porció del darrer polígon regular circumscrit. Però aquest darrer polígon regular circumscrit és igual a l'arc, ja que la porció d'un polígon regular d'una infinitat de costats és igual a l'arc al qual circumscriu. Aquesta afirmació és un postulat o una definició postulativa. En definitiva, la suma de les dues primeres tangents és més gran que l'arc.

El problema rau a acceptar que la proposició [Ei 20] és vàlida quan els elements en joc —tangents i arcs— són infinitament petits.

B.4.1c_5 [Postulat 5, conegut com a *postulat d'Arquimedes*] Donades dues línies, dues superfícies o dos sòlids diferents, si afegim l'excés del gran sobre el petit un nombre finit de vegades convenient, aconseguim superar una quantitat donada.[758]

B.4.1*d* Algunes proposicions d'ECi

p. 77 Recollim, ara, algunes de les proposicions d'ECi. Les setze primeres fan referència a la determinació de l'àrea lateral dels cilindres, els cons i els troncs de cons. ECi 21 i ECi 22 donen les expressions trigonomètriques, en termes geomètrics, que hem analitzat en la pàgina 83. I ECi 42, 43 i 44 estableixen l'àrea del segment esfèric i el volum del sector esfèric.

p. 77 B.4.1d_1 Les proposicions que van d'ECi 1 a ECi 16

B.4.1$d_{1.1}$ [ECi 1] *El perímetre —περίμετρος— d'un polígon circumscrit a un cercle és més gran que la [longitud] de la circumferència —περιμέτρου τοῦ κύκλου.*

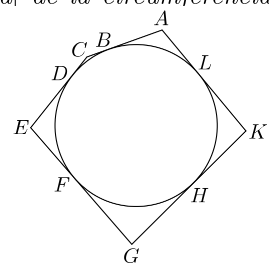


Figura ECi 1

Circumscrivim un polígon al cercle tal com indica la figura adjunta.

Afirmo que el perímetre del polígon és més gran que la longitud de la circumferència.

[*Demostració.*] És clar que la suma dels segments BA i AL és més gran que l'arc $\widehat{BL}$, ja que té els mateixos extrems que aquest i el conté. [ECi, postulat 2]

Aquest fet posa de manifest la importància dels postulats segon, tercer i quart.

Per a demostrar, per exemple, que un cercle és igual a un triangle rectangle de catets el radi i un segment equivalent a la circumferència, com veurem a MC 1, Arquimedes usa una demostració indirecta que segueix el camí eudoxià de l'exhaustió. Ara bé, acceptant l'infinit, el cercle es compon d'infinits triangles infinitament petits, d'altura el radi, que junts equivaldrien al triangle rectangle esmentat.

758. Vegeu els comentaris que hem fet a Pla (2018), p. 266-267, i (2019), p. 23 i 213-214.

Anàlogament, les sumes dels segments DC i CB, LK i KH, FG i GH, i DE i EF són més grans que els arcs $\widehat{DB}$, $\widehat{LH}$, $\widehat{FH}$ i $\widehat{DF}$, respectivament. [ECI, postulat 2]

Per tant, el perímetre del polígon supera la longitud de la circumferència. [Nc 4′ iterat] ♠

B.4.1 $\boldsymbol{d_{1.2}}$ [ECI 2] *Donades dues magnituds,*[759] *podem determinar dos segments rectilinis*[760] *diferents de manera que la raó que hi ha entre el [segment] gran i el petit és més petita que la que hi ha entre la [magnitud] gran i la petita.*[761]

Siguin AB i D dues magnituds diferents i AB la gran.[762]

Afirmo que és possible trobar dos nombres [naturals] que satisfan l'enunciat.

[*Demostració.*] Aplicant la proposició segona del llibre primer d'Euclides,[763]

podem tirar BC igual a D. [EI 2][764]

759. Aquí Arquimedes empra el terme genèric *magnitud* —*δύο μεγεθῶν*.

760. El text diu: «rectes» —*εὐθεῖα*.

761. Anaxàgores afirma: «Pel que fa al petit, no és mínim, ja que sempre el podem fer una mica més petit.» PRESOCRÀTICS (2011), p. 621, fragment 3 de *Comentaris a la 'Física' d'Aristòtil* de Simplici. Vegeu-ne l'explicació a FRAJESE (1969), p. 220-221.

Òbviament, Arquimedes fa servir el postulat 5 d'ECI i, per tant, les magnituds són línies, superfícies o sòlids. També els angles es consideren magnituds però d'un altre tipus.

Les figures representen segments rectilinis, però la proposició val també per a superfícies i sòlids. I, de fet, està pensada per a aquests dos darrers casos, ja que, en el cas dels segments rectilinis, és evident. MASIÀ (2010), nota 28, p. 71.

És una conseqüència immediata —un porisma— d'ECI postulat 5, expressat en la forma $m\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, o, remetent a Euclides, de DV 5 o EX 1.

762. Usem dues lletres per als extrems quan cal posar-los de manifest, o una sola quan no cal. PLA (2018), p. 87, nota 265, i p. 91, nota 285.

763. Arquimedes fa referència explícita als *Elements* d'Euclides. Ara bé, la proposició que esmenta val solament per a segments rectilinis, tot i que l'aplica a la magnitud D. I, de fet, solament necessita considerar una magnitud equivalent a D en la magnitud AB.

764. Recordem que MASIÀ (2010), p. 203-212, recull totes les dependències que té aquesta monografia respecte dels resultats establerts per

Considerem, ara, un segment arbitrari FG.

El [residu] AC, afegit a si mateix, supera D. [ECI, postulat 5]

Suposem que aquesta magnitud múltiple més gran que D és AH.

I que tantes vegades com [la magnitud] AH és múltiple de AC, ho és FG del segment [rectilini] GE.

Per tant, HA és a AC com FG a GE [EV 5]
i, *invertendo*, EG a GF com AC a AH.
[EV 7, porisma]

A més, atès que AH és més gran que D i, de retruc, que CB,
tenim que la raó que hi ha entre AC i AH és més petita que la de AC i CB. [DV 7]

Però AC és a EH com EG a GF.

Per tant, la raó que hi ha entre EG i GF és més petita que la que hi ha entre AC i CB. [EV 13]

I, *componendo*, la raó de EF i GF també ho és més que la de AB i BC.[765] [EV 18]

Però CB i D són iguals.[766]

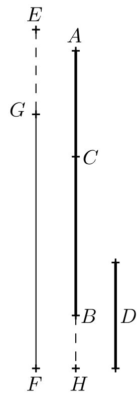


FIGURA ECI 2

Per tant, la raó que hi ha entre EF i GF és més petita que la que hi ha entre AB i D. [per substitució]

Hem determinat, doncs, dos segments rectilinis diferents que satisfan el que es demana en l'enunciat,
és a dir, que la raó que hi ha entre el segment rectilini més gran i el més petit sigui més petita que la de la magnitud gran i la petita.

♠[767]

Euclides a *Dades* i a *Elements*. En canvi, FRAJESE (1974), al final de cada proposició, explicita els «elements» de la mateixa monografia dels quals depèn i de quines és, al seu torn, element. Nosaltres les recollim en l'índex de citacions.

765. Aquest resultat l'aporta Eutoci. HEIBERG (1880-1881), vol. III, p. 17.

766. De fet, equivalents.

767. Aquesta demostració és força complicada. Sintèticament, diu que, atès que la magnitud AB és més gran que la D, existeix un $n \in \mathbb{N}$ de manera que $n\,D > AB$ i $(n-1)\,D < AB$. Per tant, $n-1 < \frac{AB}{D}$. Considerem ara un segment arbitrari r i $r' := (n-1)\,r$. Aleshores, $\frac{r'}{r} < \frac{AB}{D}$.

B.4.1$d_{1.3}$ [ECI 3] *Donades dues magnituds [diferents] i un cercle, és possible determinar un polígon [regular] inscrit en el cercle i un de circumscrit [semblant a l'inscrit] de manera que la raó que hi ha entre el costat del circumscrit i el de l'inscrit és més petita que la que hi ha entre la magnitud gran i la petita.*[768]

Siguin A i B les dues magnituds[, amb A més gran que B,] i $\bigcirc CDEG$ el cercle.

Afirmo que és possible fer el que ens proposem.

[*Demostració.*] Considerem els segments rectilinis H i KL, el més gran dels quals és H.

La raó que hi ha entre H i KL és més petita que la que hi ha entre la magnitud gran i la petita.

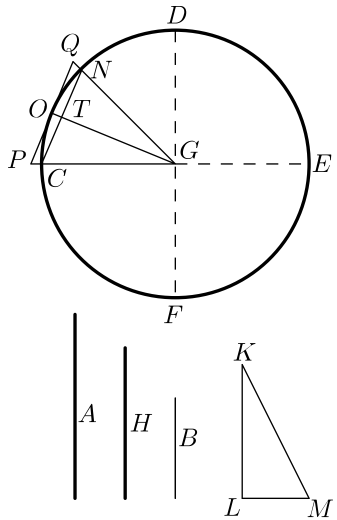


FIGURA ECI 3

Pel punt L tirem LM perpendicular a LK, [EI 11]
de manera que KM és igual a H.[769] [EI 2]

Tirem dos diàmetres del cercle, CE i DF, perpendiculars entre si.

Dimidiem l'angle $\widehat{CGD}$ [EI 9]
i, en una de les meitats, iterem el procés un nombre finit de vegades fins a aconseguir un angle inferior al doble del $\widehat{LKM}$. [Ex 1].[770]

Considerem que l'angle que obtenim és $\widehat{NGC}$.

Unim NC. [P 1]

Aquest segment és el costat d'un polígon equilàter
[ja que l'angle $\widehat{NGC}$ mesura l'angle recte $\widehat{DGC}$,[771] [EIII 26]

768. La demostració requereix certes relacions entre les raons i les desigualtats que es recullen en l'exercici 28 (pàgina 78).

769. Ítem *a* de l'exercici 28 (pàgina 78).

770. Arquimedes considera que els angles són magnituds i que els pot aplicar el que afirma ECI, postulat 5, el qual només atribueix a segments, superfícies i sòlids.

771. Arquimedes usa l'expressió «angle ortogonal» —*ὀρθήν*.

que és la quarta part de la circumferència.

En definitiva, aquest segment amida la circumferència i, en conseqüència, és el costat d'un polígon regular.]

Sigui GO el radi que dimidia l'angle $\widehat{CGN}$. [EIII 3 i 26]

Pel punt O tirem la tangent al cercle. [EIII 17]

Tracem els segments GNQ i GCP. [P 1 i 2]

El costat PQ és el del polígon [regular] circumscrit al cercle, i és el costat d'un polígon semblant a l'inscrit de costat CN. [EIII 26 i EVI 2]

Com que l'angle $\widehat{NGC}$ és més petit que el doble de l'angle $\widehat{LKM}$ i el doble del $\widehat{TGC}$,
l'angle $\widehat{TGC}$ és més petit que el $\widehat{LKM}$. [Nc 4′]

Ara bé, els angles amb els vèrtexs en els punts L i T són rectes. [per construcció i EIII 3]

Per tant, la raó que hi ha entre MK i LK és més gran que la que hi ha entre CG i GT. [Eutoci, 22][772]

Però GC i GO són iguals. [DI 15]

Conseqüentment, la raó que hi ha entre GO i GT és més petita que la que hi ha entre MK i LK, [per substitució]
i la que hi ha entre PQ i CN també.[773]

D'altra banda, la raó que hi ha entre MK i LK també ho és més que la que hi ha entre A i B.

[Per tant, la de PQ i CN és més petita que la de A i B.]

Finalment, PQ i CN són els costats del polígon [regular] circumscrit i inscrit, respectivament.

I això és el que volíem establir. ♠

B.4.1$\boldsymbol{d_{1.4}}$ [ECI 4] *Donades dues magnituds diferents i un sector circular, és possible determinar un polígon* [*regular*] *inscrit en el cercle i un de circumscrit* [*semblant a l'inscrit*], *de manera que la raó que hi ha entre el costat del circumscrit i el costat de l'inscrit és més petita que la de la magnitud gran i la petita.*[774]

772. Ítem *b* de l'exercici 28 (pàgina 78).

773. Ítem *c* de l'exercici 28 (pàgina 78).

774. És l'enunciat corresponent a l'anterior però pensat per a sectors circulars. La demostració és anàloga, *mutatis mutandis*.

Siguin E i F dues magnituds, amb E més gran que F.

I siguin $\bigcirc ABC$ el cercle amb centre el punt D
i $\triangleleft ADB$ el sector circular amb el mateix centre.

Hi volem circumscriure i inscriure polígons [regulars semblants][775] que compleixen el que es proposa en l'enunciat.

[*Demostració*.] Considerem els segments rectilinis diferents G i HK, amb G més gran que HK,
de manera que la raó que hi ha entre aquests és més petita que la que hi ha entre la magnitud gran i la petita. [ECɪ 2]

I, pel punt H, tirem la perpendicular KH, com hem fet en la proposició 3, [Eɪ 11]
i el segment KL igual a G.[776] [P 1 i P 2]

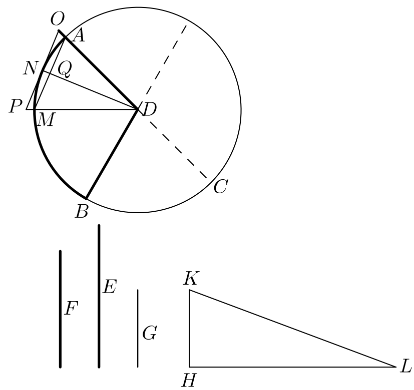


Figura ECɪ 4

Ara dimidiem l'angle $\widehat{ADB}$ iteradament [com hem fet en la proposició anterior] fins a aconseguir un angle més petit que el doble del $\widehat{LKH}$. [Ex 1][777]

Finalment, aconseguim l'angle $\widehat{ADM}$,
i AM és el costat del polígon equilàter inscrit en el sector circular.[778]

Si dimidiem l'angle $\widehat{ADM}$ amb la bisectriu DN [Eɪ 9]
i, pel punt N, tirem la tangent PNO al cercle, [Eɪɪɪ 17]

775. Els polígons tenen tots els costats iguals menys dos, els que tanquen el sector circular. Les raons es fan, naturalment, amb els costats iguals i no amb aquests dos excepcionals.

776. Això és possible, ja que G és més gran que HK. Nota 769 (pàgina 279).

777. Nota 770 (pàgina 279).

778. Es dona un problema greu. L'arc del sector circular i la circumferència poden ser incommensurables. En aquest cas, el polígon inscrit de costat AM s'adapta al sector circular, però no al cercle. Per això, l'hem anomenat polígon regular inscrit en el sector circular. I, a més, tots dos no són construïbles necessàriament amb regle i compàs.

obtenim el costat del polígon circumscrit al segment circular i semblant a l'inscrit.

I, anàlogament a com hem procedit en la proposició anterior, podem establir que la raó que hi ha entre PO i MA és més petita que la que hi ha entre les magnituds E i F. ♠

B.4.1$\boldsymbol{d}_{1.5}$ [ECɪ 5] *Donades dues magnituds diferents i un cercle, és possible determinar un polígon* [*regular*] *inscrit en el cercle i un de circumscrit* [*semblant a l'inscrit*]*, de manera que la raó que hi ha entre el cercle circumscrit i l'inscrit és més petita que la que hi ha entre la magnitud gran i la petita.*[779]

Sigui ○ A el cercle.

I siguin E i F les dues magnituds diferents, la més gran de les quals és E.

Volem inscriure un polígon [regular] en el cercle,
i circumscriure-n'hi un altre [semblant a l'anterior] de manera que es compleixi el que diu l'enunciat.[780]

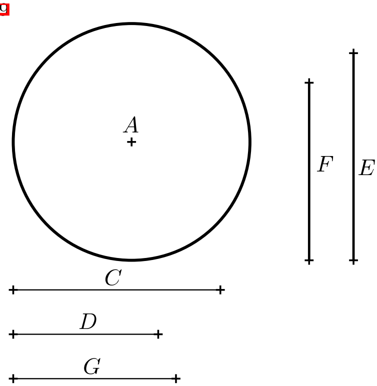


FIGURA ECɪ 5

[*Demostració.*] Considerem dos segments C i D, sent C el més gran, de manera que la raó que hi ha entre C i D és més petita que la que hi ha entre E i F. [ECɪ 2]

Sigui G la mitjana proporcional de C i D. [Evɪ 12]

Aleshores, C és més gran que G.[781]

Ara circumscrivim al cercle un polígon i n'hi inscrivim un altre de manera que la raó entre el costat del circumscrit i el de l'inscrit és més petita que la raó que hi ha entre C i G. [ECɪ 3]

779. A ECɪ 3, Arquimedes estableix una desigualtat entre els perímetres dels polígons. Ara l'estableix entre les àrees.

780. Com ja hem dit abans, la raó s'estableix entre les àrees dels polígons.

781. Tenim que $\frac{C}{G} = \frac{G}{D}$. Si C és més petit que G, G ho és més que D [Dv 5]. Aleshores, C és més petit que D. I això és impossible.

D'això en resulta que la raó doble —el quadrat de la raó— dels costats també és més petita que la raó doble de C i G.[782]

Però la raó doble dels costats de dos polígons semblants és la de [les àrees d]els polígons. [EVI 20]

I aquesta raó doble coincideix amb la dels segments C i D. [EV 9]

Per tant, la raó que hi ha entre [les àrees d]el polígon circumscrit i l'inscrit és més petita que la que hi ha entre C i D. [Nc 4′]

I, de retruc, la raó que hi ha entre els polígons encara ho és més —*πολλῷ … ἐλάσσονα λόγον ἔχει*— que la que hi ha entre E i F. ♠

B.4.1 $d_{1.6}$ [ECI 6] Anàlogament, demostrarem que, *donades dues magnituds i un sector circular, és possible circumscriure-hi i inscriure-hi polígons [regulars semblants]*[783] *de manera que:* a*) la raó del polígon circumscrit i l'inscrit és més petita que la que hi ha entre la magnitud gran i la petita, i* b*) donats un cercle o un sector circular i una àrea arbitrària, inscrivint-hi un polígon equilàter en el cercle o en el sector i en els segments restants, obtindrem, finalment, segments de cercles o de sectors més petits que l'àrea donada.*

Aquests resultats ja han estat explicats en els *Elements*,[784] però hem de demostrar que, *donats un cercle o un sector i una àrea, és possible circumscriure al cercle o al sector un polígon de manera que la suma dels segments del polígon circumscrit és més petita que l'àrea donada. I que podem transportar al sector el que vam establir per al cercle.*

Considerem el cercle ◯ A i una àrea arbitrària ⬠ B.

Afirmo que al cercle hi podem circumscriure un polígon de manera que la suma dels segments situats entre el cercle i aquest és més petita que l'àrea B.

Tenim dues magnituds diferents,
la més gran de les quals és l'àrea del polígon ⬠ B i del cercle ◯ A juntes,
i la més petita és la del cercle ◯ A.

782. És difícil justificar aquesta afirmació perquè el concepte de «raó doble» és molt complicat. PLA (2021), § 3.3.13, p. 99-101.

783. En el sentit descrit en la nota 778 (pàgina 281).

784. Novament, Arquimedes es refereix explícitament a l'obra magna d'Euclides.

Hi podem circumscriure i inscriure polígons [semblants] de manera que la raó del circumscrit i l'inscrit és més petita que la de la magnitud gran i la petita. [ECi 5]

I, a més, de manera que la suma de les àrees que hi ha entre el cercle i la circumferència és més petita que l'àrea de B.

[*Demostració.*] La raó que hi ha entre el polígon circumscrit i l'inscrit és més petita que la que hi ha entre el cercle i l'àrea donada —és a dir, $\bigcirc A$ i B junts— i el cercle —$\bigcirc A$.

Dit d'una altra manera, la raó que hi ha entre P i p és més petita que la que hi ha entre $A + B$ i A.

I el cercle és més gran que el polígon inscrit, és a dir, $\bigcirc A$ és més gran que p.[785]

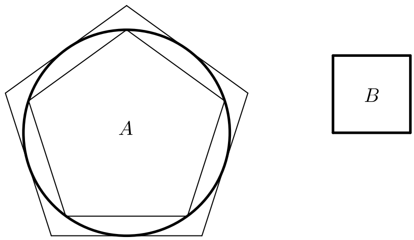


Figura ECi 6

Per tant, amb més motiu, la raó que hi ha entre P i $\bigcirc A$ també ho és. [Ev 8]

Aleshores, *componendo*, la que hi ha entre la diferència del polígon P i el cercle $\bigcirc A$ és més petita que la que hi ha entre l'àrea B i aquest cercle.[786] [Ev 18]

Per tant, [l'àrea d]els segments circulars residuals del polígon circumscrit és, en conjunt, més petita que l'àrea B. [Ev 10] ♠

B.4.1$\boldsymbol{d_{1.7}}$ [ECi 7] *Si en un con isòsceles*[787] *inscrivim una piràmide de base equilàtera,*[788] *l'àrea lateral de la piràmide*[789] *equival a un triangle que té la base igual al perímetre de la base* [*de la piràmide*] *i*

785. Arquimedes, com Euclides, usa el fet que una àrea està situada dins de l'altra.

786. Arquimedes, a ECi 2, ha estès l'operació *componendo* a la desigualtat entre raons de segments. Ara ho fa a les raons entre àrees.

787. És a dir, circular recte. De fet, és la definició de *con* de Dxi 18.

788. El text grec és clar: «Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ, πυραμὶς ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσις.» És un diorisma perquè imposa que totes les altures de les cares de la piràmide són iguals.

789. És la superfície dels triangles que tenen el mateix vèrtex que la piràmide. La base en queda exclosa.

l'altura igual a la perpendicular que va del vèrtex de la piràmide al costat de la base [*de la piràmide*]*.*

Considerem un con isòsceles de base el cercle $\bigcirc ABC$.

Hi inscrivim una piràmide que té la base equilàtera $\triangle ABC$.

Afirmo que l'àrea lateral de la piràmide és igual al triangle que he descrit abans.

[*Demostració.*][790] Atès que el con és isòsceles i la base de la piràmide equilàtera,
totes les altures dels triangles que formen la piràmide són iguals.

Per tant, aquests triangles tenen les bases AB, BC i CA iguals, i també, com hem dit, l'altura.

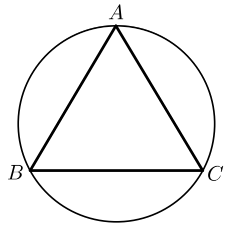


Figura ECi 7

D'això en resulta que tots els triangles junts equivalen a un triangle de base la [suma] dels costats AB, BC i CA,[791] i altura el segment descrit. [Evi 1][792] ♠

B.4.1$\boldsymbol{d_{1.8}}$ [ECi 8] *Si en un con isòsceles circumscrivim una piràmide, la seva àrea lateral equival a la del triangle de base* [*un segment*] *equivalent al perímetre de la base* [*de la piràmide*] *i altura*[793] *el costat del con.*[794]

Considerem un con de base el cercle $\bigcirc ABC$.

Hi circumscrivim una piràmide.

És a dir, considerem una piràmide de base un polígon ⬠ DEF circumscrit al cercle $\bigcirc ABC$ [i amb el mateix vèrtex que el con].

---

790. És un exercici trivial.

791. Arquimedes no fa servir la paraula *suma*. Diu: «el triangle de base AB, BC i CA».

792. Adapta aquest resultat a aquest cas, però probablement hauria estat més clar haver recorregut a Ei 47. A Masià (2010), p. 80, hi trobem una demostració alternativa basada en Ei 41.

793. És a dir, la «generatriu» del con, que, en la definició Dxi 18, correspon a la hipotenusa del triangle rectangle.

794. És l'enunciat anàleg al de la proposició anterior, però aplicat a una piràmide circumscrita. Tanmateix, ara no cal recórrer al diorisma que imposava l'equilateralitat dels costats de la base perquè totes les altures són iguals a la generatriu del con.

Afirmo que l'àrea lateral de la piràmide equival al triangle que hem descrit.

[*Demostració.*] Com que els segments que uneixen el centre del cercle amb els punts de contacte són perpendiculars als segments DE, EF i FD, [EIII 18]

els segments que uneixen el vèrtex G del con amb els punts de contacte són perpendiculars als segments DE, EF i FD.[795]

Per tant, els segments GA, GB i GC són iguals. De fet, són la generatriu del con.

Considerem el triangle $\triangle\, HKL$ de costat HK, equivalent al perímetre del triangle $\triangle\, DEF$, i altura LM, equivalent a la generatriu AG del con.

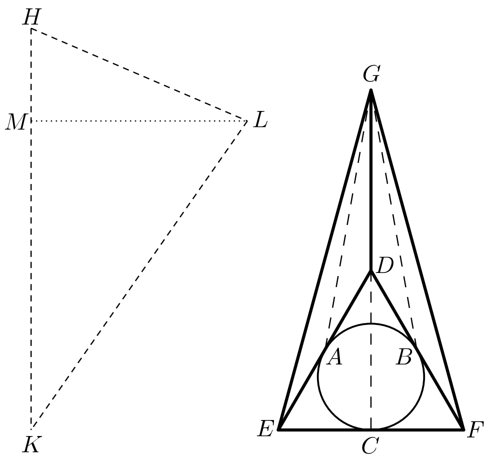


Figura ECI 8[796]

Aleshores, atès que els rectangles de costats ED i AG, DF i GB, i EF i GC equivalen al doble dels triangles $\triangle\, EDG$, $\triangle\, DFG$ i $\triangle\, AGF$, respectivament, [EI 41]

resulta que el rectangle de costats HK i AG,

és a dir, LM, és el doble [de la suma] dels triangles $\triangle\, EDG$, $\triangle\, DFG$ i $\triangle\, AGF$. [EII 1]

---

795. Ho demostra Eutoci. És una conseqüència del teorema de les tres perpendiculars, que diu: «Si un segment és perpendicular a un pla i pel seu peu passa un segon segment perpendicular a un tercer segment del pla, el tercer segment és perpendicular al pla que determinen els dos primers.» Aquest teorema no es troba en els *Elements* d'Euclides. Vegeu el problema 17 (pàgina 160). Aprofitem, ara, per indicar que, en la definició DXI 4, Euclides el pressuposa implícitament. Frajese (1974), p. 93, nota 18. També podríem haver usat directament EI 47.

796. Recordem que les figures no es mostren en la perspectiva que proporciona l'espai, sinó que són planes. El lector, tanmateix, pot esmenar fàcilment aquesta mancança si ho necessita.

I, anàlogament, el rectangle de costats HK i LM, el doble del triangle $\triangle\, LKH$. [EI 41]

En definitiva, l'àrea lateral de la piràmide equival al triangle de base equivalent al perímetre de[l triangle] $\triangle\, DEF$ i altura la generatriu del con. ♠

B.4.1$\boldsymbol{d_{1.9}}$ [ECI 9] *Considerem un con isòsceles i una secant del cercle de la seva base. Unim els extrems de la corda amb el vèrtex del con. El triangle*[797] *que formen la corda* [*secant al cercle*] *i els segments que uneixen* [*els seus extrems*] *amb el vèrtex*[798] *és més petit que l'àrea lateral del con limitada per aquests segments que ixen del vèrtex* [*i l'arc de circumferència limitat per la corda*].[799]

Sigui $\bigcirc\, ABC$ el cercle de la base d'un con isòsceles [[$D; ABC$]] de vèrtex D.

Tirem una secant arbitrària AC del cercle de la base. [P 1]

Considerem AD i DC, que són els segments que uneixen el vèrtex D i els punts A i C. [P 1]

Afirmo que el triangle $\triangle\, ADC$ és més petit que la part de superfície del con limitada per [el triangle] $\triangle\, ADC$.

[*Demostració.*] Dimidiem l'arc $\widehat{ABC}$ pel punt C. [EIII 30]

Unim AB, BC i CA. [P 1]

La suma dels triangles $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, BCD$ és més gran que el triangle $\triangle\, ADC$.[800] [ECI, postulat 4][801]

Sigui H l'àrea amb la qual la suma excedeix el triangle bàsic.[802]

797. S'entén «l'àrea del triangle».

798. Són generatrius del con.

799. De fet, és un porisma d'ECI postulat 3 i el resultat val per a les dues àrees laterals del con que determina el triangle. L'àrea «envolupant» és més gran que l'«envolupada».

800. És fàcil veure que ens referim a les àrees dels triangles, cosa que, d'ara endavant, donarem per sobreentesa.

801. Eutoci n'estableix la veritat perquè hem de considerar totes les superfícies que tanquen la base $\triangle\, ADC$.

802. És a dir, $H = \triangle\, ABD + \triangle\, BCD - \triangle\, ADC$. De vegades, és aconsellable escriure el text en termes més algebraics perquè se'ns fan més entenedors pel fet de ser sintètics.

L'àrea H satisfà una d'aquestes dues possibilitats:[803]

a) És més petita que la suma dels dos segments circulars $\frown AEB$ i $\frown BFC$.

b) No és més petita que la suma dels dos segments circulars $\frown AEB$ i $\frown BFC$.

En primer lloc, considerem el cas *b*.

Hi ha dues superfícies en joc: la lateral del con limitada per [els segments] AD i DB[804] i el segment circular $\frown AEB$,

i la del triangle $\triangle ADB$,

totes dues limitades per la mateixa línia, que és el triangle $\triangle ADB$.

Aleshores, l'àrea que comprèn és més gran que l'àrea compresa.

[ECi, postulat 4][805]

Així, la part [esmentada] de la superfície del con limitada per AD i DB i el segment circular $\frown AEB$ té una àrea més gran que [la d]el triangle $\triangle ABD$.

Anàlogament, establim que la del con limitada pels segments BD i DC i el segment circular $\frown CFB$ ho és més que [la d]el triangle $\triangle CFB$.

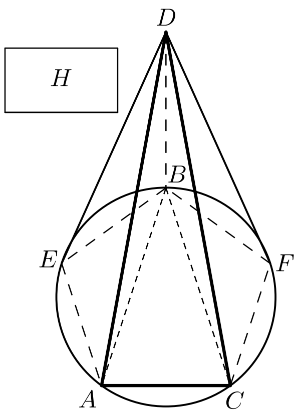


Figura ECi 9

Per tant, la superfície cònica $AEBFCD$,[806] juntament amb H, té una àrea més gran que [la d]els triangles suara esmentats.

Però la suma de [les àrees d]els triangles $\triangle ADB$ i $\triangle BCD$ i H [junts] és igual a [la d]el triangle $\triangle ADC$ i [la de] H [junts].

Ara sostraiem [d'ambdues sumes] l'àrea [de] H.

803. Disjunció de casos.

804. Com que l'obtenim tallant un con, Arquimedes l'anomena *superfície cònica*. En concret, la frase completa és: «Ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι ἥ τε κωνικὴ ἡ μεταξύ $A\Delta B$ μετὰ ψοῦ AEB τμήματος καὶ ἡ τοῦ $A\Delta B$ τριγώνον.» D'ara endavant, usarem aquesta expressió.

805. Fixem-nos que Arquimedes imposa aquí que la corba que tanca les dues superfícies és la mateixa, cosa que no havia fet abans.

806. Nota 804.

De tot això en resulta que l'àrea de la superfície lateral del con limitada pels segments AD i DC és més gran que [la d]el triangle $\triangle\, ADC$. ♠

En segon lloc, considerem el cas a i suposem que [l'àrea] H és més petita que [la suma de les àrees d]els segments circulars $\frown AEB$ i $\frown BDF$.

Dimidiem els arcs $\widehat{AB}$ i $\widehat{BC}$ i iterem el procés. [EIII 30]

Arriba un moment en el qual la suma dels segments circulars és més petita que H. [ECI 6][807]

Siguin AE, EB, BF i FC les cordes respectives d'aquests segments circulars. Tirem els segments DE i DF. [P 1]

Per les mateixes raons d'abans, [ECI, postulat 4]
l'àrea de la superfície cònica[808] limitada per [els segments] AD i DE i pel segment circulars determinat per la corda AE és més gran que la del triangle $\triangle\, ADE$.

I també ho és més que la del triangle $\triangle\, ADE$ limitada per [els segments] BD i DE i pel [segment circular] determinat per la corda EB.

Per tant, l'àrea de la superfície cònica limitada per [els segments] AD i DB
i pels segments circulars limitats per les cordes AE i EB
és més gran que la de la suma dels triangles $\triangle\, ADE$ i $\triangle\, EDB$.
[Nc 4′, adaptada]

I, com que aquesta suma és més gran que el triangle $\triangle\, ABD$, resulta naturalment que l'àrea de la superfície cònica limitada per [els segments] AD i DB
i pels segments circulars limitats per les cordes AE i EB
és més gran que la del triangle $\triangle\, ADB$. [Nc 4′, adaptada]

I, anàlogament, veiem que l'àrea de la superfície cònica limitada per [els segments] DB i CD augmentada amb els segments circulars limitats per les cordes BF i FC és més gran que la del triangle $\triangle\, BDC$.

807. Adaptant-lo adequadament. De fet, aplica Ex 1.

808. Nota 804. Ja no ho tornarem a repetir.

En definitiva, l'àrea de tota la superfície [cònica] més els [quatre] segments circulars corresponents és més gran que la dels triangles $\triangle ADB$ i $\triangle BDC$ junts.

Però aquesta darrera suma és igual a la del triangle $\triangle ADC$ i H.

Per tant, els segments circulars esmentats tenen, junts, una àrea inferior a la de H.

En definitiva, la superfície [cònica] limitada per [els segments] AD i DC és més gran que la del triangle $\triangle ADC$.[809] ♠

B.4.1$\boldsymbol{d_{1.10}}$ [ECI 10] *Considerem dues tangents al cercle de la base del con que es troben en el pla* [*de la base*] *d'aquest con. Suposem que les dues tangents es tallen. Si unim el punt de tall amb el vèrtex de la piràmide, els triangles formats per les tangents i el segment que ix del vèrtex junts són més grans* [*en àrea*] *que la superfície del con que determinen les dues rectes.*[810]

Considerem un con de base el cercle $\bigcirc ABC$ i vèrtex el punt E.

En el pla del cercle, tirem dues tangents al cercle AD i CD [que es tallen pel punt D]. [EIII 17 i P 5]

Unim el punt E, que és el vèrtex del con, amb els punts A, D i C.

Obtenim els segments EA, ED i EC. [P 1]

Afirmo que la suma dels triangles $\triangle ADE$ i $\triangle DEC$ és més gran que la superfície cònica determinada pels segments AE i CE i l'arc de circumferència $\widehat{ABC}$.

[*Demostració.*] Tirem la tangent FBG al cercle bàsic del con i paral·lela al segment AC. [EIII 17][811]

El punt de contacte B divideix l'arc $\widehat{AC}$ per la meitat.

Unim els punts de tall G i F amb el vèrtex E.

Obtenim els segments GE i FE. [P 1]

Els segments GD i DF junts són més llargs que GF. [EI 20][812]

---

809. Sostraiem H d'ambdues àrees i hi apliquem Nc $4'$ adaptat.

810. Aquesta proposició és «bessona» d'ECI 9. Ara, però, considerem dos plans tangents al con que passen per un punt del pla de la base que es troba «fora del cercle». La desigualtat funciona al revés que en la proposició anterior.

811. Ítem a del problema 18 (pàgina 161).

812. Es dedueix també d'ECI postulats 1 i 2. NETZ (2004), p. 68, nota 81.

A les dues longituds iguals, hi afegim els segments GA i FC junts.

Els segments GD, DF, GA i FC junts són més llargs que GF, GA i FC junts. [Nc 4′, adaptada]

Per tant, els segments AD i DC junts ho són més que AG, GF i FC junts. [Nc 4′, adaptada]

Com que [els segments] AE, EB i EC són generatrius del con, esdevenen iguals, ja que aquest és recte.[813]

Anàlogament, també són perpendiculars.[814]

Per tant, la suma dels triangles $\triangle\, AED$ i $\triangle\, DEC$ és més gran que la dels triangles $\triangle\, AEG, \triangle\, GEF$ i $\triangle\, FEC$. [Evi 1]

Sigui H l'àrea amb la qual la suma $\triangle\, AED$ i $\triangle\, DEC$ excedeix la suma $\triangle\, AEG, \triangle\, GEF$ i $\triangle\, FEC$.[815]

Aleshores, ens trobem amb una d'aquestes dues possibilitats:[816]

a) L'àrea H és més petita que l'àrea suma dels residus ⌒ $AKBG$ i ⌒ $BFCL$.

b) L'àrea H no és més petita que l'àrea suma dels residus ⌒ $AKBG$ i ⌒ $BFCL$.

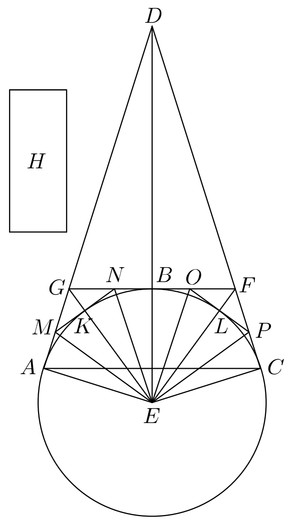


Figura ECi 10

b) En primer lloc, suposem que no ho és.

Com que es tracta d'una superfície formada per unes altres dues —la piràmide de base el trapezi ⏢ $GACF$ i vèrtex el punt E, i la superfície cònica limitada per les [generatrius] AE i EC i el segment [circular] ⌓ ABC—,

---

813. Arquimedes sempre considera cons rectes, com els que descriu Euclides a Exi 18.

814. O sigui, les parelles de segments EA i AD, EB i GF, i EC i DC són perpendiculars perquè la generatriu del con és perpendicular a la tangent al cercle de la base pel punt de tangència. El text diu: «com queda establert en el lema» i «els rectangles limitats per les bases i les altures són el doble que els triangles» [Ei 41]. El lema, però, no hi és. L'estableix Eutoci en el comentari a ECi 8. Problema 17 (pàgina 160).

815. És a dir, $\triangle\, AEG + \triangle\, GEF + H = \triangle\, AEG + \triangle\, GEF + \triangle\, FEC$. Nota 802 (pàgina 287).

816. Disjunció de casos.

i les dues comparteixen com a límit el perímetre del triangle $\triangle\, AEC$, és evident que la superfície de la piràmide, sense el triangle $\triangle\, AEC$, és més gran que la superfície cònica més el segment [circular] ⌓ ABC.
[ECɪ, postulat 4][817]

Sostraiem d'ambdues sumes el segment circular comú ⌓ ABC.

Resulta que els triangles $\triangle\, AGE, \triangle\, GEF$ i $\triangle\, FEG$,
juntament amb les àrees residuals $AGBK$ i $BFCL$
conformen una superfície més gran que la superfície cònica limitada per les generatrius AE i EC. [Nc 4′, adaptada]

Però hem suposat que [l'àrea] H no és més petita que la suma de les dues àrees residuals.

Per tant, la suma dels tres triangles més l'àrea H és molt més gran que la superfície cònica limitada per les generatrius AE i EC.

Tanmateix, la suma [del primer membre] és igual a la suma dels dos triangles $\triangle\, AED$ i $\triangle\, DCE$.

Conseqüentment, aquesta suma és més gran que la superfície cònica esmentada. [transitiva] ♠

a) En segon lloc, suposem que [l'àrea] H és més petita que la suma de les dues àrees residuals.

Si circumscrivim polígons [nous] als segments circulars,
dimidiem els arcs residuals [Eɪɪɪ 30]
i tirem segments tangents, [Eɪɪɪ 17]
aconseguim àrees residuals la suma de les quals és més petita que H.
[ECɪ 6][818]

Suposem que les àrees residuals de suma inferior a l'àrea H són AMK, KNB, BOL i LPC.

Unim els vèrtexs amb el punt E. [P 1]

Novament, és clar que la suma dels triangles $\triangle\, AGE, \triangle\, GEF$ i $\triangle\, FEG$ és més gran que la dels triangles $\triangle\, AEM$, $\triangle\, MEN$, $\triangle\, NEO$, $\triangle\, OEP$ i $\triangle\, PEC$. [ECɪ, postulat 4]

I també[, com hem vist en la proposició anterior,] la piràmide de base el polígon $AMNOPC$ i vèrtex E, menys [el triangle] $\triangle\, AEC$,

817. O sigui, $\triangle\, AEG + \triangle\, GEF + \triangle\, FEC >$ $+$ ⌓ ABC. Nota 802 (pàgina 287). Ja no ho tornarem a indicar.

818. Ítem *c* del problema 18 (pàgina 161).

té una àrea més gran que la superfície cònica limitada per les [generatrius] AE i EC i el segment [circular] $\frown ABC$. [ECI, postulat 4]

Sostraiem [de les dues bandes] el segment [circular] comú $\frown ABC$.

Els triangles que queden, $\triangle AEM, \triangle MEN, \triangle NEO, \triangle OEP$ i $\triangle PEC$,

juntament amb les àrees residuals [limitades per l'arc de circumferència i les tangents] AMK, KNB, BOL i LPC, proporcionen una àrea més gran que la superfície cònica limitada per les generatrius AE i EC.

Però l'àrea H és més gran que la suma de les àrees residuals,

i la suma dels triangles $\triangle AEG, \triangle GEF$ i $\triangle FEC$, més que la suma dels triangles $\triangle AEM, \triangle MEN, \triangle NEO, \triangle OEP$ i $\triangle PEC$, tal com hem demostrat.[819]

Per tant, la suma dels triangles $\triangle AEG, \triangle GEF$ i $\triangle FEC$ més l'àrea H

—és a dir, la suma [de les àrees] dels triangles $\triangle ADE$ i $\triangle DEF$— és molt més gran que la superfície cònica limitada per les generatrius AE i EC. ♠ ♠

B.4.1$\boldsymbol{d}_{1.11}$ [ECI 11] *La superfície [còncava] de la part d'un cilindre recte delimitada per dos segments seus és més gran que el paral·lelogram delimitat per aquests segments i pels que n'uneixen els seus extrems.*[820]

Considerem el cilindre recte de bases els cercles $\bigcirc AB$ i $\bigcirc CD$.

Tirem els segments AC i BD. [P 1]

Afirmo que la superfície del cilindre limitada per [els segments] AC i BD és més gran que el paral·lelogram.[821]

[*Demostració.*] Dimidiem els arcs $\overparen{AB}$ i $\overparen{CD}$ pels punts respectius E i F. [EIII 30]

---

819. Admetem que, atesa la desigualtat de les bases, els triangles que tenen una mateixa altura —la generatriu del con— mantenen aquesta desigualtat.

820. Aquesta proposició i la següent són calcades d'ECI 8 i ECI 9. També es corresponen amb les proposicions ECI 13 i ECI 14. Les primeres fan referència al con i les segones al cilindre.

821. Arquimedes les anomena així però, com que el cilindre és recte, són rectangles.

Unim AE i EB, i CF i FD. [P 1]

Sabem que els segments [rectilinis] AE i EB junts superen el segment [rectilini] AB [EI 20]
i que els paral·lelograms construïts damunt aquests segments tenen la mateixa altura.

Per tant, la suma dels paral·lelograms de bases els segments AE i EB és més gran que el paral·lelogram ▱ $ABDC$,
ja que tots tenen la mateixa altura que el cilindre. [Nc 4′ i EVI 1][822]

Ara considerem l'excés H de la suma dels paral·lelograms de bases AE i EB sobre el paral·lelogram ▱ $ABDC$.

Es dona una d'aquestes dues possibilitats:

a) La superfície H és més petita que la suma dels segments circulars plans ⌓ AE, ⌓ EB, ⌓ CF i ⌓ FD.

b) La superfície H no és més petita que la suma dels segments circulars plans ⌓ AE, ⌓ EB, ⌓ CF i ⌓ FD.

b) En primer lloc, suposem que H no és més petita.

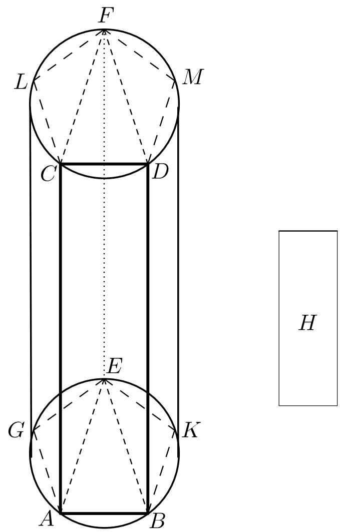


FIGURA ECI 11

Tenim, d'una banda, la superfície cilíndrica tallada pels segments [rectilinis] AC i BD,
augmentada amb els segments [circulars] ⌓ AEB i ⌓ CFD
i limitada pels paral·lelogram ▱ $ACDB$.[823]

I, d'una altra, la superfície composta pels paral·lelograms de base AE i EB i altura la del cilindre,
juntament amb els triangles $\triangle AEB$ i $\triangle CFD$,
que està limitada pel paral·lelogram ▱ $ACDB$.

822. Aquí se suposa que, en dos paral·lelograms de la mateixa altura, la superfície del que té la base més gran és més gran.

823. Arquimedes designa el paral·lelogram d'una manera diferent de la que fem servir nosaltres.

I, com que una superfície envolta l'altra i les dues són còncaves del mateix sentit,
resulta que la cilíndrica limitada pels segments [rectilinis] AC i BD augmentada pels segments [circulars] $\frown AEB$ i $\frown CFD$ és més gran que la composta pels paral·lelograms de bases AE i EB i altura la del cilindre i pels triangles $\triangle\, AEB$ i $\triangle\, CFD$. [ECI, postulat 4]

Sostraiem[, a les dues parts,] els triangles $\triangle\, AEB$ i $\triangle\, CFD$ [que els són comuns].

Aleshores, el residu de la superfície cilíndrica pels segments [rectilinis] AC i BD,
juntament amb els segments circulars $\frown AE, \frown EB, \frown CF$ i $\frown FD$, és més gran que la superfície composta pels paral·lelograms de bases AE i EB i altura la del cilindre.

Però la suma d'aquests paral·lelograms és igual a $\parallelogram\, ACDB$ més l'àrea H.

Per tant, el residu de la superfície cilíndrica és més gran que el paral·lelogram $\parallelogram\, ACDB$. $\spadesuit$

a) En segon lloc, suposem que l'àrea H és més petita que la suma dels segments circulars $\frown AE, \frown EB, \frown CF$ i $\frown FD$.

Dimidiem els arcs $\widehat{AE}, \widehat{EB}, \widehat{CF}$ i $\widehat{FD}$ pels punts G, K, L i M. [EIII 30]

Unim $AG, GE, EK, KB, CL, LF, FM$ i MD. [P 1]

Reiterem el procés fins a aconseguir una col·lecció de segments circulars que junts donen una àrea més petita que [l'àrea] H.

Suposem que aquests segments circulars són $\frown AG, \frown GE, \frown EK$ i $\frown KB$, i $\frown CL, \frown LF, \frown FM$ i $\frown MD$.

De manera anàloga [al que hem vist abans], els paral·lelograms de base AG, GE, EK i KB i altura la del cilindre proporcionen una suma més gran que els paral·lelograms de bases AE i EB i altura la del cilindre.

La superfície cilíndrica determinada pels segments rectilinis AC i BD,
juntament amb els segments circulars $\frown AEB$ i $\frown CFD$,
està limitada pel paral·lelogram $ACDB$.

Però la superfície formada pels paral·lelograms de bases AG, GE, EK i KB i altura la del cilindre,
juntament amb els polígons ⬠ $AGEKB$ i ⬠ $CLFMD$,
té el mateix límit pla.

Sostraiem, de les dues superfícies, aquests polígons.

Resulta que la superfície residual de la determinada pels segments rectilinis AC i BD, juntament amb els segments circulars ⌓ AG, ⌓ GE, ⌓ EK i ⌓ KB, i ⌓ CL, ⌓ LF, ⌓ FM i ⌓ MD, és més gran que la residual de la que es compon dels paral·lelograms de base AG, GE, EK i KB i altura la del cilindre. [Nc 4′, adaptada]

Però aquests paral·lelograms junts són més grans que els de base AE i EB i altura la del cilindre.[824]

Per tant, la superfície cilíndrica, juntament amb els segments circulars ⌓ AG, ⌓ GE, ⌓ EK i ⌓ KB, i ⌓ CL, ⌓ LF, ⌓ FM i ⌓ MD, és més gran que els paral·lelograms de base AE i EB i altura la del cilindre.

Ara bé, els paral·lelograms junts equivalen a l'àrea H i el paral·lelogram ▱ $ACBD$.

Per tant, la superfície cilíndrica, juntament amb els vuit segments circulars, és més gran que el paral·lelogram ▱ $ACDB$ més l'àrea H.

Si sostraiem els vuit segments circulars [a ambdues superfícies] —que hem suposat que tenen una suma més petita que [l'àrea] H—, resulta que el residu de la superfície cilíndrica limitada pels segments AC i BD és més gran que el paral·lelogram ▱ $ACDB$. ♠ ♠

B.4.1*d*$_{1.12}$ [ECI 12] *Si, pels extrems de dos segments [rectilinis]*[825] *que són en la superfície d'un cilindre recte arbitrari, tirem tangents a [les circumferències d]els cercles que són les bases del cilindre, aquests segments [tangents] són en el pla dels cercles i es tallen, i la suma*[826] *dels paral·lelograms limitats per les tangents i les generatrius*

824. Arquimedes no usa, com tampoc no ho feia Euclides, l'expressió «suma», però nosaltres la incorporarem perquè aclareix el text.

825. La figura que acompanya aquesta proposició mostra el cilindre mirat per sobre o per sota. Els punts A i C són els extrems de dues generatrius del cilindre quan toquen la base.

826. Nota 824. Ja no ho tornarem a repetir.

del cilindre és més gran que la superfície cilíndrica limitada pels segments que són en la seva superfície.

Considerem el cercle $\bigcirc ABC$ que és la base d'un cilindre recte arbitrari

i, en la superfície d'aquest cilindre, dos segments [rectilinis] d'extrems els punts A i C.

Pels punts A i C, tirem tangents al cercle en el pla [del cercle] [EIII 17]

que es tallin entre si pel punt G.

Imaginem que, pels extrems de les generatrius al cilindre que són a l'altra base,

hem traçat també tangents a [la circumferència d]el cercle.

Volem demostrar que la suma dels paral·lelograms limitats per les tangents i per les generatrius del cilindre és més gran que la superfície del cilindre construïda sobre l'arc $\widehat{AC}$.

[*Demostració.*] Pel punt [mitjà] B [de l'arc $\widehat{AC}$], tirem la tangent EF a la circumferència del cercle $\bigcirc ABC$. [EIII 17]

Pels punts E i F [de la base superior del cilindre], tirem segments rectilinis paral·lels al seu eix.[827] [EI 31]

La suma dels paral·lelograms limitats pels segments AG i FG

i les generatrius del cilindre és més gran que la suma dels paral·lelograms limitats pels segments AE, EF i FC i les generatrius.

Sigui H l'excés d'aquestes dues sumes de paral·lelograms.

La meitat de la superfície H compleix una d'aquestes dues condicions:[828]

a) És més gran que la suma de les figures limitades pels segments AE, EF i FC i els arcs $\widehat{ADB}$ i $\widehat{BKC}$.

b) No és més gran que la suma de les figures limitades pels segments AE, EF i FC i els arcs $\widehat{ADB}$ i $\widehat{BKC}$.

a) En primer lloc, suposem que és més gran.

El perímetre del paral·lelogram construït sobre el segment rectilini AC està limitat per la superfície composta pels paral·lelograms

827. Recordem que el cilindre és recte i, per tant, aquests segments paral·lels són perpendiculars als plans de les seves bases.

828. Disjunció de casos.

construïts sobre els segments AE, EF i FC, el trapezi ⏢ AEF i l'oposat a l'altra base,
i també per la superfície composta per la superfície del cilindre construïda sobre l'arc $\widehat{ABC}$, el segment circular ⌓ ABC i l'oposat [a l'altra base].

Per tant, les dues superfícies que acabem d'esmentar tenen el mateix límit en un mateix pla,
són còncaves del mateix costat,
una està limitada per l'altra
i la seva resta és comuna.

Per tant, la superfície limitada és la més petita.[829] [ECI, postulat 4]

Si hi sostraiem les parts comunes,
—és a dir, el segment circular ⌓ ABC i l'oposat—,
la superfície del cilindre construïda sobre l'arc $\widehat{ABC}$ és més petita que la que es compon dels paral·lelograms construïts sobre els segments [rectilinis] AE, EF i FC, les superfícies mixtilínies AEB i BFC i les parts oposades. [Nc 4′, adaptada]

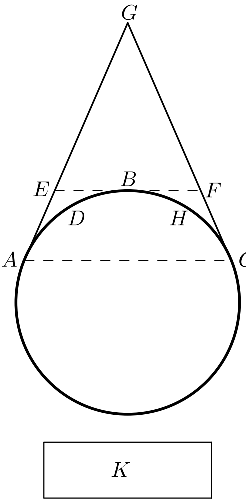


FIGURA ECI 12

Però la superfície que es compon dels paral·lelograms i les superfícies mixtilínies suara esmentats és més petita que la dels paral·lelograms de bases AG, GC [, ja que la suma dels paral·lelograms construïts sobre els segments AG, GC i el costat del cilindre és més gran que la superfície del cilindre sobre l'arc $\widehat{ABC}$]. ♠

b) En segon lloc, si la superfície K no és més gran que la suma de les figures limitades pels segments AE, EF i FC i els arcs $\widehat{ADB}$ i $\widehat{BKC}$, tirem les tangents a [la circumferència d]el cercle fins que la suma de les figures residuals és inferior a la meitat de K. [ECI 6]

El que falta ho podem demostrar com hem fet abans.[830] ♠ ♠

829. La que està embolcallada per l'altra.
830. En clara referència a la demostració d'ECI 11.

B.4.1$\boldsymbol{d_{1.12a}}$ [ECɪ 12, porismes] Un cop hem establert tot això, resulta trivialment que:

a) *L'àrea de la superfície d'una piràmide* [*recta*] *inscrita en un con recte, sense la base, és més petita que l'àrea de la superfície del con.*

I això és així perquè cadascun dels triangles [laterals] que formen la piràmide és més petit que la superfície del con limitat pels costats del triangle.

Per tant, l'àrea de la superfície total de la piràmide, excepte la base, és més petita que la de la superfície del con. ♠

b) *La superfície de la piràmide circumscrita a un con recte, sense la base, és més gran que la superfície del con.* ♠

c) *Si inscrivim un prisma en un cilindre* [*recte*], *l'àrea de les cares laterals del prisma, que es compon dels paral·lelograms, és més petita que la del cilindre excloent-hi la base.* ♠

d) *Si circumscrivim un prisma a un cilindre* [*recte*], *l'àrea lateral del prisma* [*que es compon de les seves cares laterals*] *és més gran que l'àrea de la superfície del cilindre excloent-hi la base.* ♠

B.4.1$\boldsymbol{d_{1.13}}$ [ECɪ 13] *L'àrea de la superfície d'un cilindre recte qualsevol exceptuant-ne la base és igual a un cercle de radi la mitjana proporcional de la seva generatriu i diàmetre el de la seva base.*[831]

Considerem el cercle $\bigcirc A$, base d'un cilindre recte arbitrari,
el segment CD igual al diàmetre del cercle $\bigcirc A$
i el segment EF igual a la generatriu del cilindre.

Considerem el segment G que és igual a la mitjana proporcional de CD i EF [Evɪ 13]
i, finalment, el cercle $\bigcirc B$ de radi igual al segment G.
[P 3 i Eɪ 2 o Eɪ 3]

Volem demostrar que l'àrea del cercle $\bigcirc B$ equival a l'àrea lateral de la superfície del cilindre.[832]

831. Fixem-nos amb quina habilitat Arquimedes obvia π. Identifica l'àrea lateral del cilindre amb la d'un cercle adequat i ja està.

832. Com ja hem dit manta vegades, hi exclou la base.

[*Demostració.*][833] Si [l'àrea d']aquest cercle no és igual a la superfície del cilindre,[834] aleshores:

a) és més petita, o

b) és més gran.

a) Suposem, en primer lloc, que és més petita.

Atès que disposem de dues quantitats diferents
—la superfície del cilindre i el cercle $\bigcirc B$—,
en el cercle $\bigcirc B$ podem inscriure un polígon equilàter [⬠ p]
i circumscriure-n'hi un altre [⬠ P]
de manera que la raó del circumscrit i l'inscrit és més petita que la raó de l'àrea de la superfície del cilindre i la del cercle $\bigcirc B$.[835] [ECI 5]

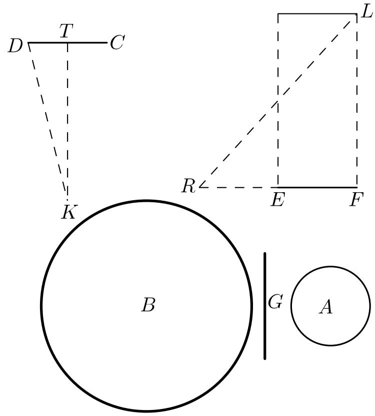


FIGURA ECI 13

Suposem que en el cercle $\bigcirc A$ circumscrivim un polígon ⬠ P' semblant al que està circumscrit al cercle $\bigcirc B$.

[EIII 16 o EVI 2 o EVI 18][836]

---

833. Ens podem preguntar com va intuir Arquimedes aquest resultat, la demostració del qual és tan complexa. Una possibilitat és que ja coneixia el primer resultat de la monografia MC, que lliga l'àrea del cercle i el perímetre de la circumferència, i que es va adonar que se'n pot deduir fàcilment aquest enunciat.

$\mathcal{A}_{\text{lateral cilindre}} = \mathcal{L}_{\text{cercle de la base}} \times h = \frac{\mathcal{L}_{\text{cercle de la base}} \times r}{2} \times (2\,h)$, en què h és l'altura del cilindre i $\mathcal{L}_{\text{cercle de la base}}$ la longitud de la circumferència del cercle de la base. Ara bé, $\frac{1}{2}\,\mathcal{L}_{\text{cercle de la base}} \times r = \mathcal{A}_{\text{cercle de la base}}$ [MC 1]. Per tant, $\mathcal{A}_{\text{lateral cilindre}} = \frac{2\,\mathcal{A}_{\text{cercle de la base}} \times h}{r}$. Però els cercles són com els quadrats dels seus diàmetres [EXII 2]. Per tant, $\frac{\mathcal{A}_{\text{cercle buscat}}}{R^2} = \frac{\mathcal{A}_{\text{cercle de la base}}}{r^2}$. Ara bé, volem que $\mathcal{A}_{\text{cercle buscat}}$ sigui equivalent a $\mathcal{A}_{\text{lateral cilindre}}$. Per substitució o EV 7, $\frac{\mathcal{A}_{\text{cercle buscat}}}{R^2} = \frac{\mathcal{A}_{\text{cercle de la base}}}{r^2} = \frac{2\,\mathcal{A}_{\text{cercle de la base}} \times h}{r}$. O sigui, $(2\,r) \times h = R^2$ [DV 5]. La qüestió és saber si Arquimedes ja coneixia MC 1 quan va escriure ECI. FRAJESE (1974), p. 107, nota 37.

834. Hipòtesi de l'absurd i disjunció de casos.

835. És a dir, $\frac{P}{p} < \frac{S}{B}$, en què S és l'àrea lateral del cilindre [EV 8]. Ens pot ser útil refer el text en un llenguatge més formal.

836. Problema 19 (pàgina 162).

Ara construïm el prisma circumscrit al cilindre damunt el polígon que circumscriu el cercle ○ A que n'és la base, [Exi 12, Ei 2 o Ei 3]
el segment DK igual al perímetre del polígon [P'] que circumscriu el cercle ○ A,
LF igual al segment DK,
i DT i CT iguals a la meitat del segment DC. [Ei 10 i Ei 2 o Ei 3]

Aleshores, el triangle △ KDT equival al polígon [regular ⬠ P'] circumscrit al cercle ○ A,
ja que la base d'aquest triangle és igual al contorn del polígon, i l'altura al radi del cercle ○ A. [Evi 1]

Per tant, el paral·lelogram ▱ $EFLM$[837] equival a l'àrea [lateral] del prisma circumscrit al cilindre [, ja que és el paral·lelogram limitat per la generatriu del cilindre i el perímetre de la base del prisma]. [Evi 1]

Tirem el segment ER igual a EF. [Ei 2 o Ei 3]

El triangle △ FRL equival al paral·lelogram ▱ $EFML$ [Ei 41]
i, per tant, a la superfície [lateral] del prisma. [Nc 1]

Però aquests polígons circumscrits als cercles ○ A i ○ B són semblants.

Conseqüentment, la raó que hi ha entre aquests és igual a la dels quadrats dels radis dels cercles ○ A i ○ B. [Exii 1][838]

Així, la raó del triangle △ KDT i el polígon que circumscriu el cercle ○ B és igual a la dels quadrats de costats TD i G,[839]
ja que els segments TD i G són parts dels radis dels cercles ○ A i ○ B.

Però el quadrat de costat TD és al de costat G com el segment [rectilini] TD al [rectilini] RF,[840]

---

837. En veritat, és un triangle rectangle.

838. Per a la diferència de nomenclatura usada per Euclides i Arquimedes —«πρὸς ἀλλήλους εἴσιν ὡς τὰ ἀπό τῶν διαμέτρων τετράγωνα», «polígons que tenen entre si la raó que hi ha entre els quadrats dels diàmetres», el primer, i «λόγον, ὅν ἡ TΔ πρὸς H δυνάμει», «la raó que tenen "en potència" els radis», el segon—, vegeu Frajese (1974), p. 111, nota 38.

839. El text diu: «que hi ha entre els radis "en potència" (*δυνάμει*)»

840. Parla de raó en potència (*δυνάμει*) i en longitud (*μήκει*). I això ens recorda la nomenclatura del llibre x dels *Elements* d'Euclides. Vegeu el problema 20 (pàgina 162)

ja que el segment G és la mitjana proporcional d'aquests segments perquè ho és dels EF i CD.

[Ev 15 i Ev 19, porisma, i per construcció][841]

I la raó que hi ha entre [els segments rectilinis] TD i RF és igual a la que hi ha entre els triangles $\triangle\, KTD$ i $\triangle\, RFL$.

Per tant, entre el triangle $\triangle\, KTD$ i el polígon circumscrit al cercle $\bigcirc\, B$ hi ha la raó del triangle $\triangle\, KTD$ i el triangle $\triangle\, RFL$.

De tot això en resulta que el triangle $\triangle\, RFL$ equival al polígon ⬠ P circumscrit al cercle $\bigcirc\, B$. [Ev 9]

És a dir, l'àrea lateral del prisma circumscrit al cilindre de base [el cercle] $\bigcirc\, A$ és igual al polígon ⬠ P circumscrit al cercle $\bigcirc\, B$.

Tanmateix, hem suposat que la raó que hi ha entre el polígon ⬠ P circumscrit al cercle $\bigcirc\, B$ i el polígon ⬠ p inscrit és més petita que la de la superfície lateral del cilindre i el cercle $\bigcirc\, B$.

En conseqüència, la que hi ha entre la superfície del prisma circumscrit al cercle $\bigcirc\, B$ i el polígon inscrit en aquest també és més petita que la de l'àrea lateral del cilindre i el cercle $\bigcirc\, B$.

I, *alternando*, obtenim una relació impossible.[842] [Ev 16 i ECi 12]

Per tant, l'àrea del cercle $\bigcirc\, B$ no és més petita que la de la superfície [lateral] del cilindre. ♠

b) Suposem, en segon lloc, que el cercle $\bigcirc\, B$ és més gran que la superfície del cilindre.

---

841. El segment rectilini DT és igual a TC i el RE a EF. I el CD és el doble de TD i el RF de RE. Per tant, DC és a DT com RF a FE. És a dir, la superfície limitada pels segments CD i EF equival a la limitada pels [segments rectilinis] TD i RF[, en el sentit que les seves àrees són iguals]. Però el quadrat de costat G equival a la superfície limitada per CD i EF. En conseqüència, el quadrat de costat G ho fa a la superfície limitada per CD i EF. Així doncs, TD és a G com G a RF. Per tant, el quadrat de costat TD és al de costat G com TD a RF, ja que els tres segments rectilinis són proporcionals entre si i, per tant, el primer és al tercer com la figura construïda sobre el primer a la semblant construïda de manera anàloga sobre el segon [Evi 19].

842. Diu: *ἀδύνατον*. Fixem-nos que el primer terme és > 1 perquè l'àrea lateral del prisma circumscrit és més gran que la del cilindre i, en canvi, el segon terme és < 1 i el polígon inscrit ⬠ p més petit que el cercle $\bigcirc\, B$. En contra del que estableix Dv 7 però adaptada a desigualtat de raons.

Hi circumscrivim un polígon [regular $\pentagon P$] i, després, n'hi inscrivim un altre [$\pentagon p$] de manera que la raó que hi ha entre el polígon circumscrit i l'inscrit és més petita que la del cercle $\bigcirc B$ i l'àrea lateral del cilindre. [ECI 5]

Ara, en el cercle $\bigcirc A$ inscrivim un polígon [$\pentagon p'$] semblant al que hem inscrit en el cercle $\bigcirc B$.

Damunt aquest polígon [$\pentagon p'$], considerem el prisma [que el té com a base i que té l'altura del cilindre]. [EXI 12, EI 2 o EI 3]

I, de manera anàloga a l'anterior, sigui el segment DK igual al perímetre del polígon inscrit en el cercle $\bigcirc A$

i el FL igual [a DK]. [EI 2 o EI 3]

El triangle $\triangle KTD$ és més gran que el polígon inscrit al cercle $\bigcirc A$ [, ja que té una base igual al perímetre d'aquest polígon i una altura més gran que el segment perpendicular que va del centre del cercle a un dels costats del polígon regular].[843]

I el paral·lelogram $EFLM$ és igual a la superfície del prisma inscrit que es compon de paral·lelograms.[844]

Així doncs, el triangle $\triangle RLF$ equival a l'àrea lateral del cilindre.

I, com que els polígons inscrits en els cercles $\bigcirc B$ i $\bigcirc A$ [$\pentagon p$ i $\pentagon p'$] són semblants,

la raó que hi ha entre aquests és igual al quadrat de les raons dels radis [respectius]. [EXII 1]

Ara bé, la raó dels triangles $\triangle KTD$ i $\triangle RLF$ també és la dels quadrats dels radis. [EVI 22][845]

Per tant, els polígons inscrits en els cercles $\bigcirc A$ i $\bigcirc B$ i els dos triangles suara esmentats també tenen aquesta raó. [Nc 1]

Però [l'àrea d]el polígon inscrit en el cercle $\bigcirc A$ [$\pentagon p'$] és més petita que la del triangle $\triangle KTD$.

Consegüentment, [l'àrea d]el polígon inscrit en el cercle $\bigcirc B$ [$\pentagon p$] també ho és més que [la d]el triangle $\triangle FRL$.

I, de retruc, també ho és més que l'àrea lateral del prisma inscrit en el cilindre.

---

843. És més gran que l'«apotegma» del polígon $\pentagon p'$.

844. Que és l'àrea lateral del cilindre.

845. $\frac{\triangle KTD}{\triangle RFL} = \frac{TD}{FR} = \frac{TD^2}{G^2}$. Però TD és el radi del cercle $\bigcirc A$, i G el del $\bigcirc B$.

I això és impossible.[846] ♠

Per tant, l'àrea del cercle $\bigcirc B$ no és pas més gran que l'àrea lateral del cilindre.

Però hem vist que tampoc no és més petita que aquesta.

En definitiva, doncs, són iguals. ♠

B.4.1$d_{1.14}$ [ECI 14] *L'àrea de qualsevol con isòsceles* [*exceptuant-ne la base*] *equival a la d'un cercle de radi la mitjana proporcional entre la generatriu del con i el radi del cercle de la seva base.*[847]

Considerem el con recte de base el cercle $\bigcirc A$.

Siguin [els segments] C, D i E el radi de la base, la generatriu del con i la mitjana proporcional de C i D, respectivament, i $\bigcirc B$ el cercle de radi [el segment] E.

Afirmo que [l'àrea d']aquest cercle $\bigcirc B$ equival a la lateral del con.[848]

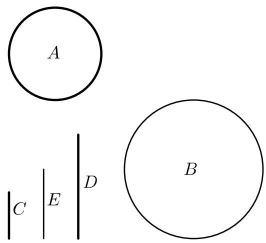


FIGURA ECI 14

[*Demostració.*] Si [l'àrea d]el cercle $\bigcirc B$ no hi equival,
pot donar-se una d'aquestes dues possibilitats:[849]

a) L'àrea del cercle $\bigcirc B$ és més petita que la de la superfície [lateral] del con.

b) L'àrea del cercle $\bigcirc B$ és més gran que la de la superfície [lateral] del con.

846. Per hipòtesi, la raó dels polígons ⬠ P i ⬠ p —circumscrit al cercle $\bigcirc B$ i inscrit en ell, respectivament—, és més petita que la del cercle $\bigcirc B$ i que l'àrea lateral del cilindre. *Alternando*, també EV 16. Però el ⬠ P, circumscrit al cercle $\bigcirc B$, té una àrea més gran que el cercle. Per tant, la figura inscrita en aquest cercle és més gran que l'àrea [lateral] del cilindre i, en conseqüència, que la lateral del prisma.

847. És l'enunciat equivalent a la proposició anterior referent al con. Ara, però, l'àrea lateral del con equival a la d'un cercle de radi R amb $\frac{\ell}{R} = \frac{R}{g}$. Tanmateix, la intuïció d'aquest resultat és molt menys clara, ja que l'àrea lateral del con és la d'un sector circular i, per tant, depèn de l'angle d'aquest sector. Nota 833 (pàgina 300) i problema 21 (pàgina 162).

848. Recordem que el text grec diu: «l'àrea del con, exceptuant-ne la base», i que nosaltres ho hem traduït amb l'expressió «àrea lateral». Ja no ho tornarem a repetir.

849. Disjunció de casos.

a) Suposem que és més petita.

Tenim, doncs, les àrees de dues superfícies [○ B i △ S] diferents: l'àrea [△ S] del con i la del cercle [○ B], i la primera és més gran que la segona.

En el cercle [○B] podem inscriure-hi i [al cercle ○B] circumscriure-hi polígons regulars semblants [⬠ p i ⬠ P], de manera que la raó del polígon circumscrit i l'inscrit és més petita que la de la superfície del con i la del cercle ○ B. [ECI 5]

Considerem que el polígon circumscrit al cercle ○ A és semblant al [⬠ P'] circumscrit al cercle ○ B

i suposem que el polígon circumscrit al cercle ○ A és la base d'una piràmide amb el mateix vèrtex que el con. [P 1]

Els polígons circumscrits als cercles ○ A i ○ B són semblants,

és a dir, són com els quadrats dels segments C i E, [EVI 20]

o com els segments C i D.[850] [EVI 20, porisma]

Però el polígon circumscrit al cercle ○ A és a l'àrea de la superfície de la piràmide circumscrita en el con com el segment C al segment D [ja que el segment C és igual a l'apotegma del polígon circumscrit i D és la generatriu del con.

Per tant, el perímetre del polígon és l'altura d'un rectangle que es compon de dues meitats: l'una equival a l'àrea del polígon circumscrit al cercle i l'altra a l'àrea lateral del con].[851]

I consegüentment, l'àrea del polígon circumscrit al cercle ○ A és a la del circumscrit al cercle ○ B com la del polígon circumscrit al cercle ○ A a la de la piràmide circumscrita al con.

Així doncs, l'àrea de la superfície de la piràmide és igual al polígon circumscrit al cercle ○ B. [EV 9]

I, atès que la raó de les àrees del polígon circumscrit al cercle ○ B i l'inscrit en aquest és més petita que la de l'àrea de la superfície del con i la del cercle ○ B,

---

850. Els polígons circumscrits ⬠ P i ⬠ P' són com els quadrats dels radis, és a dir: $\frac{P}{P'} = \frac{C^2}{E^2}$. Ara bé, E és la mitjana proporcional de C i D, o sigui, $\frac{C}{E} = \frac{E}{D}$. I $\frac{C}{D} = \frac{C^2}{D^2}$ [EVI 20, porisma]. Per tant, $\frac{P}{P'} = \frac{C}{D}$ [Nc 1].

851. Fixem-nos que aquí Arquimedes té ben clar que l'àrea lateral del con és la del triangle rectangle de catets el perímetre de la base del con i la generatriu.

resulta que la raó de l'àrea de la superfície de la piràmide que circumscriu el con i la del polígon inscrit en el cercle ◯ B és també més petita que la raó de l'àrea de la superfície del con i la del cercle ◯ B.[852]

Però això és impossible, perquè l'àrea de la superfície de la piràmide és més gran que la del con, com hem establert abans. [ECI 12]

I, contràriament, el polígon inscrit en el cercle ◯ B és més petit que el cercle ◯ B. ♠

Per tant, [l'àrea d]el cercle ◯ B no és més petita que [la de] la superfície del con.

b) Però tampoc no és més gran.

Perquè, si ho és,[853]
considerem una altra vegada en el cercle ◯ B un polígon inscrit i un de circumscrit semblants,
de manera que la raó de [l'àrea d]el circumscrit i [la de] l'inscrit és més petita que la del cercle ◯ B i la de la superfície del con. [ECI 5]

Ara, en el cercle ◯ A inscrivim un polígon semblant a l'inscrit en el cercle ◯ B.

Considerem que aquest polígon és la base d'una piràmide que té el mateix vèrtex que el con. [P 1]

Com que els polígons inscrits en els cercles ◯ A i ◯ B són semblants,
tenen entre si la mateixa raó que els quadrats dels seus radis respectius. [EXII 1]

Per tant, la raó dels polígons inscrits en el cercles ◯ A i ◯ B és igual a la dels segments C i D.

D'això se segueix que la raó de C i D és més gran que la de [l'àrea d]el polígon inscrit en el cercle ◯ A i la de la superfície de la piràmide inscrita en el con [ja que la que hi ha entre aquests darrers és igual a la dels apotegmes del polígon i de la piràmide inscrits en el con[854]].

---

852. Ja que, *alternando*, la raó que hi ha entre l'àrea de la superfície de la piràmide circumscrita al con i la de la superfície del con és més petita que la que hi ha entre la del polígon inscrit en el cercle ◯ B i la del cercle ◯ B [EV 10].

853. Hipòtesi de l'absurd.

854. Problema 22 (pàgina 162).

En conseqüència, la raó [de les àrees] del polígon inscrit en el cercle ○ A i del polígon inscrit en el cercle ○ B és més gran que la raó de [l'àrea] del primer polígon i de la superfície de la piràmide].

Així doncs, [l'àrea de] la superfície de la piràmide és més gran que la del polígon inscrit en el cercle ○ B.

Però la raó que hi ha entre [les àrees d]el polígon circumscrit al cercle ○ B i el polígon inscrit en aquest és més petita que la que hi ha entre la del cercle ○ B i la de la superfície del con.

Per tant, la raó [de les àrees] del polígon inscrit en el cercle ○ A i de l'inscrit en el cercle ○ B és més gran que la raó [de l'àrea] del primer polígon i [la] de la superfície de la piràmide.

Així doncs, la superfície de la piràmide és més gran que la del polígon inscrit en el cercle ○ B.

Tanmateix, la raó que hi ha entre el polígon circumscrit al cercle ○ B i l'inscrit en aquest és més petita que la que hi ha entre el cercle ○ B i la superfície del con.

Per tant, la raó que hi ha entre el polígon circumscrit al cercle ○ B i la superfície de la piràmide inscrita en el con és també més petita que la que hi ha entre el cercle ○ B i la superfície del con.[855]

I això és impossible,

ja que [l'àrea d]el polígon circumscrit és més gran que [la d]el cercle ○ B [ECI 12]

mentre que [la de] la superfície de la piràmide inscrita en el con és més petita que [la de] la superfície del con. ♠

En definitiva, doncs, [l'àrea d]el cercle ○ B no és tampoc més gran que [la de] la superfície del con.

Així doncs, les dues àrees són iguals. ♠

B.4.1*d*$_{1.15}$ [ECI 15] *La raó entre l'àrea d'un con isòsceles i la seva base és igual a la de la seva generatriu i el radi de la base.*[856]

855. Ja que, *alternando* [EV 16 i DV 7], la raó que hi ha entre [l'àrea d]el polígon circumscrit i el cercle ○ B és més petita que la que hi ha entre [la de] la superfície de la piràmide inscrita i la superfície del con.

856. Aquesta proposició és un porisma de l'anterior.

Considerem un con isòsceles de base el cercle $\bigcirc A$ i els segments B i C iguals al radi del cercle $\bigcirc A$ i a la generatriu del con, respectivament.

Volem demostrar que l'àrea de la superfície lateral $[S]$ del con és a la del cercle $\bigcirc A$ com el segment B al C.

[*Demostració*.] Sigui E la mitjana proporcional de B i C. [Evi 13]

Tirem el cercle $\bigcirc D$ de radi E. [P 3]

Aleshores, [l'àrea d]el cercle $\bigcirc D$ equival a [la d]el con. [ECi 14]

Però hem establert que el cercle $\bigcirc D$ és al $\bigcirc A$ com el segment C al B.[857]

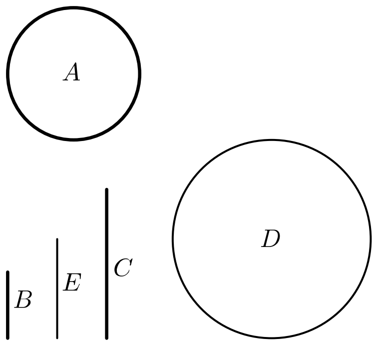


Figura ECi 15

I això posa de manifest que la raó entre l'àrea lateral del con i la del cercle $\bigcirc A$ és la que hi ha [en longitud] entre els segments C —generatriu del con— i B —radi de la base del con. ♠

B.4.1 $\boldsymbol{d_{1.16}}$ [ECi 16] *Tallem un con per un pla paral·lel a la base. L'àrea de la seva superfície limitada pels plans paral·lels equival al cercle que té com a radi del qual és la mitjana proporcional de la generatriu d'aquesta superfície i la suma dels radis dels cercles determinats pels plans paral·lels.*[858]

Considerem un con i el triangle $\triangle ABC$ que passa pel seu eix.

Tallem el con per un pla paral·lel a la base que determina la secció DE.

857. De fet, $\frac{\bigcirc D}{\bigcirc A} = \frac{E^2}{B^2}$ [Exii 2]. Però, per construcció, $\frac{B}{E} = \frac{E}{C}$. Aleshores, $\frac{B}{C} = \frac{B^2}{E^2}$ [Ev 21 i 22]. Per tant, $\frac{\bigcirc A}{\bigcirc D} = \frac{B}{C}$ [Nc 1 o Ev 11]. I, *alternando*, $\frac{\bigcirc D}{\bigcirc A} = \frac{C}{B}$ [Ev 16].

858. L'àrea lateral del tronc de con és $\frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r)\, a = \pi(R + r)\, a$. Però, per tal d'evitar π —que en l'època de la geometria grega no tenia sentit—, Arquimedes dona aquesta àrea com si fos la d'un cercle convenient. De fet, es tracta de fer $S - s = \pi R L - \pi r \ell = \pi \rho$. O sigui, busquem $\rho = (R + r)(L - \ell)$, ja que $\frac{L}{\ell} = \frac{R}{r}$. Ítem a del problema 23 (pàgina 162).

Sigui BG l'eix del con.

Considerem un cercle ○ H de radi la mitjana proporcional de la generatriu AD i la suma de DF i AG.

Afirmo que l'àrea del cercle ○ H equival a l'àrea [lateral] del tronc de con de bases DE i AC.[859]

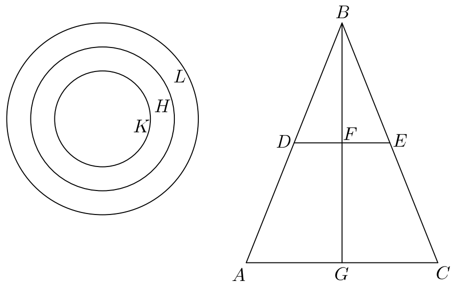


FIGURA ECI 16

[*Demostració*.] Considerem els cercles ○ L i ○ K que tenen uns radis els quadrats dels quals equivalen als rectangles de costats BD i DF, i AB i AG, respectivament.[860] [EVI 13]

O sigui, els cercles ○ L i ○ K són equivalents a les àrees laterals dels cons △ ABC i △ DEF. [ECI 14]

Ara bé el rectangle de costats AB i AG ho és al rectangle que obtenim ajuntant els rectangles de costats [els segments] BD i DF
i [els segments] AD, i DF i AG junts,
ja que el segment DF és paral·lel al DG. [EVI 4][861]

D'altra banda, el rectangle de costats AB i AG equival al quadrat del radi del cercle ○ L,
el de costats BD i DF ho fa al quadrat del radi del cercle ○ K,
i el de costats AD, DF i AG junts, al quadrat del radi del cercle ○ H.

Per tant, el quadrat del radi del cercle ○ L equival als quadrats dels radis dels cercles ○ K i ○ H junts. [NC 1 i 2]

D'això es dedueix que el cercle ○ L equival als cercles ○ K i ○ H junts. [EXII 2 i EV 12 i 9]

---

859. Usem l'expressió «tronc de con de bases DE i AC» per a traduir «la part del con limitada pels plans DE i AC».

860. Arquimedes diu: «La recta del centre del cercle K en potència (δυνάσθω) equival al rectangle BDF.»

861. S'afirma, doncs, la igualtat $\square(AB, AG) = \square(BD, DF) + \square(AD, DF + AG)$. Arquimedes omet la demostració que es basa en EVI 16 i EII 2. L'estableix Eutoci a MUGLER (1972), p. 32-33. Vegeu l'ítem *a* del problema 23 (pàgina 162).

Però $\bigcirc L$ també equival a l'àrea lateral del con ABC, i el cercle $\bigcirc K$ a la del con DBE.

En definitiva, el cercle $\bigcirc H$ és equivalent a l'àrea lateral del tronc de con [$ADEC$] determinat pels plans paral·lels DE i AC. ♠

B.4.1*e* Lemes (*Λῆμμα*)

p. 80-81 Un cop ha establert ECɪ 16, Arquimedes enuncia cinc lemes que, de fet ja es troben en els *Elements* d'Euclides i que usa, per exemple, a ECɪ 17. Són:[862]

B.4.*e*$_1$ [Lema 1]. Els cons que tenen una mateixa altura són entre si com les seves bases.

I els cons que tenen bases equivalents ho són com les seves altures.

B.4.*e*$_2$ [Lema 2]. Si tallem un cilindre per un pla paral·lel a la base, els cilindres resultants són proporcionals als seus eixos.

B.4.*e*$_3$ [Lema 3]. Els cons amb la mateixa base que els cilindres tenen la mateixa raó.

B.4.*e*$_4$ [Lema 4]. Les bases dels cons equivalents són inversament proporcionals a les altures.

I els cons que tenen les bases inversament proporcionals a les altures, equivalents.

B.4.*e*$_5$ [Lema 5]. Els cons que tenen els diàmetres de les bases proporcionals als eixos són entre si com la raó triple dels diàmetres de les bases.[863]

B.4.1*f* La proposició ECɪ 17

p. 81 Reproduïm la proposició ECɪ 17, com un exemple de l'ús del lema 4, el més notable de tots.

---

862. Per als detalls, pàgines 80 i 81.

863. Es correspon amb el resultat establert a Exɪɪ 12 per a cilindres, que Arquimedes no recull. Es basa òbviament en la definició Dxɪ 24. L'expressió «la raó triple» és la mateixa que empra Euclides: «ἐν τριπλασίονι λόγῳ», en clara referència a la definició Dv 10.

B.4.1f_1 [ECI 17] *Considerem dos cons isòsceles. Si la superfície lateral d'un equival a la base de l'altre i el segment perpendicular pel centre de la base a la generatriu* [*del primer con*] *és igual a l'altura del segon, tots dos són equivalents.*

Considerem dos cons $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$.

Suposem que la base del con $\triangle ABC$ equival a la superfície lateral del $\triangle DEF$

i que l'altura AG ho fa al segment HK perpendicular tirat pel centre H a[, per exemple, la generatriu] DE.

Afirmo que els [volums dels] cons són equivalents.

[*Demostració.*] Atès que la base del con $\triangle ABC$ equival a la superfície lateral del $\triangle DEF$,

la base del con $\triangle ABC$ és a la del con $\triangle DEF$ com la superfície lateral de $\triangle DEF$ a la seva base. [EV 7]

Però aquesta superfície lateral és a la seva base com DH a HK. [ECI 15 i EVI 4]

Els segments HK i AG són iguals. [per hipòtesi]

I la base del con $\triangle ABC$ és a la del $\triangle DEF$ com l'altura d'aquest segon a la base del primer. [NC 1 o EV 11, i EV 7]

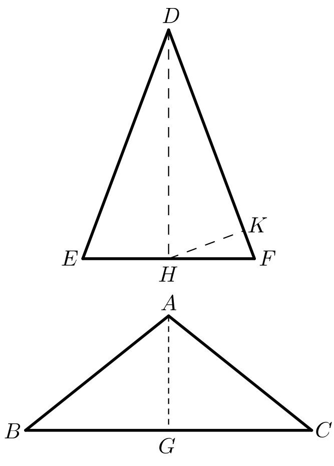


FIGURA ECI 17

Per tant, les bases dels cons $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ són inversament proporcionals.

I, de retruc, tots dos són equivalents. [ECI, lema 4] ♠

B.4.1g Les proposicions ECI 21 i 22

Vegem, ara, les proposicions que ofereixen les igualtats trigonomètriques esmentades en l'ítem *e* de les «aportacions aritmètiques» d'Arquimedes (§ 2.5, pàgina 43). Són elements d'ECI 33 i d'ECI 34, en els quals Arquimedes estableix l'àrea de la super- p. 82-83

fície de l'esfera —«la superfície d'una esfera equival a quatre vegades el seu cercle màxim»— i el seu volum —«[el volum de] l'esfera equival a quatre vegades un con de base el cercle màxim d'aquesta i altura el radi».[864]

B.4.1g_1 [ECi 21] *Inscrivim un polígon regular amb un nombre parell de costats en una esfera. Tirem els segments que uneixen els seus costats*[865] *paral·lelament a un segment que en subtendeix dos.*[866] *La suma de tots els segments d'unió* [*descrits*] *és al diàmetre del cercle com el segment que subtendeix la meitat dels costats menys un al costat del polígon.*[867]

Considerem el cercle $\bigcirc\ ADA'D'$.

Hi inscrivim el polígon regular ⬠ $ABCDEFA'F'E'D'C'B'$. Tirem els segments BB', CC', DD', EE' i FF' [P 1] que, evidentment, són paral·lels al segment que subtendeix dos costats [consecutius] seus.[868]

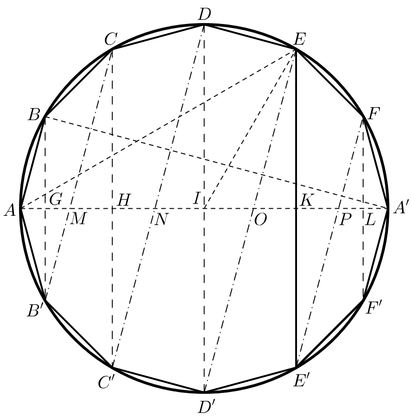


Figura ECi 21 i ECi 22

Afirmo que la suma de tots els segments indicats és al diàmetre AA' del cercle com el segment $A'B$ a AB.[869]

[*Demostració.*] Tirem els segments CB', DC', ED' i FE'. [P 1]

---

864. Vegeu les dependències de les proposicions d'EC a Frajese (1974), p. 131-159.

865. De fet, hi unim els vèrtexs corresponents —és a dir, simètrics— respecte d'un diàmetre del cercle.

866. Hauria de dir «dos costats consecutius». Això força el fet que hem indicat en la nota anterior.

867. No és necessàriament construïble amb regle i compàs.

868. Atès que els arcs $\widehat{BC}$ i $\widehat{B'C'}$ són iguals, també ho són els angles $\widehat{BB'C}$ i $\widehat{B'CC'}$ [Eiii 27]. Per tant, BB' i CC' són segments paral·lels [Ei 29 i Ei 32].

869. Volem insistir en l'elegància i la simplicitat amb les quals Arquimedes estableix la igualtat trigonomètrica que hem descrit en la pàgina 43.

Veiem que CB' és paral·lel a AB, DC' a CB', ED' a DC' i FE' a ED'. [EI 28][870]

Aleshores, BG és a AG com $B'G$ a GM. [EVI 4]

I també $B'G$ és a GM com CH a HM, CH a HM com $C'H$ a HN, $C'H$ a HN com DI a IN, DI a IN com $D'I$ a IO,
$D'I$ a IO com EK a KO, EK a KO com KE' a KP,
KE' a KP com FL a LP i FL a LP com LF' a LA'.[871]

I, per tant, BG és a AG com la suma de BB', CC', DD', EE' i FF' al diàmetre AA'. [EV 12]

Però BG és a GA com $A'B$ a BA. [EVI 4]

En conseqüència, $A'B$ és a BA com la suma de BB', CC', DD', EE' i FF' al diàmetre AA'. [EV 11] ♠

B.4.1g_2 [ECI 22] *En un segment circular inscrivim un polígon amb un nombre parell de costats iguals sense comptar la base. Unim els vèrtexs* [*oposats*] *del polígon amb segments paral·lels a aquesta. Aquests segments més la meitat de la base del segment circular és a l'altura del segment com el segment que uneix un extrem del diàmetre* [*del cercle*] *i l'extrem del costat del polígon* [*que té l'altre extrem en el diàmetre*] *al costat del polígon.*

En el cercle $\bigcirc ADA'D'$ tirem una corda EE' [figura ECI 2i i ECI 22 (pàgina 312)]
i al seu damunt el polígon ⬠ $ABCDEE'D'C'B'A'$ amb un nombre parell de costats inscrit en el cercle $\bigcirc ABC$, amb un nombre parell de costats iguals, si no tenim en compte la base EE'.[872]

Unim BB', CC' i DD'. [P 1]

Tots són paral·lels a la base EE' del segment circular. [EI 28]

Afirmo que els segments BB', CC', DD' i EK junts són a AA' com $A'B$ a $B'A$.[873]

870. Vegeu les explicacions de la nota 868.

871. En símbols, $\frac{BG}{AG} = \frac{B'G}{GM}$, $\frac{B'G}{GM} = \frac{CH}{MH}$, $\frac{CH}{MH} = \frac{C'H}{HN}$, $\frac{C'H}{HN} = \frac{DI}{IN}$, $\frac{DI}{IN} = \frac{D'I}{IO}$, $\frac{D'I}{IO} = \frac{EK}{KO}$, $\frac{EK}{KO} = \frac{KE'}{KP}$, $\frac{KE'}{KP} = \frac{FL}{PL}$ i $\frac{FL}{PL} = \frac{LF'}{LA'}$.

872. Observem que, segons quin sigui el nombre parell de costats que agafem, el polígon pot no ser construïble amb regle i compàs.

873. El text grec diu: «Λέγω ὅτι ἐστιν ὡς αἱ BB', CC', DD', EK πρὸς AA', αὕτος ἡ $A'B$ πρὸς $B'A$.» O sigui, ras i curt, $\frac{FG+EH+AO}{BD} = \frac{DF}{FB}$.

Ara, seguint les petjades de la proposició anterior, [CI 21]
si tirem els segments $B'C, C'D$ i $D'E$, [P 1]
que són paral·lels al AB, [EI 28]
tenim que GB és GA com GB' a GM, com CH a MH, com HC' a NH, com DI a IN, com ID' a IO i com KE a OK. [EVI 4]

Per tant, els segments $BG, GB', CH, HC', DI, ID'$ i KE junts són als GA, GM, MH, HN, IN, IO i OK junts com GB a GA. [EI 12]

O sigui, BB', CC', DD' i EK junts són a AK com GB a GA.

Però GB és a GA com $A'B$ a AB. [EIII 16, EIII 31 EI 32, P 4 i EVI 4]

En definitiva, $A'B$ és a BA com BB', CC', DD' i EK junts a AK.
[EV 11 o NC 1] ♠

B.4.1*h* Les proposicions ECI 33 i 34 i el porisma d'ECI 34

p. 84-86 Malgrat que les demostracions d'ECI 33 i ECI 34 resten incompletes perquè necessiten «elements» —proposicions anteriors— que nosaltres, en aquesta presentació, ometem, l'interès del resultat aconsella recollir-les aquí.[874] A més, volem explicitar el porisma d'ECI 34, en el qual Arquimedes enuncia el resultat que, segons Ciceró, estava esculpit en la seva tomba.

B.4.1h_1 [ECI 33] *La superfície d'una esfera equival a quatre vegades la del seu cercle màxim.*

Considerem una esfera,
i sigui $\bigcirc A$ un cercle equivalent a quatre vegades el seu cercle màxim.
Afirmo que $\bigcirc A$ equival a la superfície de l'esfera.
[*Demostració.*] Si no és així,[875]
a) és més gran, o *b*) és més petita.[876]

a) Suposem que la superfície de l'esfera és més gran que $\bigcirc A$.

874. Vegeu les raons exposades (pàgina 84). El lector interessat a completar-les pot recórrer a MASIÀ (2010).
875. Hipòtesi de l'absurd.
876. Disjunció de casos.

Podem considerar dos segments diferents B i C de manera que la raó que hi ha entre el gran i el petit és més petita que la de la superfície de l'esfera i el cercle $\bigcirc A$. [CI 2]

Prenem la seva mitjana proporcional D. [EVI 13]

Tallem l'esfera pel centre mitjançant un pla.

Obtenim el cercle $\bigcirc EFGH$.

Considerem un polígon [regular] inscrit en aquest cercle i un de circumscrit semblant a l'inscrit, [EIII 17 i EVI 2]
de manera que la raó que hi ha entre el costat del polígon circumscrit i el de l'inscrit és més petita que la de B i D. [CI 3]

De retruc, la raó que hi ha entre la superfície de la figura circumscrita a l'esfera i la inscrita és més petita que la de la superfície de l'esfera i la del cercle $\bigcirc A$. [CI 32][877]

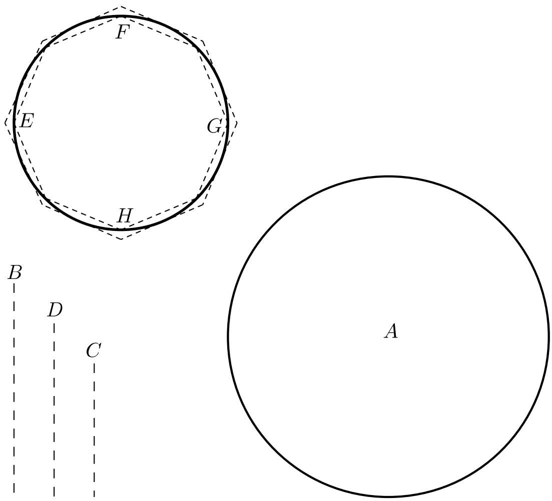


FIGURA ECI 33

Però això és impossible [DV 7], ja que la superfície de la figura circumscrita és més gran que la superfície de l'esfera, [CI 28]
i, en canvi, la de la figura inscrita, més petita. [CI 25]

Per tant, la superfície de l'esfera no és més gran. ♠

b) Suposem, doncs, que és més petita.

També en aquest cas, com abans, podem trobar dos segments B i C, de manera que la raó entre aquests és més petita que la del cercle $\bigcirc A$ i l'esfera. [CI 2]

877. Hem omès aquest «element».

Prenem la seva mitjana proporcional D. [EVI 13]

Tallem l'esfera pel centre mitjançant un pla.

Obtenim el cercle $\bigcirc EFGH$.

Considerem, com hem fet abans, un polígon [regular] inscrit en aquest cercle i un de circumscrit semblant a l'inscrit. [EIII 17 i EVI 2]

La raó que hi ha entre el costat del polígon circumscrit i el de l'inscrit és més petita que la de B i D. [CI 3]

Per tant, la que hi ha entre la superfície de la figura circumscrita i la de la inscrita és més petita que la del cercle $\bigcirc A$ i l'esfera.

I això és impossible, [DV 7]

perquè la superfície de la figura circumscrita és més gran que la de $\bigcirc A$ [CI 30]

i la de la inscrita més petita que la de l'esfera. [CI 23]

En conseqüència, la superfície de l'esfera no és més petita que la del cercle $\bigcirc A$. ♠

I, com que hem demostrat que tampoc no és més gran,
resulta que la superfície de l'esfera equival a la del cercle $\bigcirc A$. ♠

B.4.1h_2 [ECI 34] [*El volum d'*]*una esfera equival a quatre vegades el d'un con amb el cercle de la base igual al cercle màxim d'aquesta i altura el seu radi.*

Considerem una esfera i un cercle màxim $\bigcirc(ABCD)$.[878]

Si el volum de l'esfera no equival a quatre vegades el del con dit:[879]

a) Suposem que l'esfera és més gran que el con.

Sigui △O el con de base equivalent a quatre vegades el cercle $\bigcirc(ABCD)$ i altura el radi de l'esfera.[880]

Per tant, suposem que l'esfera és més gran que el △O.

[per substitució]

Disposem, doncs, de dues magnituds diferents.

878. S'entén que un *cercle màxim* d'una esfera és el cercle que determina, en la superfície de l'esfera, un pla que passa pel seu centre. Cap geòmetra grec no el defineix.

879. Disjunció de casos.

880. De fet, fem giravoltar un triangle rectangle que té un catet igual al diàmetre de l'esfera i l'altre igual al radi sobre aquest catet [DXI 18].

Parem esment en dos segments diferents K i G, de manera que la raó del primer i el segon és més petita que la de l'esfera i el con $\triangle O$. [ECI 2]

I en dos segments I i H, de manera que K excedeix I com aquest excedeix H i H excedeix G.[881]

En el cercle $\bigcirc\,(ABCD)$ inscrivim un polígon [regular] amb un nombre de costats múltiple de quatre[882]
i n'hi circumscrivim un altre semblant a l'inscrit. [EIII 17 i EVI 2]

I ho fem, com en la proposició anterior, de manera que la raó que hi ha entre el costat del polígon circumscrit i el de l'inscrit és més petita que la de K i I. [ECI 3]

Considerem els diàmetres perpendiculars AC i BD. [P 1][883]

I, al voltant del diàmetre AC, girem el pla que conté els polígons.

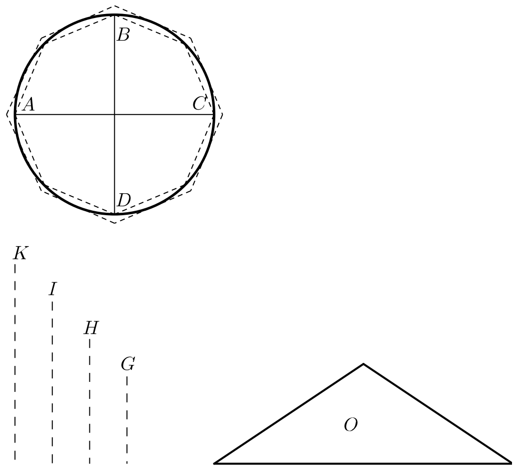


FIGURA ECI 34

Obtenim dues figures sòlides, l'una inscrita i l'altra circumscrita.[884]

La raó entre la figura inscrita i la circumscrita és la raó triple dels costats dels polígons regulars circumscrit i inscrit en el cercle $\bigcirc\,(ABCD)$. [ECI 32]

881. Es tracta de determinar dues mitjanes proporcionals entre K i G. Però això no es pot fer amb regle i compàs.

882. Podem agafar un polígon regular de 2^n costats, amb $n \geq 2$, que és construïble amb regle i compàs.

883. Considerem un diàmetre qualsevol que uneixi dos vèrtexs. I ajuntem els dos que es troben en la quarta part dels anteriors.

884. Arribem a una figura feta de cons i troncs de con, seguint la filosofia de les definicions DXI 18 i DXI 21.

I la raó dels costats de l'un i de l'altre és menor que la dels segments K i I.

Per tant, la raó de la figura circumscrita i la inscrita és més petita que la raó triple de K i I. [per substitució]

Però la raó que hi ha entre K i G és més gran que aquesta raó triple.[885]

En conseqüència, la que hi ha entre la figura circumscrita i la inscrita és molt més petita que la de K i G.

I, com que la que hi ha entre K i G és més petita que la de l'esfera i el con △O, [per hipòtesi]
alternando, obtenim quelcom que és impossible, [EV 16 i DV 7]
ja que la figura circumscrita és més gran que l'esfera,
mentre que la inscrita és més petita que aquesta. [ECI 27][886]

Per tant, l'esfera no és més gran que quatre vegades el con descrit.

♠

b) Suposem que l'esfera és més petita que el con.

Considerem dos segments K i G de manera que K és més gran que G i la raó entre aquests, més petita que la del con △O i l'esfera. [ECI 2]

I H i I com abans.

Parem esment també en un polígon inscrit en el cercle ○ $(ABCD)$ i en un de circumscrit de manera que la raó que hi ha entre el costat del circumscrit i el de l'inscrit és més petita que la de K i I. [ECI 3]

I repetim les altres construccions sòlides, les circumscrites i les inscrites, com ho hem fet abans.

Resulta que la figura circumscrita és a la inscrita la raó triple de la que hi ha entre el costat circumscrit al cercle ○ $(ABCD)$ i el costat inscrit en aquest. [ECI 32]

Però la raó entre aquests costats és més petita que la de K i I.

Per tant, la que hi ha entre la figura circumscrita i la inscrita és més petita que la triple de la que hi ha entre K i I.

A més, la que hi ha entre el segment K i el G és més gran que la triple de K i I.

885. Problema 24 (pàgina 163).
886. Nota 877 (pàgina 315).

En conseqüència, la que hi ha entre la figura circumscrita i la inscrita és més petita que la de K i G.

Però la raó que hi ha entre K i G també ho és més que la del con △O i l'esfera.

I això és impossible, [Dv 7]
ja que la figura inscrita és més petita que l'esfera
i la circumscrita, més gran que △O. [Ei 31, porisma][887]

Així doncs, l'esfera no és més petita que quatre vegades el con de base el cercle ○ $(ABCD)$ i altura el radi de l'esfera. ♠

I hem vist que tampoc no és més gran.

En definitiva, el volum de l'esfera equival a quatre vegades el del con. ♠

B.4.1h_3 [Porisma.] *Un cop establertes aquestes proposicions, és evident que el* [*volum d'un*] *cilindre de base el cercle màxim d'una esfera i altura el seu diàmetre és una vegada i mitja* [*el de*] *l'esfera i que la seva superfície, compreses les bases, és una vegada i mitja la d'aquesta.*

De fet, el [*volum d*]*el cilindre esmentat és sis vegades el* [*d*]*el con que té la mateixa base i d'altura el radi. A més, hem demostrat que l'esfera és quatre vegades el con descrit* [ECi 34]. *Per tant, és clar que* [*el volum d*]*el cilindre és una vegada i mitja* [*el de*] *l'esfera.*

De bell nou, atès que hem vist que la superfície [*lateral*] *del cilindre*[888] *equival a* [*l'àrea d*]*el cercle el radi del qual és la mitjana proporcional de la generatriu* [*del cilindre*] *i el diàmetre de la base* [ECi 13], *la generatriu del cilindre que circumscriu l'esfera és igual al diàmetre de la base. I el cercle que té el mateix radi que el cilindre és quatre vegades el* [*cercle*] *d'aquesta base, o sigui, el cercle màxim de l'esfera. Per tant, la superfície* [*lateral*] *del cilindre és quatre vegades la del cercle màxim i, de retruc, sis vegades la superfície total del cilindre. Però la superfície de l'esfera és quatre vegades la del cercle màxim* [ECi 33]. *Per tant, finalment, la superfície total del cilindre és una vegada i mitja la de l'esfera.* ♠[889]

887. Nota 877 (pàgina 315).
888. En concret, la superfície del cilindre sense les bases.
889. Aquí Arquimedes explicita el resultat que, segons Ciceró, hi havia a la tomba del geòmetra de Siracusa.

B.4.1*i* Les proposicions ECɪ 42, 43 i 44

p. 84 Acabarem aquest recull de proposicions del llibre primer d'EC amb les tres darreres, que estableixen la superfície del segment esfèric —diferenciant clarament els casos en els quals és més petit que mitja esfera i més gran [ECɪ 42 i ECɪ 43]— i el seu volum [ECɪ 44].[890]

B.4.1*i*₁ [ECɪ 42] *La superfície d'un segment esfèric més petit que mitja esfera equival a la d'un cercle de radi igual al* [*segment rectilini*] *que uneix el vèrtex amb* [*un punt de*] *la circumferència del cercle de la seva base.*[891]

En una esfera de cercle màxim ○ ABC, hi considerem un segment [esfèric] més petit que mitja esfera.

Suposem que la seva base, que es troba en un pla perpendicular al del cercle ○ ABC, és el cercle de diàmetre AC.

Prenem un cercle ○ F de radi igual al segment AB.

Volem establir que la superfície del segment esfèric ⊖ ABC equival a la del cercle ○ F.

[*Demostració.*] Suposem que la superfície d'aquest segment no és igual al cercle ○ F.[892] O bé *a*) és més gran o *b*) és més petit.[893]

a) En primer lloc, imaginem que és més gran [que ○ F].

Tirem els segments que van del centre D [de l'esfera que conté el segment esfèric] als punts A i C, [P 1]
i els prolonguem. [P 2]

Com que tenim dues quantitats diferents —la superfície del segment [esfèric] i el cercle ○ F—,
en el sector [circular] inscrivim ◁ ABC, un polígon regular,
i n'hi circumscrivim un de semblant,
de manera que la raó del polígon circumscrit i l'inscrit

890. Com veurem, les demostracions depenen d'altres proposicions que no oferim. Per completar-les, vegeu Masià (2010).

891. Aquesta proposició és una generalització d'ECɪ 33, que n'esdevé un porisma.

892. Hipòtesi de l'absurd.

893. Disjunció de casos.

és més petita que la del segment [esfèric] i el cercle ◯ F. [ECI 6]

Ara fem giravoltar el cercle,[894] [com abans].[895]

Obtenim dues figures limitades per superfícies còniques, l'una circumscrita i l'altra inscrita.

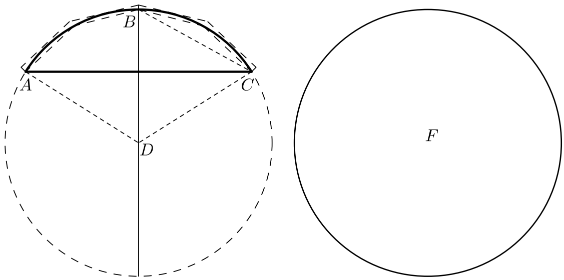


FIGURA ECI 42

A més, la superfície de la figura circumscrita és a la superfície de la inscrita com el polígon circumscrit a l'inscrit, ja que cadascuna d'aquestes raons és la raó doble de la que hi ha entre el costat del polígon circumscrit i el de l'inscrit. [ECI 41][896]

Però aquesta raó és més petita que la que hi ha entre la superfície més el segment [esfèric] i el cercle ◯ F. [per hipòtesi]

Ara bé, la superfície de la figura circumscrita és més gran que la superfície del segment esfèric. [ECI 39]

Per tant, la superfície de la figura inscrita és més gran que el cercle ◯ F.

I això és impossible, ja que hem vist que la superfície d'aquesta figura és més petita que la del cercle [◯ F]. [ECI 37] ♠

b) En segon lloc, imaginem que la superfície del segment [esfèric] és més petita que el cercle ◯ F.

Hi circumscrivim i inscrivim polígons semblants,

de manera que la raó entre el polígon circumscrit i l'inscrit és més petita que la del cercle ◯ F i la superfície del segment [esfèric]. [ECI 6][897]

894. Vegeu les definicions 14, 18 i 21 del llibre EXI d'Euclides relatives al cilindre, el con i l'esfera, respectivament. PLA (2021), p. 423-424.

895. En clara referència a les proposicions precedents que hem omès.

896. De fet, és un porisma d'EVI 20.

897. Per hipòtesi, la raó que hi ha entre el polígon circumscrit i l'inscrit és més petita que la del cercle ◯ F i el segment [esfèric]. Però la del polígon circumscrit i l'inscrit és igual a la de la superfície de la figura circumscrita i la inscrita. *Alternando* [EVI 16], la raó que hi ha entre la superfície de la figura circumscrita i el cercle ◯ F és més petita que la que hi ha entre la superfície de la figura inscrita i la del segment [esfèric] [ECI 36]. Però

Però hem establert que no és més gran.

En definitiva, són iguals. ♠

B.4.1*i*₂ [ECɪ 43] *La superfície d'un segment esfèric més gran que mitja esfera equival a la d'un cercle de radi igual* [*al segment rectilini*] *que uneix el vèrtex amb* [*un punt de*] *la circumferència del cercle que és la base del segment esfèric.*[898]

Considerem una esfera de cercle màxim ○ ABC.

La tallem amb un pla perpendicular [al cercle màxim] que passa pel segment AB.

Suposem que el segment [esfèric] ⊖ ABD és més petit que mitja esfera. [Dɪɪɪ 6][899]

Unim els punts B i C[, pels quals el diàmetre talla el cercle màxim,] amb A. [P 1]

Obtenim els segments BA i AC.

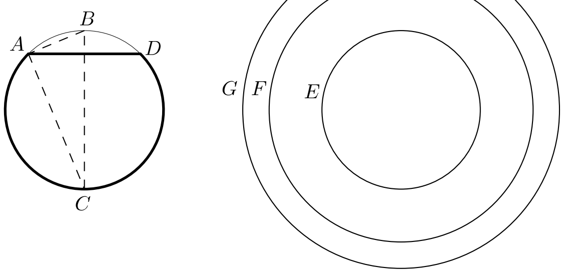


Figura ECɪ 43

Considerem els cercles ○ E, ○ F i ○ G de radis AB, AC i BC, respectivament. [P 3]

Tenim que el cercle ○ G és la suma dels cercles ○ E i ○ F.[900]

Ara bé, aquest cercle equival a la superfície de l'esfera [ECɪ 33] i el ○ F a la del segment [esfèric] ⊖ ABD. [ECɪ 42]

---

la superfície de la figura circumscrita és més gran que la del cercle ○ F [ECɪ 40]. I això és impossible.

898. Amb aquest porisma d'ECɪ 42, Arquimedes proporciona la superfície de qualsevol segment esfèric, ja que el cas en el qual el segment esfèric és igual a mitja circumferència és un porisma immediat d'ECɪ 33. Tanmateix, tant ECɪ 32 com ECɪ 33 serveixen per a establir la superfície de mitja esfera. Hi hauria hagut d'afegir «més gran o igual» o «més petit o igual».

899. Es genera fent giravoltar un segment de cercle, com en el cas de l'esfera Dxɪ 14.

900. Només cal que apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle △ ABC [Eɪɪɪ 31], i Exɪɪ 2 i Evɪ 12.

Per tant, la superfície del segment [esfèric] ⌓ ACD, que és més gran que mitja esfera, ho fa al cercle ○ F[, que és la diferència entre els cercles ○ G i ○ E.] ♠

B.4.1*i*₃ [ECɪ 44] [*El volum d'*]*un sector esfèric és igual a un con de base equivalent a la superfície d'aquest segment i altura el radi de l'esfera.*[901]

Considerem una esfera.

Sigui ○ ABC un dels seus cercles màxims.

En determinem el centre C. [Eɪɪɪ 1]

I tenim en compte un con de base equivalent a la superfície descrita per l'arc $\widehat{ABC}$ i altura un segment igual a BC.

Volem demostrar que [el volum d]el sector [esfèric] ACD equival al con que hem descrit.

[*Demostració*.] Si no ho és, podem fer dos camins:[902]

a)[903] Suposar que el sector és més gran que el con descrit i dir-ne H.

Per això, disposem de dues magnituds diferents, el sector esfèric i el con H.

Determinem dos segments D i E,[904] sent D el més gran,
de manera que la raó entre D i E és més petita que la del sector esfèric i el con. [ECɪ 2]

Considerem dos segments F i G
que fan que l'excés de D sobre F és igual al de F sobre G
i al de G sobre E.[905] [ECɪ 2]

---

901. ECɪ 34 completa ECɪ 44, en la qual Arquimedes determina el volum de l'esfera. Com ja havia fet a ECɪ 33 i ECɪ 34, recorre a ECɪ 2, que permet l'aproximació indefinida d'una magnitud a una altra. A més, aquesta proposició, que es basa en el postulat que avui anomenem *postulat d'Arquimedes*, és l'«element» fonamental d'ECɪ. Frajese (1974), nota 101, p. 175.

902. Hipòtesi de l'absurd.

903. Disjunció de casos.

904. El text grec usa la lletra Δ per a dos objectes: el punt de la base de la secció del segment circular del sector pla i aquest segment. Ho hem conservat perquè no crea confusió,

905. És un porisma immediat de P 2, Eɪ 2 i Eɪ 3. De fet, cerca dos segments intermedis entre E i D que estiguin en progressió aritmètica.

Al voltant del sector pla,[906]
hi circumscrivim un polígon regular amb un nombre parell d'angles i n'hi inscrivim un semblant a l'anterior,[907]
de manera que la raó entre el costat del polígon circumscrit i el de l'inscrit és més petita que la que hi ha entre D i F. [ECi 4]

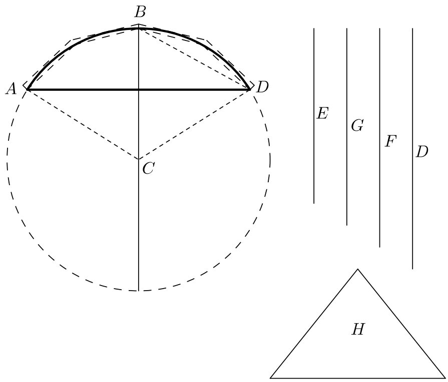


Figura ECi 44

Ara, com ja hem vist abans, si fem girar el cercle, generem dues figures limitades per superfícies còniques.

Aleshores, la raó entre la figura circumscrita més el con de vèrtex el punt C i la inscrita més el con és la raó triplicada de la del costat del polígon circumscrit i el costat de l'inscrit. [ECi 41]

Però la raó entre el costat del polígon circumscrit més el costat de l'inscrit és més petita que la que hi ha entre D i F.

En conseqüència, la que hi ha entre la figura circumscrita [més el con] i la inscrita [més el con] és més petita que el triple de la de D i F.[908]

Tanmateix, la raó de D i E és més gran que la de D i F.

Per tant, la que hi ha entre la figura sòlida circumscrita al sector [esfèric] i la inscrita en aquest és més petita que la de D i E.

[per transitivitat]

906. És la primera vegada que apareix l'expressió *sector pla*, que és la figura plana que determina el sector esfèric quan la tallem amb un pla. Masià (2010), nota 299, p. 158.

907. Hem de dividir l'arc del sector pla en un nombre parell de parts perquè l'angle complementari també n'admeti un nombre parell. Això presenta dues dificultats: la incommensurabilitat i la impossibilitat de fer-ho amb regle i compàs. Nota 778 (pàgina 281).

908. Donades quatre magnituds en progressió aritmètica decreixent $a, a-d, a-2\,d, a-3\,d$, $\frac{a}{a-3\,d} > \frac{a^3}{(a-d)^3}$. Problema 24 (pàgina 163).

Però la que hi ha entre D i E ho és més que la del sector sòlid [ACD] i el con H.

Així doncs, la raó entre el sector sòlid i el con H és més gran que la de la figura circumscrita al sector [esfèric] i la inscrita.

[per transitivitat]

Alternando, la figura sòlida circumscrita també ho és més que el sector, ja que la inscrita en aquest és més gran que el con H. I això no pot ser. [EV 16]

Amb tot, hem demostrat abans, en els teoremes precedents, que aquesta figura és més petita que el con,
és a dir, més que un con amb la base equivalent a un cercle de radi igual al segment que uneix el vèrtex i un punt de la circumferència del cercle de la base [del segment esfèric] i altura el radi de l'esfera.

[ECI 38, porisma]

Per tant, el sector sòlid no és més gran que el con H. ♠

b) Suposar que el con H és més gran que el sòlid [esfèric].

Com hem vist abans, [considerem] els segments D i E,
sent D el major, que tenen una raó més gran que la del con i el sector esfèric. [ECI 2]

Anàlogament, considerem els segments F i G amb unes diferències com les descrites abans.

Finalment, imaginem un polígon regular, amb un nombre parell de costats, circumscrit al sector pla,
de manera que la raó del seu costat i el del polígon inscrit semblant és més petita que la de D i F. [ECI 4]

Aleshores, seguint les petges de la demostració precedent,
establim que la raó que hi ha entre la figura circumscrita més el sector [esfèric] i la inscrita és més petita que la de D i E,
i més que la del con i el sector [esfèric].

Però aquest darrer és més gran que la figura inscrita.

En definitiva, doncs, el con H és més gran que la figura circumscrita.

I això és impossible. [ECI 40, porisma II][909] ♠

Per tant, [el volum d]el sector [esfèric] equival al [del] con. ♠

B.4.2 ECII: *Sobre l'esfera i el cilindre*, llibre II, fragments

p. 87-90 Vegem, ara, alguns fragments del llibre segon.

B.4.2*a* La introducció d'ECII

[Introducció] Arquimedes a Dositeu: Salut![910]

En ocasions precedents m'heu exhortat que escrivís les demostracions dels problemes que havia enviat a Conó.

Resulta que la majoria es resolen mitjançant els teoremes següents que ja t'he enviat:[911]

[*a*)] «La superfície d'una esfera equival a quatre vegades la del [seu] cercle màxim» [ECI 33].

[*b*)] «La superfície d'un segment esfèric equival a la del cercle de radi igual al segment que uneix el vèrtex amb un punt de la circumferència del cercle de la base [ECI 42 i 43].

[*c*)] «El [volum d'un] cilindre que té com a base el cercle màxim d'una esfera i altura el [seu] diàmetre equival a una vegada i mitja [el volum de] l'esfera, i la superfície total [del cilindre] és una vegada i mitja la superfície d'aquesta» [ECI 34, porisma].

[*d*)] «Un sector esfèric[912] equival a un con que té com a base part de la superfície de l'esfera limitada per aquest i com a altura el radi d'aquesta» [ECI 42 i 44].

---

909. Estableix que «un con, com el descrit, és més petit que la figura circumscrita al sector».

910. El llibre ECII és una continuació clara d'ECI, ja que les demostracions que conté tenen com a «elements» alguns dels seus resultats.

911. Tots els teoremes i problemes fan referència a àrees i volums de certs sòlids —esferes, segments d'esfera, cons i cilindres— en relació amb l'àrea i el volum de l'esfera.

912. Arquimedes diu: «sòlid».

Ara t'envio els teoremes i problemes que es poden resoldre usant aquests que t'acabo d'esmentar.

Miraré d'enviar-te'n d'altres, de les espirals i els conoides, que es resolen amb unes teories diferents.

El primer d'aquests problemes és el següent:[913]

Trobeu una superfície plana amb la mateixa àrea que una esfera.

Això ja s'ha establert en el teorema esmentat, ja que quatre vegades el cercle màxim de l'esfera és una superfície plana equivalent a la seva.[914]

B.4.2*b* Cinc proposicions i un porisma d'ECII

Com a cloenda de la presentació de les aportacions d'Arquimedes a EC, a continuació veurem les quatre primeres proposicions: ECII 1, 2, 3, 4, i les dues darreres, ECII 8 i ECII 9. p. 87-88

B.4.2b_1 [ECII 1] [*I el segon problema és aquest:*] *donat un con o un cilindre, trobeu una esfera igual a l'un o a l'altre.*[915]

---

913. A ECI 33, resol el problema d'«aplanar» l'esfera, és a dir, de trobar una superfície plana amb la mateixa àrea que aquesta. Aquest resultat de factura arquimediana i d'una gran profunditat metodològica i conceptual és el que el siracusà vol posar en relleu ara.

914. Fixem-nos que, salvant les diferències, aquest problema té una certa analogia amb la «quadratura del cercle». Tots dos fan referència a figures limitades per figures corbades i demanen figures equivalents més simples: en el cas pla, un quadrat equivalent a l'àrea d'un cercle, i, en el cas sòlid, una cercle equivalent a l'àrea d'una esfera. Fixem-nos que en el cas sòlid no distingeix entre l'esfera —com a cos sòlid— i la seva superfície o vora. I que, en el cas pla, sí que ho fa, parla de «cercle» i de «circumferència».

915. D'entrada, Arquimedes en fa l'«anàlisi» i, seguidament, la «síntesi». PLA (2020), p. 321-323, i PLA (2021), § 3.2.1, p. 77. Aquest enunciat resulta d'una gran utilitat perquè palesa la manera com el siracusà s'apropa, amb l'anàlisi, a les solucions dels problemes i els teoremes, un fet que no trobem en altres indrets.

La qüestió, però, és de geometria superior, en el sentit que no és euclidiana —platònica, si ho preferiu. És a dir, no és possible resoldre-la amb regle i compàs, ja que es basa en la determinació de dues mitjanes proporcionals [PLA (2016*b*), § 3,4,7, ítem *c*, p. 242-244 i 324-325]. Fixem-nos que, donat un con o un cilindre, és a dir, donats el radi de la base r i l'altura

Considerem un con [o un cilindre] A [A] i una esfera B equivalent a A.

[*Anàlisi*] Sigui CFD el cilindre equivalent a una vegada i mitja el con [o el cilindre] A.[916]

Prenem un cilindre [GLH] equivalent a una vegada i mitja l'esfera,
de base un cercle de diàmetre el de l'esfera GH
i eix igual a aquest diàmetre. [ECI 34, porisma]

Aleshores, el cilindre E[917] és equivalent[918] al K. [EXII 15]

Per tant, el cercle $\bigcirc E$ és al $\bigcirc K$[919]
—és a dir, el quadrat de [costat] CD al de [costat] GH— [EXII 2]
com KL a EF. [EXII 15 i ECI, lemes 3 i 4]

Però els segments KL i GH són iguals.[920]

En conseqüència, el quadrat de [costat] CD és al de [costat] GH com GH a EF.

Si ara fem un rectangle de costats CD i MN, equivalent al quadrat de costat GH,

---

h, demana el radi R de l'esfera, de manera que $\pi R^3 = \mathcal{V}_{\text{con o cilindre}}$, en què $\mathcal{V}_{\text{con o cilindre}}$ és un volum donat. En llenguatge algèbric, el problema ens proposa que resolguem una cúbica. Tanmateix, Arquimedes no mostra cap preocupació pel fet que no sigui resoluble amb regle i compàs. El dona per resolt i l'aplica.

Eutoci, tanmateix, en fa una exposició acurada. Vegeu-ne l'extens estudi a MUGLER (1972), p. 45-75, o a ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 357-388. Nosaltres la recollirem en parlar d'Eutoci a *Grècia IV*.

916. Eutoci exposa la manera com podem construir un cilindre que sigui una vegada i mitja un altre cilindre o un con. Hi distingeix tres casos [MUGLER (1972), p. 41-44]. Vegem el primer: si el sòlid A és un cilindre [un con], en farem un altre amb la mateixa base, i altura una vegada i mitja la del cilindre[, i la meitat de la del con, respectivament]. En aquest darrer cas, és tres meitats del con donat perquè és la meitat del cilindre amb la mateixa base i altura que el con, o sigui, del cilindre que és tres vegades el con. Problema 25 (pàgina 163).

917. Arquimedes usa el centre de la base del cilindre per a designar-lo.

918. De fet, són iguals.

919. Ara empra E i K per a referir-se solament a les bases dels cilindres.

920. És un porisma immediat del fet que el cilindre és una vegada i mitja l'esfera, i la seva base un cercle màxim d'aquesta.

CD és a MN com el quadrat de costat CD al de [costat] GH. És a dir, com GH a EF.[921]

Alternando, CD és a GH com GH a MN, [Ev 16]
o sigui, com MN a EF.

Donats els dos segments CD i EF, resulta que els segments GH i MN en són dues mitjanes proporcionals.

Per tant, cadascuna d'aquestes mitjanes queda determinada. ♣[922]

[*Síntesi*] Donats A i A, volem determinar una esfera que hi equivalgui.

Considerem un cilindre igual a una vegada i mitja el con A o el cilindre A

---

921. Usem la raó doble.

922. Quina és l'anàlisi que en fa Arquimedes? Té un con o un cilindre i vol trobar el radi de l'esfera equivalent. Suposa el problema resolt, és a dir, suposa que té el con A o el cilindre A, i també l'esfera B. Nosaltres ens limitarem ara als cilindres perquè el raonament, en el cas dels cons, és anàleg. Construeix un cilindre que té com a base el cercle màxim de l'esfera —que suposa coneguda— i eix el diàmetre de l'esfera. El seu volum és $\mathcal{V}_{\text{cilindre}} := \pi\, r^2 \times 2\, r = 2\,\pi\, r^3 = \frac{6}{3}\,\pi\, r^3 = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\,\pi\, r^3 = \frac{3}{2}\,\mathcal{V}_{\text{esfera}}$, ja que l'esfera és $\mathcal{V}_{\text{esfera}} := \frac{4}{3}\,\pi\, r^3$. Té un cilindre GLH que és una vegada i mitja l'esfera B. Fa ara un cilindre CFD que és una vegada i mitja el donat A. Només li cal fer-ne un de la mateixa base, i altura una vegada i mitja l'altura de A. Ambdós cilindres són equivalents i, per tant, les bases són inversament proporcionals a les altures [ECi lemes 3 i 4 o Exii 15]. O sigui $\frac{\bigcirc E}{\bigcirc K} = \frac{KL}{EF}$. Però [Exii 2], $\frac{CD^2}{GK^2} = \frac{KL}{EF}$ $(*)$. I, tanmateix, per construcció, $GH = KL$. D'això n'extreu [Ev 7], $\frac{CD^2}{GH^2} = \frac{GH}{EF}$. Però la raó dels quadrats és la raó doble de CD i GH [Pla (2016*b*), p. 241-242. Considera ara MN tercera proporcional de CD i GH, és a dir, $\frac{CD}{GH} = \frac{GH}{MN}$ $(**)$. De retruc, [Nc 1] $\frac{CD^2}{GK^2} = \frac{CD}{MN}$ $(***)$ [Pla (2016*b*), p. 241-242, i (2018), p. 295-296]. Ara, aplicant Nc 1 a $(*)$ i $(***)$, té que $\frac{CD}{MN} = \frac{GH}{EF}$. *Alternando*, resulta que $\frac{CD}{GH} = \frac{MN}{EF}$ $(****)$. En definitiva, aplicant Nc 1 a $(***)$ i $(****)$, obté $\frac{CD}{GH} = \frac{GH}{MN} = \frac{MN}{EF}$. Determina, doncs, dues mitjanes proporcionals entre el diàmetre de la base i l'altura del cilindre CFD. La primera mitjana —és a dir, GH— és el diàmetre i l'altura del cilindre GLH. O sigui, GH és el diàmetre de l'esfera B que busca.

de base un cercle de diàmetre CD i eix EF.

Considerem dues mitjanes proporcionals GH i MN de CD i EF, de manera que CD és a GH com GH a MN i MN a EF,
i un cilindre de base el cercle de diàmetre GH i eix KL igual al diàmetre.

Afirmo que el cilindre E equival al K.

[*Demostració.*] Atès que CD és a GH com MN a EF, *alternando*, resulta que CD és a MN com GH a EF.

[Ev 16]

Ara bé, [els segments] GH i KL són iguals i el cercle $\bigcirc E$ és al $\bigcirc K$ com KL a EF.[923]

Per tant, els cilindres E i K són equivalents [ECi lemes 3 i 4, i Exii 15].[924]

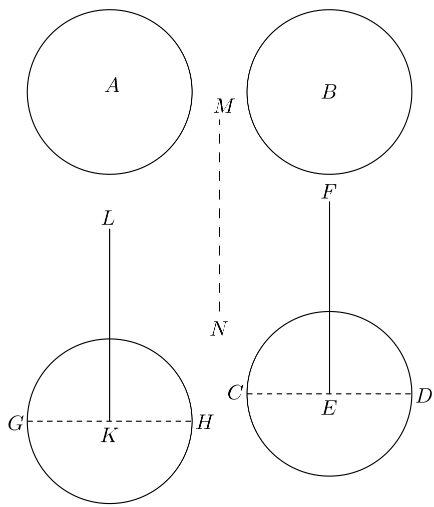


Figura ECii 1

Ara bé, el segon és una vegada i mitja l'esfera de diàmetre GH. [ECi 34, porisma]

Per tant, aquesta esfera —és a dir, B— equival al con o al cilindre. ♠[925]

B.4.2b_2 [ECii 2] *Un segment esfèric equival a un con amb la mateixa base que aquest i amb una altura la raó de la qual amb aquest és la mateixa que la del radi de l'esfera i l'altura del segment complementari.*[926]

923. La raó doble dels diàmetres, tenint en compte la proporcionalitat esmentada abans.

924. Els cons i els cilindres equivalents tenen les bases i les altures inversament proporcionals. En conseqüència, si els cons i els cilindres tenen les bases inversament proporcionals a les bases, són equivalents.

925. En aquest problema, Arquimedes *esferifica* un con o un cilindre.

926. Aquí, a diferència del que fa a ECii 1, Arquimedes reprèn els resultats del llibre anterior. Proporciona un con equivalent a un segment esfèric. Així, completa les àrees i els volums de les figures esfèriques. Ne-

Considerem una esfera i un dels seus cercles màxims de diàmetre AC.

[*Construcció.*] La tallem per un pla perpendicular al segment AC que passa per BF. [Exi 11][927]

Considerem el centre H de l'esfera. [Eiii 1][928]

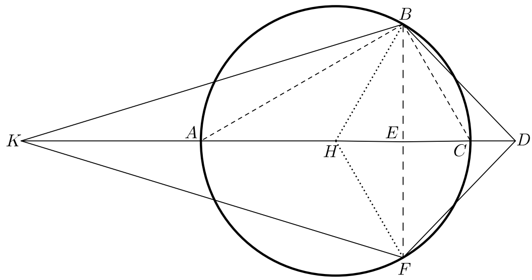


Figura ECii 2 *a*

Ho fem de manera que la suma dels segments HA i AE és al segment AE com DE a CE, i la suma dels segments HC i CE al segment CE com KE a EA.[929]

Fem els cons amb base el cercle de diàmetre BF i vèrtexs respectius D i K. ♣

Afirmo que el con △BDF equival al segment esfèric de vèrtex C i que el con △BKF ho fa al de vèrtex A.

[*Demostració.*] Tirem els radis BH i HF. [P 1]

Considerem el con de base el cercle de diàmetre BF i vèrtex el punt K.

Sigui △M un con que tingui com a base un cercle equivalent a l'àrea del casquet esfèric ⌓BCF,

cessita ECi 42 i ECi 44 i el lema 4, que estableix que el «rombe sòlid» equival a un con amb una base equivalent a la seva i una altura que és la suma de les altures dels cons que el componen. Finalment, ha de recórrer a Exii 2 i Exii 15.

927. El llibre xi dels *Elements* d'Euclides no indica de quina manera es pot fer un pla perpendicular a una recta. Vegeu el problema 26 (pàgina 163).

928. Aquí se suposa, naturalment, que el centre dels cercles màxims de l'esfera coincideix amb el seu.

929. El punt E és conegut —de fet, és el punt en el qual la base del segment esfèric talla el diàmetre AD. Però hem de determinar els punts D i K perquè es compleixin les proporcions esmentades. Un cop fixat el punt E, només hem de recórrer a Evi 12. Arquimedes suposa, per tant, que aquest està fixat i que, aleshores, podem construir els cons adients. Aquesta és, doncs, una presentació en forma d'anàlisi-síntesi.

és a dir, el cercle de radi igual al segment BC [ECI 42]
i altura igual al radi de l'esfera.

Aleshores, com hem vist en el llibre primer, el con $\triangle M$ equival al sector esfèric $\triangle BCHF$. [ECI 44]

Ara, atès que DE és a EC com HA i AE junts a A,
dividendo, DC és a EC com HA a AE, [EV 17]
o sigui, com CH a AE,
i, *alternando*, DC a CH com EC a AE. [EV 16]

Finalment, *componendo*, tenim que DH és a CH com AC a AE. [EV 18]

Per tant, el quadrat de CB és al quadrat de B com DH a CH.[930]

Però el segment CB és igual al radi del cercle $\bigcirc M$ [base del con $\triangle M$] [ECI 42]
i el segment BE al del cercle de diàmetre BF.

Consegüentment, DH és a HC com el cercle $\bigcirc M$ al cercle de diàmetre BF. [NC 1 i EXII 2]

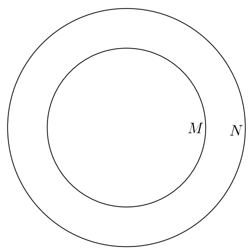


FIGURA ECII 2b[931]

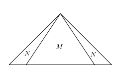
Ara bé, el segment HC és igual a l'eix del con $\triangle M$.

Per tant, el segment DH és a l'eix del con $\triangle M$ com el cercle $\bigcirc M$ al de diàmetre BF.

En definitiva, doncs, el con de base el cercle $\bigcirc M$ i altura el radi de l'esfera equival al rombe sòlid $\diamond BDFH$,
tal com hem establert en el lema quart del llibre primer.
[ECI 17 i lema 4][932]

930. En efecte, $\frac{AC}{AE} = \frac{AC \times EC}{AE \times EC}$, ja que els paral·lelograms que tenen la mateixa altura són com les seves bases respectives [EVI 1]. Si ara ens fixem en el triangle rectangle $\triangle ABC$, tenim que $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{EC}$ [EVI 8]. Per tant, el rectangle $AC \times EC$ equival al quadrat de costat BC [EVI 16]. Anàlogament, $\frac{AE}{BE} = \frac{BE}{EC}$ [EVI 8] i, de retruc, $AE \times BE$ és igual al quadrat de costat BE [EVI 16]. Iterant ara EV 18, obtenim el resultat que buscàvem.

931. Hi ha autors que representen els cons $\triangle M$ i $\triangle N$, de bases respectives $\bigcirc M$ i $\bigcirc N$, en forma de triangles, projeccions planes seves.



932. O de la manera següent: com que el segment és a l'altura del con $\triangle M$ com el cercle $\bigcirc M$ al de diàmetre BF, el con $\triangle M$ equival al de

Però el con M equival al sector esfèric $BCFH$.

Per tant, aquest sector i el rombe sòlid $BDFH$ són equivalents. [Nc 1]

Si hi sostraiem el con comú —el que té com a base el cercle de diàmetre BF i altura EH—,
resulta que el con residual BDF equival al segment esfèric BFC. [Nc 3]

De manera semblant, establim que el con residual BKF equival al segment esfèric BAF. [Nc 3]

I, com que HC i CE junts són a EC com KE a AE,
dividendo, resulta que el segment KA és al AE com HC a CE. [EV 17]

Però $HC = HA$.

Per tant, [substituint i] *alternando*, KA és a AH com AE a CE. [EV 7 i 16]

I, *componendo*, KH és a HA com AC a CE, [EV 18]
o sigui, com el quadrat de BA al quadrat de BE.[933]

Ara considerem el con N de radi igual a AB.

Equival al segment esfèric BAF. [ECI 42]

Si suposem que l'altura del con N és el radi de l'esfera,
el con equival al sector esfèric $BHFA$. [ECI 44]

Però hem establert que KH és a HA com el quadrat de costat AB al de [costat] BE,
o sigui, com el quadrat del radi del cercle $\bigcirc N$ al del radi del cercle de diàmetre BF,
com el cercle $\bigcirc N$ al cercle de diàmetre BF. [EXII 2]

Ara bé, l'altura del con N és igual a AH.

Per tant, KH és a l'altura del con N com el cercle $\bigcirc N$ al de diàmetre BF.

En definitiva, el con N —és a dir, el sector esfèric $BHFA$— equival al sòlid $BHFK$. [ECII 2]

base el cercle de diàmetre BF i altura el segment DH, ja que les bases són inversament proporcionals a les altures respectives. I el con que té com a base el cercle de diàmetre BF i altura DH ho fa al rombe sòlid $BDFH$.

933. Nota 930 (pàgina 332).

Hi ajuntem, a cada un, el con de base el cercle de diàmetre BF i altura EH.

I, tenim, finalment, que el segment esfèric $\ominus ABF$ equival al con $\triangle BFK$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.4.2*b*$_{2.1}$ [ECII 2, porisma] *És evident que, en general, un segment esfèric és a un con de la mateixa base i la mateixa altura que aquest com la suma del radi de l'esfera i l'altura de l'altre segment* [*esfèric*] *a l'altura d'aquest altre segment, ja que el segment DE és al EC com el con $\triangle DBF$, és a dir, el segment esfèric $\ominus BCF$* [*ECII 2*] *al con $\triangle BCF$* [*ECI, lema 1*].[934] ♠[935]

p. 88-89 En aquest cas, Arquimedes planteja dos problemes amb enunciats anàlegs, però essencialment diferents des del punt de vista del càlcul. Pretenen tallar una esfera per un pla de manera que: *a*) la raó de les àrees sigui donada i *b*) la raó dels volums dels segments esfèrics també ho sigui. Malgrat l'analogia dels enunciats, tots dos problemes són força diferents perquè el primer és resoluble amb regle i compàs i, en canvi, el segon proporciona una equació cúbica.

B.4.2*b*$_3$ [ECII 3] *Volem tallar una esfera mitjançant un pla i tenint en compte que la raó de les àrees dels seus segments* [*esfèrics*] *està donada per endavant.*[936]

---

934. El porisma estableix la relació que hi ha entre el segment esfèric $\ominus BCF$ i el con $\triangle BCF$ que tenen la mateixa base i la mateixa altura. L'única cosa que cal fer és substituir el segment esfèric $\ominus BCF$ pel con equivalent $\triangle BDF$. Tots dos tenen la mateixa base i, per tant, la seva raó és la de les altures respectives DE i CE [EXII 14]. En concret, $\frac{\ominus BCF}{\triangle BCF} = \frac{\triangle BDF}{\triangle BCF} = \frac{DE}{CF} \underset{\text{EC}_{\text{II}}\,2}{=} \frac{HA+AE}{AE}$.

935. Un cop establert el porisma, ens ofereix un afegit en el qual estableix que el $\triangle KBF$ equival al segment esfèric $\ominus BAF$. Segons Heiberg [HEIBERG (1880-1881), vol. I, p. 181], aquesta aportació és d'un copista. Vegeu FRAJESE (1974), nota 9, p. 188-189. Nosaltres l'ometem, però la podeu trobar a MASIÀ (2010), p. 174-176.

936. Vegem com ho resol usant l'anàlisi.

[*Anàlisi.*] Suposem que el problema està resolt.

Sigui ○ $ADBE$ un cercle màxim de l'esfera de diàmetre AB.

Considerem que el pla perpendicular a AB talla el cercle ○ $ADBE$ pel segment DE. [Exi 3]

Unim AD i BD. [P 1]

Tenim que la raó de l'àrea dels segments [esfèrics] ⌓ DAE i ⌓ DBE està donada,
que l'àrea del segment [esfèric] ⌓ DAE equival a un cercle de radi un segment igual a AD, [ECi 43]
que l'àrea del segment [esfèric] ⌓ DBE ho fa a un cercle de radi un [segment] igual DB [ECi 43]
i que aquests cercles són com els quadrats construïts sobre els segments AD i AB, [Exii 2]
és a dir, com els segments AC i CB.

Com que la raó d'aquests dos segments està donada, [Ev 7 i Nc 1] el punt C queda determinat.

Però el segment DE és perpendicular al segment AB.

Per tant, el pla que passa per DE també està ben determinat.[937]

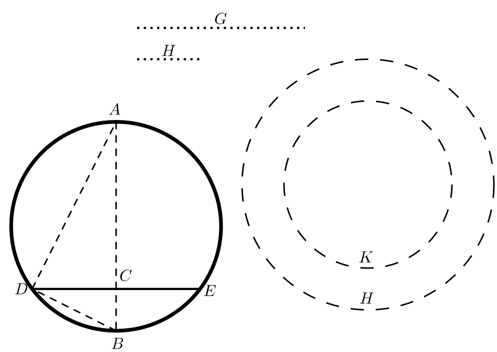


Figura ECii 3

[*Síntesi.*] La qüestió es resol de la manera que expliquem a continuació.

Considerem l'esfera de cercle màxim ○ $ABDE$ i diàmetre AB.

Suposem que la raó donada és la de[ls segments] F i G.

Dividim AB pel punt C, de manera que AC és a BC com F a G. [Evi 9] ♣

Ara tallem l'esfera per C amb un pla perpendicular a[l segment] AB. [Exi 4 i 2]

937. Arquimedes empra el terme «donat en posició» que hem vist en les *Dades* d'Euclides.

Sigui DE el segment en el qual es tallen aquests plans. [Exi 3]

Unim AD i DB. [P 1]

Considerem els cercles ○ H i ○ K de radis respectius iguals als segments AD i DB. ♣

[*Demostració.*] Veiem que els cercles ○ H i ○ K equivalen a les àrees dels segments esfèrics ⌓ DAE i ⌓ DBE. [ECi 42 i 43]

Atès que l'angle $\widehat{ADB}$ és recte [Eiii 31]
i [el segment] CD perpendicular a AB,
AC és a CB com el quadrat de AD al de DB. [Eii 13 i Evi 1]

Per tant, F és a G com el quadrat de AD al de DB, [Ev 7]
és a dir, els segments F i G són entre si com els quadrats dels radis dels cercles ○ H i ○ K.

I, de retruc, els segments F i G ho són com els cercles ○ H i ○ K, [Exii 2]
que és la raó de les àrees dels segments esfèrics ⌓ DAE i ⌓ DBE. [Ev 7] ♠

B.4.2*b*$_4$ [ECii 4] *Volem tallar una esfera amb un pla tenint en compte que la raó dels volums dels segments* [*esfèrics*] *està donada per endavant.*[938]

Sigui ⊖ $ABCD$ l'esfera donada.

La volem tallar per un pla de manera que els segments tinguin una raó determinada.

[*Anàlisi.*] Tallem l'esfera per un pla ▱ AC.[939]

La raó que hi ha entre el segment esfèric ⌓ ADC i el ⌓ ABC és donada.

Tallem també l'esfera per un pla que li passa pel centre
[i és perpendicular al AC].[940]

Considerem que la secció és el cercle màxim ○ $ABCD$
de centre el punt K i diàmetre BD.

938. L'analogia d'enunciats amb la proposició anterior és evident. I en aquest cas el siracusà també usa l'anàlisi abans d'establir la síntesi.

939. Arquimedes suposa que aquest pla resol el problema. És, doncs, una presentació de l'anàlisi del problema.

940. Nota 928 (pàgina 331).

Tot això ho fem amb el convenciment que la suma dels segments KD i DW és al BW com RW a WB,
i que la suma dels segments KB i BW és al BW com LW a WD.

Unim els segments AL, LC, AR i RC. [P 1]

El con △ ALC equival al segment esfèric ⌓ ADC
i el △ ARC al [segment esfèric] ⌓ ABC. [ECII 3]

Per tant, la raó del con △ ALC i el △ ARC està ben determinada. [EV 7 o NC 1]

Però el primer con és al segon com LW a WR,
ja que la seva base és el cercle [de diàmetre el segment AC]. [ECI, lema 1]

En conseqüència, la raó de LW a WR està també ben determinada.

Igualment, i per construcció, [ECII 2]
el segment LD és al KD com KB a BR i com DW a WB.

Ara bé, el segment RB és al BK com KD a LD. [EV 7, porisma]

Aleshores, *componendo*, el RK és al KB,
és a dir, a KL com KL a LD. [EV 18]

Així doncs, el segment total RL és al total KL com KL a LD. [EV 12]

Per tant, [l'àrea d]el rectangle de [costats] RL i LD equival al quadrat de [costat] KL. [EVI 17]

I RL és a LD com el quadrat de [costat] KL al de [costat] LD.[941]

Però LD és a DK com DW a WB.

Ara, *invertendo* i *componendo*, el segment KL és al LD com BD a DW. [EV 7, porisma, i EV 18]

[Per tant, els quadrats de costats KL i LD són entre si
els de costats BD i DW. [NC 1 o EV 11]

A més, atès que LW és a DW com la suma dels segments KB i BW a BW,
dividendo, el segment LD és al DW com KB a BW.]

Fem BF igual a KB.

És evident que el punt F cau més enllà del R.[942]

---

941. En una proporció contínua, el primer terme és al tercer com el quadrat del primer al del segon [EVI 17].

942. En efecte, com que $\frac{WD}{WB} = \frac{KB}{BR}$ i DW és més gran que BW, el seg-

Però la raó entre LD i LW està ben determinada.

En conseqüència, també ho està la raó entre RL i LW.

I, com que aquesta l'obtenim per composició de les raons que hi ha entre RL i LD, i LD i LW,
que RL és a LD com el quadrat de [costat] DB al de [costat] DW,
i que DL és a LW com BF a FW,[943]
resulta que la raó entre RL i LW és la composta de les raons
del quadrat de [costat] DB i el de [costat] DW,
i dels segments BF i FW. ♣

Determinem H de manera que RL és a LW com BF a FH. [Evi 12]

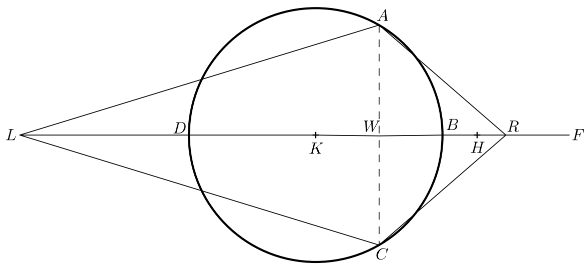


Figura ECii 4

Ara bé, la raó entre RL i LW està donada.

Per tant, la de BF i FH també.

I el segment BF també està donat perquè és igual al radi.

Així doncs, el segment FH queda ben determinat. [dada 2]

I la raó que hi ha entre BF i FH es compon de les raons del quadrat de costat BD i el de costat DW,
i de la dels segments BF i FW.

Però la raó que hi ha entre BF i FH es compon de les raons de BF i FW i de FW i FH.

[Hi sostraiem la raó comuna de BF i FW.]

La raó que queda —és a dir, la raó del quadrat de costat BD, que està donat, i el de costat DW—
és igual a la dels segments FW i FH, que també estan donats.

Però el segment FD també ho és.

Per tant, tallem el segment DF pel punt W

---

ment KB ho és més que el BR [Dv 7]. O bé, $\frac{RW}{WB} = \frac{KD}{DW} < 2$.

943. En efecte, *componendo* i *invertendo* [Ev 7, porisma, i Ev 18], $\frac{LD}{DW} = \frac{BF}{FW}$ implica $\frac{LD}{LD+DW} = \frac{BF}{BF+BW}$. O sigui, $\frac{LD}{LW} = \frac{BF}{FW}$.

i ho fem de manera que el segment WF és al segment donat FH com el quadrat de costat BD al de [costat] DW.[944]

De totes maneres, si hi afegim les condicions que hem trobat més amunt[, que DB és el doble de BF i que BF és més gran que FH,] no hem d'imposar el diorisma.

Amb aquestes condicions, el problema es pot resoldre com expliquem a continuació.

Donats dos segments BD i BF, sent el segon el doble del primer,
i el punt H dins el segment BF,
tallem el [segment] DB pel punt W
de manera que el quadrat de costat BD és al de [costat] DW com el [segment] WF al FH.

De cadascuna d'aquestes qüestions en dono l'anàlisi i la síntesi al final.[945] ♣

[*Síntesi.*] El problema es resol, doncs, tal com veurem ara.

Considerem la raó entre P i S, sent P més gran que S,[946]
i una esfera arbitrària.

Tallem aquesta esfera per un pla que passa pel centre.

Siguin $\bigcirc$ $ABCD$ la secció del cercle, BD el seu diàmetre i K el seu centre.

Fem BF igual a KB. [EI 2 o EI 3]

Tallem BF pel punt H de manera que HF és a HB com P a S, i BD pel punt W de manera que WF és a FH com el quadrat de costat BD al de costat DW.

Pel punt W, tirem un pla perpendicular a BD. [EXI 4 i 2]

---

944. Arquimedes es refereix a FH i al quadrat de costat BD com a «segment donat» i «magnitud donada».

945. Aquest aclariment no apareix al final de l'obra. Tanmateix, Eutoci l'inclou en els seus *Comentaris* (text A.4 a_3). De fet, Arquimedes redueix el problema a la resolució de la cúbica $X^2\,(a-X) = b\,c^2$, en què H, h' són les altures dels segments esfèrics en els quals queda dividida l'esfera. Per tant, $h + h' = 2\,r$. A més, $a = 3\,r$ i $X = 2\,r - h$. Per a una exposició detallada, vegeu HEATH (1921), vol. II, p. 43-44, i, en aquest volum, l'exercici 41 (pàgina 88). Dels mètodes grecs per a resoldre la cúbica en parlarem a *Grècia IIIc*.

946. Són dues magnituds que proporcionen una raó.

Afirmo que aquest pla talla l'esfera i fa que el segment esfèric més gran sigui al petit com P a S.

[*Demostració.*] La demostració la fem de manera que la suma dels segments KB i BW és al segment BW com LW a DW,
i la suma dels segments KD i DW al segment DW com RW a WB,

Unim AL, LC, AR i RC. [P 1]

Per construcció, el rectangle de costats RL i LD equival, com hem vist abans, al quadrat de costat LK,
i el segment KL és al LD com BD a DW.

Per tant, el quadrat de costat KL és al de costat LD com el de [costat] BD al de [costat] DW.

Però el rectangle de costats RL i LD equival al quadrat de costat LK.

Així doncs, el segment RL és al LD com el quadrat de costat LK al de [costat] LD.

I el segment RL és al LD com el quadrat de costat BD al de [costat] DW,
és a dir, com WF a FH.

Tanmateix, la suma dels segments KB i BW és al segment B com LW a DW
i el segment KB és igual al BF.

Per tant, el segment FW és al WB com LW a WD.

Convertendo, el segment WF és al FB com WL a LD.

[Ev 19, porisma]

D'això en resulta que el segment LD és al LW com BF a FW.

Però RL és a LD com WF a FH,
i DL és a LW com BF a FW.

Això vol dir que, *perturbando* i *ex equali*, el segment RL és al LW com BF a FH. [Dv 18 i Ev 23]

I, en conseqüència, LW és a WR com FH a HB.

Però FH és a HB com P a S.

Així doncs, com LW és a WR,
és a dir, com el con ALC és al ARC.

En definitiva, el segment esfèric ⊖ ADC és al [segment esfèric] ⊖ ABC com P a S.[947]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Vegem, ara, els dos teoremes que corregeixen els altres dos que p. 351
havia plantejat als geòmetres d'Alexandria perquè els resolguessin i que eren erronis, com manifesta en la introducció de LE.

B.4.2*b*$_5$ [ECii 8] *Volem tallar una esfera per un pla que no passa pel centre. La raó que el segment esfèric més gran té amb el petit és més petita que la raó doble de la superfície del [segment] gran i el petit, i més gran que la 'sesquilàtera' —ἡμιόλιος— d'aquesta raó.*[948]

Considerem una esfera de cercle màxim ○ $ABCD$ i diàmetre BD.

La tallem per AC amb un pla perpendicular al cercle. [Exi 4 i 2]

Sigui ⊖ ABC el segment esfèric més gran [que determina].

Afirmo que la raó que hi ha entre aquest segment esfèric i el més petit és més petita que la raó doble de la superfície que hi ha entre el gran i el petit, i més gran que la sesquilàtera d'aquesta raó.

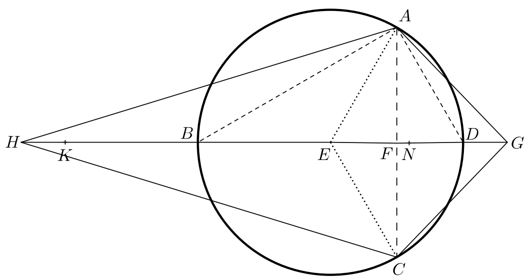


Figura ECii 8

[*Demostració.*] Unim BA i AD. [P 1]

Sigui E el centre de l'esfera. [Eiii 1][949]

Determinem dos punts H i G de manera que
ED i DF junts és a DF com HF a FB,
i EB i BF junts és a BF com GF a FD.

---

947. En línia, <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/oeuvres2.htm> i, concretament, la nota ϑ de la proposició v.

948. Ras i curt, el teorema diu: «Si $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$, amb $\mathcal{V}_1 > \mathcal{V}_2$, són els volums dels segments esfèrics, i $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ les seves superfícies, resulta que $\left(\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2}\right)^{\frac{3}{2}} < \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} < \left(\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2}\right)^2$.» La demostració d'Arquimedes és complexa. Vegeu el problema 27 (pàgina 163).

949. El centre de l'esfera coincideix amb el del cercle màxim ○ $ABCD$.

Tirem els cons $\triangle HAC$ i $\triangle GAC$ que tenen de base comuna el cercle de diàmetre AC i vèrtexs H i G. [DXI 18]

El con $\triangle AHC$ equival al segment esfèric $\ominus ABC$ [ECII 2]
i el con $\triangle AGC$ al $\ominus ADC$. [ECII 2]

Tenim que el quadrat de costat AB és al de costat AD com la superfície del segment esfèric $\ominus ABC$ a la del $\ominus ADC$.
[ECI 42 i 43, i EXII 2]

Afirmo que la raó dels cons $\triangle AHC$ i $\triangle AGC$ —és a dir, de FH i FG— és més petita que la raó doble dels quadrats de costat BA i AD. O sigui, més petita que la raó de BF i FD. [EII 13 i EVI 1][950]

Ara bé, atès que ED i DF junts són a DF com HF a FB,
resulta que BF és a FD com HB a BE. [EV 7 i 17][951]

Novament, atès que EB i BF junts són a BF com GF a FD,
que B i BE són iguals
i que HB és més gran que BE, ja que BF ho és més que FD,
resulta que KF és a FB com GF a FD. [DV 7 i EV 7][952]

Però hem vist que FB és a FD com HB a BE
i que BE i BK són iguals. [DV 7 i EV 7]

Per tant, HB és a BK com KF a FG.
[EV 7, EV 17 i EV 11 o NC 1][953]

Tanmateix, la raó que hi ha entre HF i FK és més petita que la de HB i BK.[954] [DV 7]

I hem establert que HB és a BK com FK a FG.

Per tant, la raó que hi ha entre HF i FK és més petita que la de FK i FG. [EV 13]

El rectangle de costats HF i FG és més petit que el quadrat de costat FK.[955]

950. Ítem *a* del problema 28 (pàgina 163).
951. Ítem *b* del problema 28 (pàgina 163).
952. Ítem *c* del problema 28 (pàgina 163).
953. Ítem *d* del problema 28 (pàgina 163).
954. Ítem *e* del problema 28 (pàgina 163).
955. Ítem *f* del problema 28 (pàgina 163). És una extrapolació d'EVI 17 a les desigualtats.

La raó que hi ha entre el rectangle de costats HF i FG i el quadrat de costat FG és més petita que la del quadrat de costat KF i el de costat FG. [Ev 13]

I la que hi ha entre el segment HF i FG ho és més que la raó doble de KF i FG.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ara bé, els segments BE i ED són iguals.

Per tant, el rectangle de costats BF i FD és més petit que el de costats BE i ED.[956]

I la raó que hi ha entre els segments FB i BE, més petita que la de ED i FD, [Ev 16][957]

és a dir, que la de HB i FB.

En definitiva, el quadrat de costat FB és més petit que el rectangle de costats HB i BE, [Dv 7]

és a dir, que el de costats HB i BK. [Ev 7 i Evi 13]

Suposem, ara, que el quadrat de costat BN equival al rectangle de costats HB i BK. [Evi 8, porisma]

Aleshores, HB és a BK com el quadrat de costat HN al de costat NK.[958]

Però la raó que hi ha entre el quadrat de costat HF i el de costat FK és més gran que la dels quadrats de costats HN i NK.

Per tant, la raó que hi ha entre els segments HF i FG ho és més que la sesquilàtera de la de KF i FG. ♠[959]

I, com que HF és a FG com el con △ AHC al △ AGC,

és a dir, com el segment esfrèric ⌓ ABC al ⌓ ADC, [ECii 2]

KF és a FG com BF a FD, com el quadrat de costat BA i el de costat AD, i com les superfícies dels segments esfèrics ⌓ ABC i ⌓ ADC.

---

956. Ítem f del problema 28 (pàgina 163).

957. De fet, és una extensió d'aquesta proposició a les desigualtats que podem establir fàcilment.

958. Els passos són: $\frac{BN}{BK} = \frac{HB}{BN}$ [Evi 17]. $\frac{KN}{BK} = \frac{BN+BK}{BK} = \frac{BN+HB}{BN} = \frac{NH}{BN}$ [Ev 17]. I $\frac{BN}{BK} = \frac{NH}{KN}$ [Ev 16]. D'això en resulta que $\frac{KN^2}{BK^2} = \frac{NH^2}{BN^2}$ [Evi 23]. Per tant, $\frac{BN^2}{BK^2} = \frac{HB}{BK}$ [Ev 22]. I, finalment, $\frac{HN^2}{NK^2} = \frac{HB}{BK}$ [Ev 11 o Nc 1].

959. Ítem g del problema 28 (pàgina 163).

En definitiva, la raó que hi ha entre el segment esfèric més gran i el més petit és més petita que la raó doble de la superfície del segment esfèric més gran i la del més petit,
i més gran que la raó sesquilàtera.[1022] ♠

B.4.2b_6 [ECII 9] *La semiesfera és el segment esfèric més gran dels que tenen la mateixa àrea.*[960]

Considerem dues esferes:
la ⊖ $ABCD$ de cercle màxim ◯ AC i la de cercle màxim ◯ $EFGH$ i diàmetre EG.

Una la tallem per un pla perpendicular a EG que passa pel centre [EXI 4 i 2] i l'altra per un [pla] perpendicular a AC que no hi passa. [EXI 4 i 2]

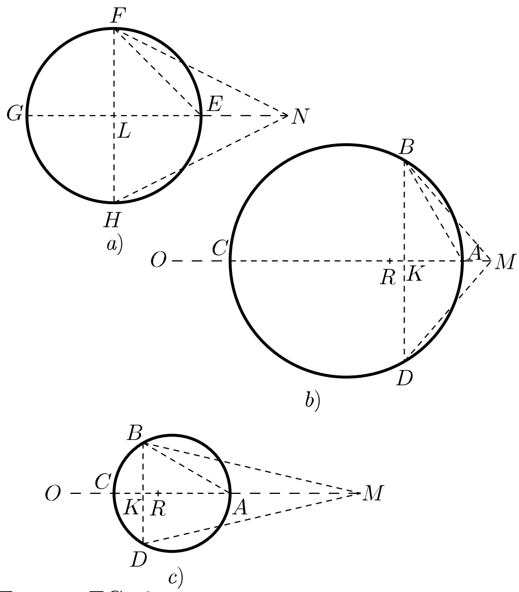


FIGURA ECII 9

Tots dos plans tallen els cercles màxims respectius pels segments DB i FH.

El segment esfèric determinat per l'arc $\widehat{FEH}$ és una semiesfera.[961]

---

960. No disposem del resultat corresponent als cercles malgrat que també és cert. Vegeu l'ítem *a* del problema 29 (pàgina 164).

Arquimedes cita aquesta proposició —i l'ECII 8— a *Sobre les línies espirals* (LE). Aquest resultat en contradiu un de fals que el siracusà esmenta en l'obra sobre les espirals. L'enunciat d'aquesta proposició falsa és: «Si dividim el diàmetre d'una esfera de manera que el quadrat de la part més gran equival a tres vegades el quadrat de la part més petita i dividim l'esfera amb un pla perpendicular pel punt de divisió [del diàmetre], el segment esfèric més gran és el màxim dels segments esfèrics de la mateixa àrea.»

961. L'altre, en canvi, és més petit o més gran que la semiesfera corresponent.

Suposem que les àrees de les superfícies d'aquests dos segments esfèrics són equivalents.

Afirmo que [el volum de] la semiesfera d'arc $\widehat{FEH}$ és més gran que [el d]el segment esfèric d'arc $\widehat{BAD}$.

[*Demostració.*] Ara, atès que les superfícies dels segments [esfèrics] dels quals acabem de parlar són equivalents,

és evident que el segment BA és igual al EF,

ja que hem establert que l'àrea d'un segment [esfèric, tant si és més gran com si és més petit que una semiesfera] equival a un cercle de radi igual al segment que uneix el vèrtex del segment [esfèric] a [un punt de] la circumferència de la base. [ECI 42, ECI 43 i EXII 2]

Però, com podem veure en la figura *b*,

l'arc $\widehat{BAD}$ és més gran que la meitat de la circumferència.[962]

Per tant, és evident que el quadrat de [costat] AB és més petit que el doble del quadrat de [costat] AK

i més gran que el doble del quadrat de [costat] el radi.[963]

Fem, doncs, el quadrat de AB igual al doble del quadrat d'un segment AR.[964]

Determinem els punts O i M de manera que CO és igual al radi del cercle $\bigcirc ABD$ [EI 2 o EI 3]

i que el segment CO és al [segment] CK com MA a AK.

Considerem el con de base el cercle de diàmetre BD i vèrtex el punt M. [DXI 18]

Aquest con equival al del segment esfèric construït en l'arc $\widehat{BAD}$. [ECII 2]

[En la figura *a*,] fem EN igual a EL. [EI 2]

I, sobre el cercle de diàmetre FH, construïm un con amb el vèrtex en el punt N. [DXI 18]

Aquest con equival a la semiesfera sobre l'arc HEF.

---

962. Arquimedes considera el cas del segment esfèric més gran que la semiesfera.

963. Aquí, excepcionalment en la seva obra, Arquimedes usa el terme *δυνάμεις*.

964. Només cal considerar la diagonal del quadrat de costat AB.

Però [l'àrea d]el rectangle de costats AR i RC és més gran que l'àrea del rectangle de [costats] AK i KC,
ja que el costat més petit d'un d'aquests rectangles és més gran que el més petit de l'altre.[965]

A més, el quadrat de [costat] AR és igual al rectangle de costats AK i CO,[966]
ja que aquest quadrat equival a la meitat del quadrat de costat AB.

Per tant, la suma del rectangle de costats AR i RC i del quadrat de [costat] AR és més gran que la suma dels rectangles de costats AK i KC, i AK i CO.

[Però el rectangle de costats CA i AR també ho és més que el rectangle [de costats] OK i KA.[967]]

I el de costats MK i KC equival al de costats OK i KA.

En conseqüència, el rectangle de costats CA i AR és més gran que el de costats MK i KC.

I, la raó que hi ha entre CA i CK també ho és més que la de MA i AR.

Però el segment CA és al CK com el quadrat de [costat] AB al de [costat] BK.

D'això es dedueix que la raó que hi ha entre la meitat del quadrat de [costat] AB
—que equival al de [costat] AR—

965. Si, per un punt, tallem un segment en dues parts diferents i, per un altre, en unes altres dues que s'allunyen menys del punt mitjà del segment, aquest segment és més gran que el rectangle dels dos segments que se n'allunyen més. Per tant, si el costat més petit d'un dels rectangles és més gran que el més petit de l'altre, el primer rectangle és més gran. Vegeu l'ítem *b* del problema 29 (pàgina 164).

966. El quadrat de AR equival al rectangle de costats AK i CO, ja que AR i EL són iguals i el quadrat de costat EL equival a la meitat del de costat EF. És evident que el quadrat de costat AR és igual a la meitat del quadrat de costat AB, ja que AB ho és a EF.

967. En efecte, l'afirmació és certa perquè el rectangle de costats AR i RC més el quadrat de costat AR és més gran que la suma dels rectangles de costats AK i KC, i AK i CO. Per tant, $(RC + AR) \times AR < (KC + CO) \times AK$. O sigui, $CA \times AR > OK \times KA$.

i el quadrat de [costat] BK és més gran que la del segment MK i el doble de AR,
que és igual a LN.

Per tant, la raó que hi ha entre el cercle de diàmetre FH i el cercle de diàmetre BD és més gran que la de MK i NL.

En definitiva, el con de base el cercle de diàmetre FH i vèrtex el punt N és més gran que el de base el cercle de diàmetre BD i vèrtex el punt M.

És evident, doncs, que la semiesfera d'arc $\widehat{EFH}$ és més gran que el segment esfèric d'arc $\widehat{BAD}$. ♠[968]

El comentari d'Eutoci al problema 4 d'ECii. Donem només la primera part del comentari, en el qual parla de les maneres alternatives de complir la promesa que Arquimedes fa a ECii 4.

B.4.2*c* Arquimedes, al final [del problema 4 d'ECii], en promet la seva solució però no la trobem en cap dels textos que han perviscut. I això fa que Dionísodor, en no trobar el lema en el text ni en cap altre indret, en proporcioni una altra solució per un camí diferent. Nosaltres l'exposem ara aquí.[969] Diocles, en *Els miralls ardents* (*Περὶ πυρέιων*),[970] convençut que Arquimedes havia promès una solució sense tenir-la, es va preocupar d'omplir aquest forat. Seguidament, oferirem la seva temptativa que, malgrat que no té cap relació amb els raonaments perduts, resol el problema amb una demostració diferent, com havia fet Dionísodor. Tanmateix, en un llibre antic —perquè mai no hem deixat d'investigar recorrent a molts textos—, hem trobat teoremes establerts amb moltes inexactituds causades pels defectes i per les figures en particular, teoremes que aplegaven errors de tota mena, però que contenien en substància allò que buscàvem. Aquests teoremes conserven el dialecte dori que emprava Arquimedes i la terminologia utilitzada pels antics. La paràbola es designava amb l'expressió «secció d'un con rectangle» i la hipèrbola

968. La demostració que hem vist s'ha fet en el supòsit que el segment esfèric considerat és més gran que la semiesfera.

969. Aquests textos els trobarem, amb altres mètodes per a resoldre geomètricament equacions cúbiques, a *GrèciaIIId*.

970. En trobareu una traducció adaptació al català a *GrèciaIIId*.

amb «un [con] obtusangle».[971] Aquestes característiques [del text] ens han fet creure que podia ser la solució que Arquimedes havia promès. Vam estudiar l'obra original amb molta cura i vam veure que la seva lectura era molt difícil per culpa, com hem dit abans, d'una gran quantitat d'errors. Vam anar desfullant les nocions una a una i, en la mesura que vam poder, les vam refer en un llenguatge més normal [és a dir, més actual] i més clar. La primera proposició la presentem en forma general perquè pugui aclarir-nos tot allò que Arquimedes deia sobre les determinacions. Seguidament, vam aplicar aquestes discussions a l'anàlisi del problema.[972]

B.5 LE: *Sobre les línies espirals*

p. 90-100 A continuació, oferim diverses parts d'aquesta monografia adreçada a Dositeu.[973] Concretament, *a*) la introducció d'aquesta monografia; *b*) les dues primeres proposicions, que fan referència a la llei que regeix el moviment rectilini uniforme; *c*) la tercera, molt simple, i la quarta —donat un segment rectilini més curt que la longitud d'una circumferència és possible determinar-ne un tercer de longitud intermèdia—, és bàsica;[974] *d*) la cinquena exemplifica l'ús de la *neusi*;[975] *e*) les definicions relatives a l'espiral; *f*) la tretzena, que afirma que un segment tangent a l'espiral per un punt, en el sentit intuïtiu, no és bitangent, és a dir, la seva prolongació no és tangent per cap altre punt diferent al punt de tangència inicial; *g*) la divuitena, que

971. Recordem que el text d'Eutoci és posterior a les *Còniques* d'Apol·loni, que és on apareixen els noms *paràbola* i *hipèrbola*, i, malgrat tot, manté la nomenclatura de les còniques usada pels antics i per Arquimedes.

972. Eutoci (1827), edició francesa de 1972, p. 88-89.

973. Com ja hem dit (pàgines 7-8), hi esmenta el seu amic Conó, es lamenta de la seva mort i expressa l'admiració que li professava.

974. Requereix el postulat d'Arquimedes.

975. Obre la porta a la trisecció de l'angle. Recordem que la quadratriu d'Hípies també la permet. Pla (2016*b*), p. 251-253; B.7.9, p. 498-501, i C.8*e*, p. 570-572.

rectifica la circumferència, i *h*) la vint-i-quatrena, que proporciona l'àrea limitada per la primera volta de l'espiral, en concret, especifica a quin cercle és equivalent. Considerem que aquestes proposicions —i, en concret, la divuitena i la vint-i-quatrena— constitueixen el nucli de la monografia. La resta en són porismes o generalitzacions. I tanquem aquest recull parcial amb les proposicions necessàries per a aconseguir que les nuclears —i, en particular, les dues indicades abans— no tinguin llacunes (ítem *j*). Ens ha semblat que aquesta tria constitueix una manera didàctica d'apropar-se a la monografia, que és d'una gran originalitat.

Això no obstant, un cop feta aquesta presentació, donem l'adaptació i la traducció catalana de la resta de proposicions per tal de disposar de la monografia completa (ítem *k*).

B.5*a* La introducció de LE

Arquimedes a Dositeu: Salut! p. 100

Constantment em demanes que escrigui les demostracions dels teoremes que he fet arribar a Conó. Ja us les he enviat en els llibres que us ha portat Heràclides. Ara, però, en aquesta monografia, te'n trameto unes altres. No et sorprengui que hagi trigat tant a escriure-les. Volia deixar prou temps perquè els matemàtics gaudissin descobrint-les tot sols. De fet, quants teoremes de la geometria que, d'entrada, semblen difícils s'aclareixen, amb el pas del temps? Conó va morir sense haver tingut temps de trobar les demostracions d'aquests teoremes i els va deixar en la foscor. De ben segur que, si hagués viscut més, les hauria trobat i hauria eixamplat així els límits de la geometria, perquè no conec ningú amb una capacitat tan admirable, amb tant d'entusiasme i habilitat per a aquesta ciència com ell.[976] Ja han passat uns quants anys des de la seva mort i no sé si algú altre ha estat capaç de resoldre'ls. Ara n'exposo les demostracions, l'una darrere l'altra. I recullo dues qüestions la resolució de les quals m'és desconegu-

976. Aquí Arquimedes explicita el respecte que li mereixia Conó.

da.[977] Ho faig per confondre els qui afirmen que les han solucionat sense aportar-ne cap prova quan, de fet, han establert resultats impossibles (*εὑρίκειν τὰ αδύνατα*).[978]

T'indicaré quins són aquests problemes, alguns ja te'ls vaig enviar, i quins són els que exposo per primera vegada en aquest llibre.

1. Donada una esfera, determineu una superfície plana igual a la seva superfície.[979]

Aquest problema l'he resolt en la monografia *Sobre l'esfera i el cilindre*, en què he demostrat que la superfície d'una esfera equival a quatre vegades un dels seus cercles màxims. Per tant, és fàcil veure que és possible trobar una superfície plana igual a la superfície d'una esfera.[980]

2. Donat un con o un cilindre, hi podem determinar una esfera equivalent.[981]

3. Podem tallar una esfera per un pla de manera que els [volums dels] segments esfèrics obtinguts tinguin una raó determinada.[982]

4. Podem tallar una esfera per un pla de manera que les superfícies dels segments obtinguts tinguin una raó determinada.[983]

5. Podem construir un segment esfèric semblant a un altre determinat.[984]

6. Donats dos segments esfèrics d'una mateixa esfera o d'esferes diferents, podem trobar-ne un altre semblant a un d'aquests i amb la superfície equivalent a la de l'altre.[985]

7. Podem tallar un segment d'una esfera determinada per un pla de manera que el segment i el con de la mateixa base i la mateixa altura tinguin una raó més gran que 3 a 2.[986]

---

977. Frase d'autoria dubtosa.
978. Vegeu el número 6 de la introducció de FRAJESE (1974), p. 27-28.
979. ECI 33.
980. D'alguna manera, la superfície d'una esfera és «planable».
981. ECII 1 (pàgina 327-330).
982. ECII 4 (pàgina 338-341).
983. ECII 3 (pàgina 335-336).
984. ECII 5. Nosaltres no recollim ECII 5. Vegeu MASIÀ (2010), p. 183-187, i 341-344.
985. ECII 6. MASIÀ (2010), p. 187-189.
986. ECII 7. MASIÀ (2010), p. 190-192.

Heràclides us ha portat les demostracions de tots els problemes.

El següent, però, és incorrecte. Deia:

1. Si tallem una esfera per un pla en dues parts diferents, el segment gran és al petit la raó doble de les àrees del gran i el petit.[987]

Segons la demostració que t'he enviat, això és evidentment fals. De fet, el text estableix que:

2. Si, per un pla perpendicular al diàmetre, dividim una esfera en parts diferents, la superfície del segment esfèric més gran és a la del més petit com la part més gran del diàmetre a la més petita. I la raó que hi ha entre el segment esfèric més gran i el més petit és la raó doble de la de la superfície més gran i la més petita, és a dir, més gran que la raó sesquilàtera.[988]

3. I el darrer problema també és fals. Si tallem un diàmetre d'una esfera arbitrària de manera que el quadrat del segment més gran sigui el triple del quadrat del més petit i, pel punt de divisió del diàmetre, tirem un pla perpendicular a aquest, aquest pla que talla l'esfera de manera que el segment esfèric més gran és el més gran de tots els segments esfèrics que tenen una mateixa superfície. I ho és d'acord amb els problemes que ja t'he enviat. De fet, he demostrat que l'hemisferi és el més gran de tots els segments esfèrics que tenen una mateixa superfície.[989]

A més d'aquests problemes també et vaig trametre les proposicions següents relatives al con:[990]

1. Si un segment de paràbola fa una volta entorn del diàmetre que roman immòbil perquè n'és l'eix, la figura que descriu la paràbola és paraboloide.

2. Si un pla és tangent a un paraboloide i un pla paral·lel al primer talla un segment d'aquest paraboloide, la base del segment s'anomena *pla secant* (*ἀποτέμνον ἐπίπεδον*) i el punt de tangència, *vèrtex* (*κορυφά*).

---

987. ECII 8. Masià (2010), p. 192-195.

988. És a dir, que tres meitats.

989. ECII 9 i ECII 3 (pàgines 344-345 i 335-336).

990. De fet, es refereix als conoides.

3. Si tallem la figura sòlida de la qual acabem de parlar mitjançant un pla perpendicular a l'eix, la secció obtinguda és un cercle. Però encara hem de demostrar que el segment produït per aquesta secció equival a tres meitats el con de la mateixa base i la mateixa altura.[991]

4. Si determinem dos segments d'un paraboloide per plans arbitraris, de qualsevol manera, és evident que les seccions obtingudes són el·lipses sempre que els plans de tall no esdevenen perpendiculars a l'eix.[992]

5. Però s'ha demostrat que aquests segments són entre si com els quadrats dels segments rectilinis paral·lels a l'eix que van dels seus vèrtexs als plans secants.[993]

Tanmateix, de moment, no te n'he enviat les demostracions.[994]

Finalment, plantejo les proposicions següents relatives a les espirals.[995] Són problemes que no tenen res en comú amb els que acabo d'esmentar i n'he escrit les demostracions en el llibre. En concret:

1. [Definició.] Si un segment rectilini gira en un pla, al voltant d'un punt que roman immòbil i a una velocitat uniforme, fins que retorna d'on ha sortit, i alhora un punt es mou en el segment rectilini a partir del punt immòbil i a una velocitat uniforme, aquest punt mòbil descriu una espiral plana.[996]

[Proposició.] Afirmo que l'àrea limitada per l'espiral [que acabem de descriure] i el segment [que giravolta] situat en la inicial[997] és la tercera part del cercle de centre el punt immòbil i radi el segment en la posició final.[998]

---

991. CE 21 (pàgines 440-443).

992. CE 12 (pàgines 445-448).

993. CE 24. No l'hem reproduïda. Vegeu Masià (2016), p. 91-93.

994. La monografia CE és, doncs, posterior a LE.

995. Arquimedes les anomena *ἕλικος*, 'espirals'. Aquí comença la síntesi de la monografia.

996. Com ja hem dit abans, Arquimedes l'anomena *espiral* (*ἕλικα*, que és l'acusatiu de *ἡ ἕλιχ, ικος*).

Per tal de fer més clara l'exposició, denominarem *radi vector* cadascun dels segments que uneixen el punt immòbil —«origen de l'espiral»— amb els punts de l'espiral.

997. És a dir, el darrer radi vector.

998. Figura LE 3 (pàgina 96). Això és el que estableix a LE 24 (pàgines

2. Considerem la tangent a l'espiral pel darrer punt[999] i, des de l'ori- p. 95
gen de l'espiral, tirem un segment rectilini perpendicular a la posició en la qual es troba el segment que gira[1000] abans que talli la tangent.

Afirmo que el segment perpendicular [que queda limitat per l'origen i el punt d'intersecció] equival a la circumferència del cercle [de radi el darrer radi vector].[1001]

3. Si ara considerem que el segment segueix girant fins a tornar al lloc inicial, afirmo que l'àrea limitada per l'espiral de la tercera volta equival al doble de la limitada per l'espiral de la segona, la de la quarta al triple i la de la cinquena al quàdruple, i que, finalment, les àrees de les revolucions següents equivalen a la de la segona revolució multiplicada pels nombres que segueixen els esmentats.[1002]

També afirmo que l'àrea de la primera revolució equival a la sisena part de la de la segona.[1003]

4. Prenem dos punts de la primera volta de l'espiral. Els unim amb l'origen mitjançant els raigs vectors corresponents i prolonguem el més petit.[1004] Tirem els cercles de centre l'origen [de l'espiral] i radi els radis vectors corresponents. Afirmo que l'àrea limitada per l'arc de circumferència que es troba entre aquestes dues línies, per l'espiral i per la prolongació del radi vector petit, és a l'àrea limitada per l'arc de la circumferència petita, per l'espiral i pel radi vector com el radi del cercle petit juntament amb dos terços de l'excés del radi del cercle gran sobre el del més petit al radi del cercle més petit juntament amb la tercera part de l'excés que acabem d'esmentar.[1005]

En el text, s'hi troben les demostracions de les proposicions que acabo d'esmentar i d'altres relatives a l'espiral.

364-368). És l'àrea que escombren els radis vectors en una volta.

999. Observem que, de moment, només considera una volta de l'espiral.

1000. El darrer radi vector.

1001. LE 18 (pàgines 360-364).

1002. És a dir, $\mathcal{A}_{n\ \text{voltes}} = n \times \mathcal{A}_{\text{dues voltes}}$. Les àrees formen, doncs, una progressió aritmètica de diferència $\mathcal{A}_{\text{dues voltes}}$. Vegeu LE 27, que no reproduïm, a Ortiz-García (2009), p. 66-69.

1003. LE 27. Vegeu la nota 1002.

1004. Usem la nomenclatura de la nota 996 (pàgina 352).

1005. Vegeu LE 28, que no reproduïm, a Ortiz-García (2009), p. 69-71.

Com en altres indrets, hi ha un principi que és necessari per a poder establir aquests enunciats. Diu:

[Postulat d'Arquimedes.] Considerem dos segments o dues superfícies diferents. Si afegim l'excés del gran sobre el petit un nombre convenient de vegades, aconseguim superar una certa quantitat entre les que admeten raó.[1006]

B.5*b* Dues proposicions relatives al moviment uniforme

Les demostracions són molt simples però tenen l'interès d'incloure, p. 90 per primera vegada, la demostració matemàtica i les lleis del moviment rectilini uniforme.[1007]

B.5b_1 [LE 1] *Si un punt es mou en una línia recta*[1008] *a una velocitat uniforme i hi considerem dos segments,*[1009] *la raó que hi ha entre aquests és com la dels temps que el punt empra per a recórrer-los.*

Suposem que un punt es mou en la línia recta AB a la mateixa velocitat.

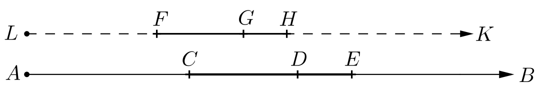


Figura LE 1

Considerem els segments CD i DE.

I suposem que el temps que el punt triga a recórrer-los és FG i GH, respectivament.

1006. Dv 4, Pla (2018), p. 266 i nota 798, i Ex 1, Pla (2021), p. 23 i 213-215. Podríem dir, simplement, de la «mateixa classe».

1007. Vull recordar que, quan Galileu estableix la llei de la caiguda de greus, també ho fa en termes de teoria de la proporció: «Els espais són com els quadrats dels temps.» Galileu (1890-1909), vol. viii, p. 207; Azcárate, García Doncel i Romo (1988), original en italià, p. 172-174, traducció en castellà, p. 69-72.

1008. Usem «línia recta» perquè la demostració sigui general, tot i que podríem dir perfectament «semirecta». Vegeu Ei 12 i la nota 340, i Ei 22 i les notes corresponents, a Pla (2018), p. 103 i 116.

1009. Aquí Arquimedes usa sempre *γραμμή*. Nosaltres, però, el primer l'hem respectat però el segon l'hem interpretat com si digués *εὐθεῖα*.

Volem mostrar que el segment CD és al DE com el temps FG al GH.

[*Demostració.*] Ajuntant repetidament els segments CD i DE, obtenim els AD i DB de manera que AD supera DB.

[postulat d'Arquimedes][1010]

Ara tinguem en compte el temps LG. Conté el FG tantes vegades com el segment AB el CD.

I el temps KG, tantes vegades el HG com el segment DB el DE.

Atès que el punt es mou a una velocitat constant en la semirecta AB,

és evident que el temps que li cal per a recórrer CD li cal també per a recórrer qualsevol altre segment igual a aquest.

Així doncs, també ho és que recorre el segment compost AD en un temps igual al LG,

perquè el segment CD està contingut en el AD tantes vegades com el temps FG ho està en el LG.

Per les mateixes raons, el punt ha recorregut el segment BD en un temps igual al KG.

Ara bé, atès que el segment AD és més gran que el BD,

és evident que el temps que empra el punt per a recórrer la línia AD també és més gran que el que necessita per a recórrer BD.

Així doncs, el temps LG és més gran que el KG.

De la mateixa manera, establim que, si els temps FG i GH se sumen [successivament] fins que un d'aquests supera l'altre,

dels segments múltiples dels CD i DE és més gran el que correspon al temps més gran.

I això posa de manifest que el segment CD és al DE com el temps FG al GH. [Dv 5][1011] ♠

B.5b_2 [LE 2] *Suposem que dos punts es mouen en dues semirectes a una velocitat uniforme. En cada semirecta, els segments recorreguts en el mateix temps són proporcionals entre si.*

1010. Frajese (1974), nota 3, p. 323, mostra que no cal un postulat tan potent.

1011. Pla (2018), p. 266-267.

Un punt es mou a una velocitat uniforme en una semirecta AB i un altre en una altra LK[, tots dos a velocitat constant].

En les semirectes AB i LK, considerem els dos segments CD i DE, i FG i GH, respectivament.

Suposem que el punt que es mou en la semirecta AB ressegueix el segment CD en el mateix temps que la semirecta KL recorre FG; llavors, el primer punt recorre el segment DE en el mateix temps que el segon el GH.

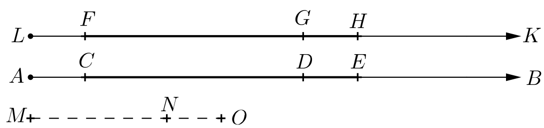


Figura LE 2

Volem establir que CD és a DE com FG a GH.

[*Demostració*.] Sigui MN el temps necessari per a recórrer el segment CD.

Mentrestant, l'altre punt es mou sobre la línia FG.

Sigui NO el temps necessari per a recórrer DE.

Mentrestant, l'altre punt es desplaça sobre el segment GH.

Per tant, el segment CD és al DE com el temps MN al NO. [LE 1]

I el segment FG és al GH com el temps MN al NO. [LE 1]

En conseqüència, és evident que CD és a DE com FG a GH.

[Ev 11] ♠

B.5*c* Dos «elements» fonamentals

Les dues proposicions següents, aparentment molt simples, són «elements» fonamentals per als objectius de la monografia.

B.5c_1 [LE 3] *Donada una col·lecció arbitrària de cercles, sempre podem aconseguir un segment rectilini més llarg que la suma de les seves circumferències.*

[*Demostració*.] Només cal que a cada cercle hi circumscrivim un polígon.

És evident que la suma dels perímetres[1012] és més llarga que la de les circumferències dels cercles. [ECi 1] ♠

1012. Podem portar cada perímetre sobre un segment rectilini. Només hem de sumar segments.

B.5c_2 [LE 4] *Considerem dues línies diferents, en concret, un segment rectilini i la circumferència d'un cercle. Podem trobar una línia més petita que la més gran de les donades i més gran que la més petita de les donades.*

[*Demostració.*] Prenem l'excés de la línia gran sobre la petita.

I l'afegim a si mateixa fins a superar el segment rectilini [donat].

[ECI, postulat 5 o el postulat enunciat al final de la introducció]

Ara, dividim el segment donat en tantes parts com vegades hàgim sumat l'excés a si mateix. [EVI 10]

Cada una de les parts d'aquests segments és més petita que l'excés.

[Nc 4′, adaptada]

a) Si la circumferència és més gran que el segment,[1013]

el segment resultant ho és més que el segment i, alhora, és més petit que la circumferència.[1014] ♠

b) Si la circumferència és més petita que el segment

i, a aquest hi afegim una part,

la suma també és més gran que la circumferència i més petita que el segment.[1015] ♠

Hem trobat, doncs, en tots dos casos, el segment intermedi. ♠

B.5*d* Una proposició per *neusi* ($\nu\epsilon\tilde{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$)

[LE 5] *Considerem un cercle i una tangent en un dels punts de la seva circumferència. Podem aconseguir un segment situat sobre la tangent* [*o la prolongació*] *amb un extrem al centre del cercle, de manera que la raó del segment limitat per la tangent i la circumferència sobre el radi és més petita que la de l'arc de circumferència* [*limitat pel punt de tangència i el segment que hem determinat*] *i la circumferència del cercle.*[1016]

1013. Disjunció de casos.

1014. Suposem que $c > r$. Cerquem n de manera que $n \times (c - r) > r$, o sigui que $\frac{r}{n} < c - r$. I, aleshores, $r < r + \frac{r}{n} < c$.

1015. Ara, $r > c$ i $n \times (r - c) > r$. O sigui, $\frac{r}{n} < r - c$. La línia intermèdia és $c + \frac{c}{n}$, ja que $c < c + \frac{c}{n} < r$.

1016. Figura LE 5: $\frac{HF}{KH} < \frac{\widehat{BH}}{\widehat{ABCA}}$. Compareu aquest problema amb el que tracta Galileu en la segona jornada de *Diàlegs sobre els dos grans*

Considerem el cercle $\bigcirc ABCA$ de centre K,
la tangent DF pel punt B
i un arc arbitrari de la circumferència.

[*Demostració*.] És possible trobar un segment rectilini més gran que aquest arc. [LE 3]

En diem E.

Pel centre K, tirem un segment AG paral·lel a[l segment tangent] DF. [EI 31]

Considerem el segment HG «inclinat» cap al punt A igual a E. [per *neusi*]

Prolonguem el segment KH. [Nc 1 i 2]

Aleshores, HF és a HK com BH a HG. [EI 15, EI 29 i EVI 4]

Per tant, la raó entre HF i HK és més petita que la que hi ha entre BH i l'arc donat,
ja que la corda BH és inferior a l'arc $\widehat{BH}$
i HG més gran que l'arc donat. [EV 8]

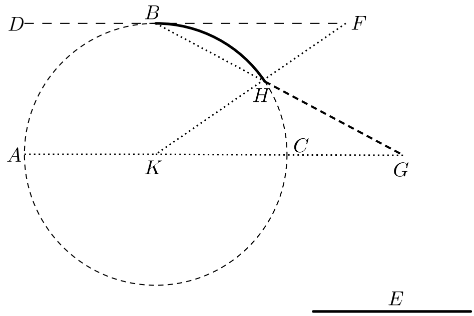


FIGURA LE 5

En definitiva, la raó que hi ha entre HF i el radi és més petita que la que hi ha entre l'arc $\widehat{BH}$ i l'arc donat. ♠

B.5*e* Les definicions relatives a l'espiral

Presentem, ara, les definicions relatives a la corba que justifica la monografia, l'espiral, que Arquimedes incorpora després de LE 5.

[LE, definicions]

1. Si un segment rectilini gira en un pla amb moviment circular uniforme al voltant d'un dels extrems, que es manté fix, fins a tornar a la situació inicial i, alhora, un punt d'aquest segment s'hi mou amb

sistemes del món. GALILEU (1632) a GALILEU (1890-1909), vol. II, p. 249-250. Per a una explicació més extensa i acurada, FRAJESE (1963), p. 77-82.

moviment rectilini uniforme, començant el moviment per l'extrem fix, llavors el punt descriu una espiral —*ἕλικα*— en el pla.

2. El punt immòbil és l'origen —*ἀρχα*— de l'espiral.

3. La posició inicial del segment que gira és el [segment] origen de la revolució —*ἀρχα τᾶς περιφορᾶς*.

4. El segment —*εὐθεῖα*—[1017] recorregut pel punt en la «primera revolució» és la *primera distància* —*εὐθεῖα πρώτα*—, i el que fa en la segona, *segona distància* —*εὐθεῖα δευτέρα*—, i així successivament, és a dir, els noms corresponen al de la revolució.[1018]

5. La superfície —*χωρίον*— limitada per l'espiral de la primera revolució i pel primer radi vector és la *primera superfície* —*χωρίον πρῶτον*—, la de la segona revolució i el segon radi vector, la *segona superfície* —*χωρίον δευτέρας*—, i així successivament.

6. Un radi vector distribueix [els punts] en *consegüents* —*ἑπόμενα*—, els que es troben a la banda cap on es fa el gir, i en *precedents* —*προαγούμενα*—, els de l'altra banda.

7. El *primer cercle* —*κύκλος πρῶπτος*— és el que té el centre a l'origen i com a radi el primer radi vector. El *segon cercle* ——*κύκλος δεύτερος*— té el mateix centre i com a radi el segon radi vector. I així successivament.[1019]

B.5*f* Una propietat de la tangent a l'espiral

Una tangent arbitrària de l'espiral[1020] no és mai una bitangent.

[LE 13] *Si un segment rectilini toca una espiral, ho fa per un sol punt.*

Considerem l'espiral ◡ $ABCD$

d'origen el punt A, i el segment AD que giravolta.

Suposem que el segment AD és tangent a l'espiral.

1017. Usarem el terme *radi vector*.

1018. El segment de la n-èsima revolució és la *n-èsima distància*.

1019. Anomenem *circumferència primera*, *segona*... les corresponents al primer, segon... cercle.

1020. Entenem el concepte de «tangent» en el sentit intuïtiu del terme: localment, el segment tangent no talla [ni toca] la corba en cap altre punt. Vegeu la nota 34 de Frajese (1974), p. 348.

Afirmo que aquest segment només toca [l'espiral] en un punt.

[*Demostració.*] Suposem que el segment la toca en dos punts C i G.[1021]

Considerem els segments AC i AG. [P 1]

Dimidiem l'angle de costats AC i AG. [EI 9]

Sigui H el punt en el qual la bisectriu talla l'espiral.

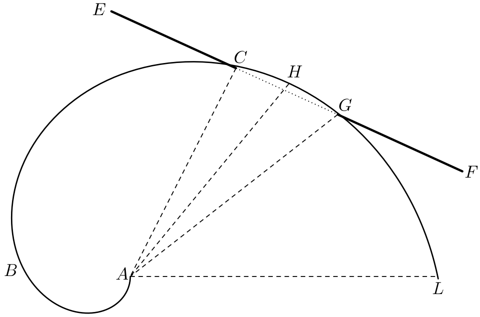


FIGURA LE 13

Aleshores, l'excés de AG sobre AH és igual al de AH sobre AC, ja que aquests segments determinen angles iguals entre si. [LE 12]

Així, la suma dels segments rectilinis AG i AC és el doble de[l segment] AH.

Però, com que AG i AC són els dos costats d'un triangle, la seva suma és més gran que el doble de AH, que és la bisectriu d'un angle seu.[1022]

Per tant, és obvi que el punt en el qual la línia AH talla el segment rectilini AG cau entre els punts H i A. [LE, definició 1]

Així doncs, el segment EF talla l'espiral perquè entre els punts del segment rectilini CG n'hi ha un en l'interior de l'espiral.

I algun altre cau dins l'espiral.

Abans hem suposat que el segment EF era tangent, però ara veiem que toca l'espiral en un sol punt.

I això és impossible. ♠

B.5*g* L'espiral rectifica la circumferència

p. 94 La proposició LE 18 mostra que, efectivament, l'espiral rectifica la circumferència i, de retruc, quadra el cercle (MC 3).

[LE 18] *Considerem el segment tangent a l'espiral per l'extrem de la primera volta. Pel centre, tirem una perpendicular al segment origen*

1021. Hipòtesi de l'absurd.

1022. Problema 15 (pàgina 159).

[de la revolució]. Veiem que talla la tangent [en un punt]. El segment limitat entre aquest punt i l'origen equival a la primera circumferència.

Considerem l'espiral ◡ $ABCDH$, d'origen el punt A i segment d'origen HA.

Siguin ○ HGK el primer cercle i HF el segment tangent a l'espiral pel punt H.

Pel punt A, tirem una perpendicular AF a[l segment] HA. [EI 11]

Aquesta perpendicular talla la tangent HF perquè els segments FH i HA formen un angle agut. [LE 16 i P 1][1023]

En diem F.

Volem demostrar que el segment perpendicular FA equival a la circumferència del cercle ○ HKG.

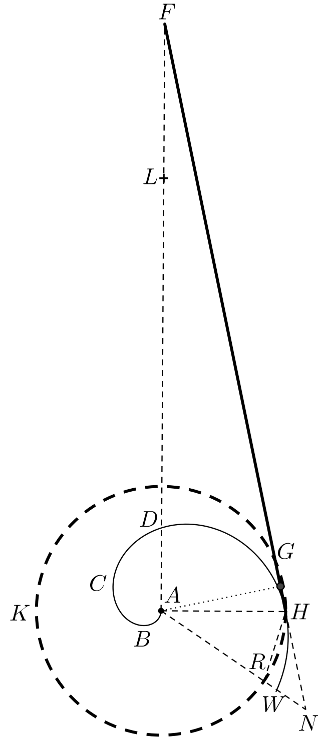


FIGURA LE 18*a*

[*Demostració*.] Perquè, si no ho fa,[1024] aleshores la circumferència és:

a) més gran, o *b*) més petita.[1025]

a) En primer lloc, disposem d'un segment LA més petit que FA i, alhora, més gran que la circumferència del cercle ○ HGK. [LE 4]

Disposem, doncs, d'un cercle ○ HGK i d'una corda HG més petita que el diàmetre. [EIII 7]

A més, la raó que hi ha entre HA i AL és més gran que la meitat de la que hi ha entre el segment GH i el perpendicular a HG pel punt A,

perquè la primera raó és més gran que la que hi ha entre HA i AF.[1026]

1023. En el § B.5*i* (pàgines 368-383), aplegarem les proposicions necessàries perquè aquesta demostració i la de LE 24 no tinguin llacunes.

1024. Hipòtesi de l'absurd.

1025. Disjunció de casos.

1026. Problema 30 (pàgina 164).

En conseqüència, per A tirem un segment NA cap a la prolongació de FH, de manera que la raó que hi ha entre el segment NR, que es troba entre la circumferència i la prolongació NR, i HR és igual a la de HA i AL. [LE 7]

Per tant, NR és a RA com HR a AL. [Ev 16][1027]

Però la raó que hi ha entre HR i AL és més petita que la de l'arc $\overset{\frown}{HR}$ i la circumferència del cercle $\bigcirc\, FHK$, [Dv 7]
perquè el segment GR és més petit que l'arc $\overset{\frown}{GR}$
i el segment AL, en canvi, és més gran que la circumferència del cercle $\bigcirc\, FHK$.

Així doncs, la raó entre NR i RA és més petita que la de l'arc $\overset{\frown}{HR}$ i la circumferència del cercle $\bigcirc\, FHK$. [Ev 13]

En conseqüència, la raó dels segments NA i AR és més petita que la de l'arc $\overset{\frown}{HR}$ juntament amb la circumferència del cercle $\bigcirc\, HGK$ i aquesta circumferència. [Ev 18, adaptada][1028]

Però la raó de l'arc $\overset{\frown}{HR}$ juntament amb la circumferència $\bigcirc\, FHK$ és a la $\bigcirc\, FHK$ com el segment WA a AH. [LE 15]

Així doncs, la raó que hi ha entre NA i AR és més petita que la que hi ha entre WA i AH. [Ev 13]

I això no pot ser perquè NA és més gran que AW, mentre que AR és igual a AH. [Di 15 i Dv 7]

En definitiva, el segment FA no és més gran que la circumferència del cercle $\bigcirc\, FHK$. ♠

b) En segon lloc, suposem que el segment FA és més petit que la circumferència del cercle $\bigcirc\, HGK$.[1029]

Prenem un segment AL més gran que AF
i, alhora, més petit que la circumferència del cercle $\bigcirc\, HGK$. [LE 4]

Pel punt H, tirem el segment HM paral·lel a AF. [Ei 31]

Disposem d'un cercle $\bigcirc\, FHK$,
una secant FH més petita que el diàmetre [Eiii 16, porisma]
i un segment tangent al cercle pel punt H.

1027. Atès que $GA = RA$ per la definició Di 15.

1028. És l'operació *componendo* [Ev 18] adaptada a la desigualtat de raons. Acceptarem que totes les operacions que admeten les proporcions es poden adaptar a la desigualtat entre raons.

1029. L'altra hipòtesi de l'absurd.

La raó que hi ha entre AH i AL és més petita que la de la meitat de GH i la perpendicular tirada pel punt A a HG, [Dv 7]
perquè la primera raó és més petita que la de HA i AF.

Per tant, pel punt A, podem tirar el segment AP
—amb l'extrem P a la tangent de la circumferència—,
de manera que el segment RN comprès entre la corda i el cercle[1030]
és a HP com GA a AL. [LE 8]

Així doncs, el segment AP talla el cercle pel punt R i l'espiral el punt W i, *alternando*, NR és a RA com HP a AL. [Ev 16][1031]

Però la raó que hi ha entre HP i AL és més gran que la de l'arc de circumferència $\widehat{HR}$ i la circumferència del cercle $\bigcirc FHK$, [Dv 7]
perquè el segment HP és més gran que l'arc $\widehat{HR}$
mentre que el segment AL és més petit que la circumferència del cercle $\bigcirc FHK$.

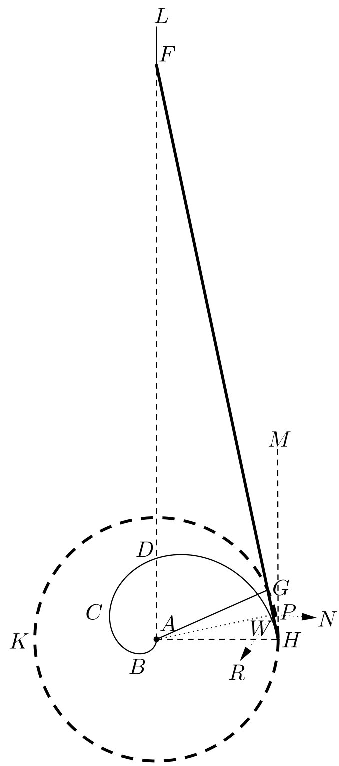


FIGURA LE 18b

Per tant, la raó dels segments PR i AR és més gran que la de l'arc $\widehat{HR}$ i la circumferència del cercle $\bigcirc FHK$. [Ev 13]

Així doncs, la raó que hi ha entre RA i AN també és més gran que la de la circumferència del cercle $\bigcirc FHK$ i l'arc $\widehat{HKR}$.[1032]

Però la circumferència del cercle $\bigcirc FHK$ és a l'arc $\widehat{HKR}$ com HA a AW. [LE 14]

1030. Atenció a la figura.

1031. Pel que fa als punts N, R i W, vegeu l'ampliació de la figura 18b en la figura 18c.

1032. Problema 35 (pàgina 167).

En conseqüència, la raó que hi ha entre RA i AN és més gran que la que hi ha entre AH i AW. [Ev 18, adaptada][1033]

I això és impossible. ♠

En definitiva, el segment FA no és ni més gran ni més petit que la circumferència del cercle $\bigcirc FHK$.

I el segment FA i la circumferència de $\bigcirc FHK$ són iguals.

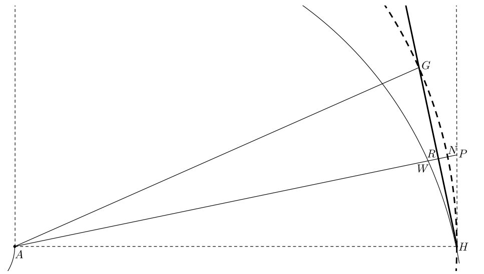


FIGURA LE 18*c* ♠

B.5*h* L'àrea limitada per la primera volta de l'espiral

p. 96 La proposició següent, LE 24, compara l'àrea de la primera volta de l'espiral amb la del primer cercle.[1034]

[LE 24] *L'àrea de la superfície escombrada pel radi vector durant la primera revolució equival a la tercera part del primer cercle.*

Siguin ◡ $ABCDEH$ la primera volta d'una espiral d'origen el punt H, HA el primer radi vector
i $\bigcirc AKFGI$ el primer cercle.

Considerem un cercle equivalent a la tercera part de l'àrea [tancada per l'espiral i el primer radi vector].

En diem $\bigcirc Z$.

Volem veure que l'àrea limitada per l'espiral equival a la del cercle $\bigcirc Z$.

[*Demostració.*] Si aquestes dues àrees no són equivalents,[1035]
l'àrea esmentada és *a*) més petita, o *b*) més gran.[1036]
a) Suposem, en primer lloc, que és més petita.

1033. Nota 1028 (pàgina 362). Ja no ho repetirem més.
1034. De retruc, aquesta àrea és tan «quadrable» com la del cercle.
1035. Hipòtesi de l'absurd.
1036. Disjunció de casos.

Circumscrivim, a l'àrea limitada per l'espiral $\circlearrowleft ABCDEH$ i el primer radi vector AH,
una figura plana composta d'àrees semblants, de manera que l'excés de la figura circumscrita sobre la superfície esmentada és més petita que l'excés del cercle $\bigcirc Z$ sobre aquesta mateixa superfície.

[LE 21, porisma]

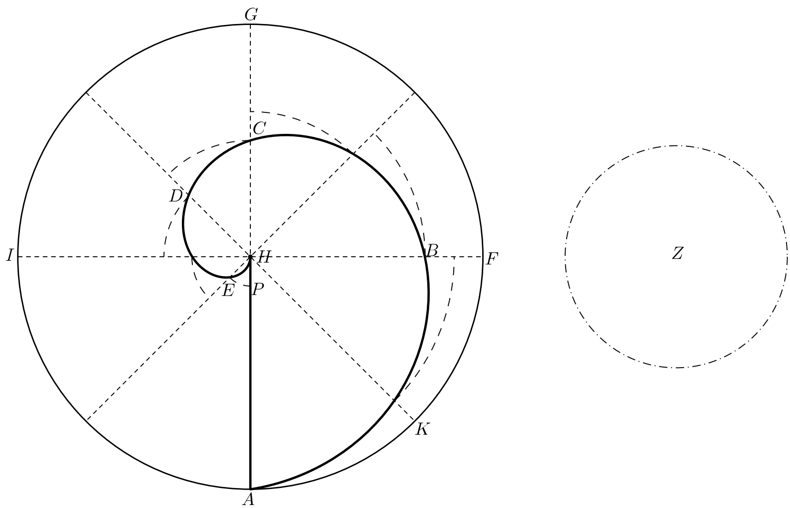


FIGURA LE 24*a*

Analitzem aquesta figura.

Siguin $\triangleleft HAK$ i $\triangleleft HEP$ els seus sectors circulars.

És obvi —*δῆλον*— que la figura circumscrita és més petita que la del cercle $\bigcirc Z$.[1037]

Prolonguem els segments[, que formen angles iguals al voltant de l'origen de l'espiral H,] fins a arribar al primer cercle. [P 2]

L'excés de cada un d'aquests segments d'extrems a H sobre el següent és el mateix,[1038] [LE 12]
essent HA el més llarg i HE el més curt.

La [suma] dels sectors circulars iguals als que té el costat més gran [és a dir, HA]

1037. És obvi que queda dins [Di 15].

1038. És a dir, formen una progressió aritmètica.

és més petita que el triple dels sectors construïts sobre els costats que s'excedeixen entre si, com ja hem demostrat abans —*δέδεικται γὰρ τοῦτο.* [LE 10, porisma]

Però la suma dels sectors [circulars] iguals al construït sobre el radi vector (més gran) equival a l'àrea del cercle ◯ $AFGI$.

I, en canvi, la suma dels sectors circulars sobre els radis vectors en progressió aritmètica proporciona la figura circumscrita.

Per tant, [l'àrea d]el cercle ◯ $AFGI$ és més petita que el triple de la [de la] figura circumscrita.

Però aquest cercle equival a tres vegades el cercle ◯ Z.

En conseqüència, ◯ Z és més petit que la figura circumscrita. [per transitivitat][1039]

Tanmateix, [hem suposat que] aquesta figura no és més petita, sinó més gran.

Per tant, l'àrea entre l'espiral ◡ $ABCDEH$ i el segment AH no és més petita que [la d]el cercle ◯ Z. ♠

b) Suposem, en segon lloc, que és més gran.[1040]

En la figura limitada per l'espiral ◡ $ABCDEH$ i el primer radi vector AH,

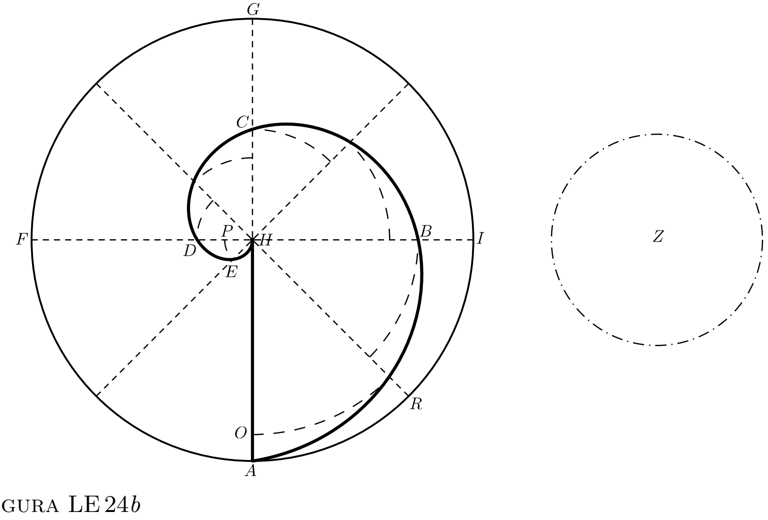


FIGURA LE 24*b*

1039. Aplicada a la desigualtat.

1040. Hipòtesi de l'absurd.

hi podem inscriure una figura de manera que la seva àrea sigui més gran que la figura inscrita en una àrea inferior a l'excés de la indicada sobre el cercle $\bigcirc Z$. [LE 21, porisma]

Ho fem.

Sigui $\lhd AHR$ el més gran de tots els sectors circulars i $\lhd PHE$ el més petit.

És obvi que la figura inscrita és més gran que el cercle $\bigcirc Z$.

Considerem els radis vectors des de l'origen que determinen angles iguals

i els prolonguem fins a la circumferència del primer cercle.

Com abans, aquests radis vectors decreixen en progressió aritmètica. [LE 12]

El primer radi vector HA, que uneix l'origen H i el final A de l'espiral, és el més llarg,

i HE, que coincideix amb la diferència que hi ha entre els radis vectors successius, el més curt.

A més, hi ha la mateixa quantitat de segments rectilinis que uneixen el punt H i la circumferència del cercle $\bigcirc AFGI$

[que de segments d'espiral determinats pels radis vectors].

Tots són iguals i més llargs que aquests radis.

Disposem, doncs, dels sectors circulars construïts amb aquests segments,

és a dir, els que són iguals entre si

i els que varien en progressió aritmètica.

Però hem demostrat —*δέδεικται γὰρ τοῦτο*— que la suma de les àrees [dels sectors] construïdes sobre els segments iguals és més gran que tres vegades la suma de les àrees construïdes amb els radis vectors que varien en progressió aritmètica. [LE 10, porisma]

Ara bé, la suma dels sectors construïts amb els segments iguals equival a [l'àrea d]el cercle $\bigcirc AFGI$,

mentre que la suma dels sectors construïts amb els radis vectors que varien en progressió aritmètica és la figura inscrita.

Per tant, el cercle $\bigcirc\, AFGI$ és més gran que el triple del cercle $\bigcirc\, Z$.
I, en conseqüència, el cercle $\bigcirc\, Z$ ho és més que la figura inscrita.
Però no ho és més, ja que hem suposat que era més petit.
Així doncs, l'àrea limitada per l'espiral $\circlearrowleft ABCDEH$ i el primer radi vector AH no és més gran que el cercle $\bigcirc\, Z$. ♠

En definitiva, el cercle $\bigcirc\, Z$ equival a la superfície limitada per l'espiral $\circlearrowleft ABCDEH$ i el primer radi vector AH. ♠

B.5*i* Els elements de LE 13, 18 i 24

En aquest paràgraf apleguem les proposicions necessàries per tal que LE 13, 18 i 24 no tinguin llacunes demostratives. En la taula B.1 indiquem, de manera succinta, aquestes dependències:

B.1. *Dependències internes en LE de LE 13, 18 i 24*

Proposició	*Paràgraf*	*Pàgines*	*Dependències*
LE 24	B.5h	364-368	LE 21 p, LE 12 i LE 10 p[1041]
LE 21 p	B.5$i_{8.1}$	383	LE 21
LE 21	B.5i_8	380-383	——
LE 18	B.5g	360-364	LE 16, 15, 14, 8, 7 i 4
LE 16	B.5j_1	378-380	LE 14 i 15
LE 15 e	B.5$i_{6.1}$	378	——
LE 15	B.5i_6	377-378	LE 2 i LE definició 1
LE 14	B.5i_5	376-377	LE 2 i LE definició 1
LE 13	B.5f	359-360	LE 12 i LE definició 1
LE 12	B.5i_4	375-376	LE definició 1 i LE 1
LE 10 p	B.5$i_{3.1}$	375-375	LE 10
LE 10	B.5i_3	372-375	——
LE 8	B.5i_2	370-371	——
LE 7	B.5i_1	369-369	——
LE 5	B.5d	357-358	LE 3
LE 4	B.5c_2	357-357	LE postulat
LE 3	B.5c_1	356	——
LE 2	B.5b_2	355-356	LE 1
LE 1	B.5b_1	354-355	LE postulat

1041. Els signes «p» i «e» indiquen que es tracta d'un «porisma» o d'un «escoli», respectivament, és a dir, LE 10p significa «LE 10, porisma», i

N'hi ha quatre que, com LE 5, es basen en la *neusi*. Són LE 6, 7, 8 i 9. Ara, de moment, donem només LE 7 i LE 8.

B.5i_1 [LE 7] *Considerem els mateixos objectes geomètrics que en la proposició anterior i prolonguem la corda. Tirem un segment que uneix el centre del cercle amb un punt d'aquesta prolongació, de manera que la raó del segment situat entre la circumferència i la prolongació del segment que queda entre la circumferència i l'extrem de la prolongació és donada. És possible fer-ho, si la prolongació és més gran que la distància que hi ha entre la meitat de la corda i la perpendicular a la corda tirada des del centre.*[1042]

Amb les mateixes dades de la proposició anterior, prolonguem la corda AC. [P 2]

Sigui la raó donada la que hi ha entre F i G,
que és més gran que la que hi ha entre HC i HK.

[*Demostració.*] De retruc, la raó que hi ha entre F i G és igual a la que hi ha entre el segment KC i un segment més petit que CL.

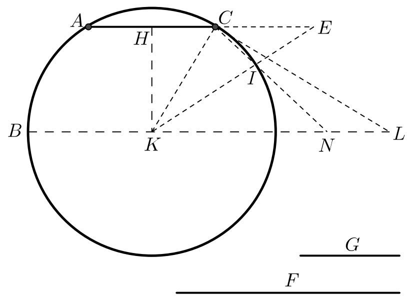


FIGURA LE 7 [Ev 10]

Sigui IN aquest segment.

El col·loquem en direcció al punt C [i entre la prolongació del radi BK i la circumferència del cercle donat].

Aquesta construcció és possible.[1043]

IN cau per sota del segment CL perquè IN és més curt.

Per tant, KC és a IN com F a G,
i EI és a IC com F a G.[1044] ♠

distingim en negreta les proposicions que considerem més rellevants. Les altres apareixen pel seu paper d'«elements» de les principals. El postulat es troba en la introducció (pàgina 354).

1042. És la proposició anterior. Però ara el punt E, en lloc de trobar-se en el segment AC, ho fa en la prolongació. És, doncs, una anàlisi per casos. També en aquest cas cal un diorisma.

1043. Novament usem la *neusi*.

1044. Com que KC i KI són iguals [Di 15], només cal tenir en compte

B.5i_2 [LE 8] *Donats un cercle, una corda seva més curta que el diàmetre,*[1045] *un segment tangent a la seva circumferència per l'extrem de la corda i una raó,* [*per neusi,*] *és possible tirar, pel centre de la corda, un segment cap a la circumferència, de manera que la raó que hi ha entre el segment que es troba entre la circumferència i la corda, i el segment de tangent és igual a la* [*raó*] *donada, si és més petita que la de la meitat de la corda i el segment perpendicular a aquesta pel centre del cercle.*[1046]

Considerem $\bigcirc ABCD$ el cercle,
CA una corda
i OL una tangent a la circumferència del cercle pel punt O.

Sigui la raó que hi ha entre F i G més petita que la dels segments CH i HK.

De retruc, també ho és més que la de CK i CL,
si tirem el segment paral·lel KL a AC. [EVI 4, EI 31, i EV 7 i 13]

[*Construcció.*] Considerem un segment CO de manera que CK és a CO com F a G.[1047]

Tracem la circumferència que passa pels punts K, L i O. [EIV 3] ♣

[*Demostració.*] Com que el segment OC és més llarg que CL i tots dos son perpendiculars a KC i OL, respectivament, podem tirar IN igual a MC sobre un segment orientat a K.[1048]

El rectangle de costats OI i IL és al de costats KE i IL com OI a KE, [EVI 1]

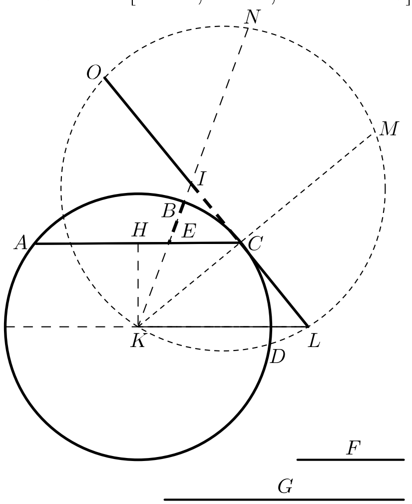


FIGURA LE 8

la semblança dels triangles $\triangle CIE$ i $\triangle KIN$ i aplicar EVI 4 i EV 7.

1045. Per EIII 15.

1046. Heus aquí el diorisma.

1047. Aquí cal recórrer a *Dades*.

1048. Per *neusi*.

i el de costats KI i IN al de costats KI i CL com IN a CL. [EVI 1]

Per tant, IN és a CL com OI a KE.

[EIII 35, EVI 4, EVI 17 i EV 7 o Nc 1 i EVI 1][1049]

Però CM és a CL com OC a KC, [EIII 35 i EVI 17]

i OC a KC com OC a KB [DI 15 i EV 7]

i com OI a KE. [EV 7 o Nc 1][1050]

I el residu IC és a BE com OC a CK,

[EV 16, EV 19, porisma, i EV 35]

que és la raó de F i G. [Nc 1 o EV 7]

En definitiva, hem determinat el segment KN que talla la tangent [LO],

de manera que la part BE compresa entre la circumferència i la corda és a la part IC del segment tangent com F a G. ♠[1051]

A LE 10, Arquimedes enuncia i demostra la proposició relativa a la suma dels quadrats dels termes d'una progressió aritmètica que, en la monografia CE, dona com un resultat evident, i tal com fa també amb el seu porisma, que estableix una fitació inferior de la suma dels quadrats que és superior a la de tots els quadrats menys el més gran. La fita és una tercera part del cub del més gran.[1052]

1049. Per EIII 35, $OI \times IL = KI \times IN$. Els triangles $\triangle KIL$ i $\triangle EIC$ són semblants [EVI 4]. Així doncs, $\frac{KE}{KI} = \frac{CL}{IL}$ i, de retruc, $KE \times IL = KI \times CL$ [EVI 17]. Per tant, $\frac{IL \times IO}{KE \times IL} = \frac{KI \times IN}{KI \times C}$ [EV 7]. I, aleshores, [EVI 1] $\frac{OI}{KE} = \frac{IN}{CL}$.

1050. Per hipòtesi, IN i CM són iguals. Per tant, $\frac{OI}{KE} = \frac{CM}{CL}$ [EV 7 i nota 1049]. Tenim que $CM \times CK = CL \times OC$ [EIII 35]. En conseqüència, $\frac{CM}{CL} = \frac{OC}{KC}$ [EV 11]. Per tant, $\frac{OC}{KC} = \frac{OI}{KE}$ [EV 11 o Nc 1]. Ara bé, KC i KB són iguals [DI 15] i d'això es dedueix que $\frac{OC}{KC} = \frac{OC}{KB}$ [EV 7]. Per tant, $\frac{CM}{CL} = \frac{OC}{KB} = \frac{OI}{KE}$ [EV 7, i EV 11 o Nc 1], com diu el text.

1051. *Alternando*, $\frac{OC}{OI} = \frac{KB}{KE}$ [EV 16]. D'això es dedueix que: $\frac{OC}{OC-OI} = \frac{KB}{KB-KE}$ [EV 19, porisma]. O sigui, que $\frac{OC}{IC} = \frac{KB}{BE}$. Però KB i CK són iguals [DV 15]. En conseqüència, $\frac{OC}{IC} = \frac{KC}{BE}$ [Nc 1 o EV 7]. *Alternando*, novament, tenim que $\frac{IC}{BE} = \frac{OC}{KC}$ [EV 16]. Ara bé, per hipòtesi, $\frac{F}{G} = \frac{KC}{OC}$ i, en definitiva, $\frac{G}{F} = \frac{IC}{BE}$ [EV 11 o Nc 1], tal com dèiem.

1052. Proposem la demostració d'aquesta proposició i la de LE 11 (pàgines 386-390), en llenguatge actual, en el problema 34 (pàgina 166).

B.5i_3 [LE 10] *Considerem una primera col·lecció de segments en la qual cada un excedeix el següent el més petit de tots. Els posem [junts] l'un darrere l'altre. Prenem una altra col·lecció de segments amb la mateixa quantitat d'elements que la primera i tots iguals al més gran. [La suma d]*[1053] *els quadrats de la segona col·lecció juntament amb el quadrat del segment més gran i el rectangle de costats el més petit [de la primera, és a dir, l'excés] més la suma de tots [els de la primera] equival a la suma dels quadrats d'aquests darrers.*[1054]

Considerem una col·lecció arbitrària de segments següents $A, B, C, D,$ E, F, G i H,

cada un [començant per H] igual a l'anterior més l'excés [que coincideix amb el més petit] H.

Els col·loquem l'un darrere l'altre.

Al segment B hi afegim I igual a H. A C, K igual a G. A D, L igual a F. A E, M igual E. A F, N igual a D. A G, O igual a la línia C. I, finalment, a H [hi afegim] P igual a B.

Tots els segments que obtenim amb aquestes sumes són iguals al més gran [dels donats inicialment].

Volem demostrar que la suma dels quadrats de tots aquests segments,

és a dir, la suma del quadrat de A i els quadrats de les rectes resultants d'aquesta suma,

juntament amb el quadrat de A

més el rectangle de costats H, i el segment que obtenim ajuntant-los,

equival al triple de la suma dels quadrats que els tenen com a costats.

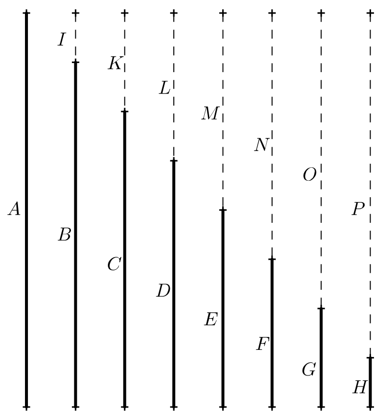


FIGURA LE 10

[*Demostració.*] Això és així perquè el quadrat de costat [els segments] B i I junts equival a la suma dels quadrats de costats I i B,

1053. Arquimedes diu: «juntament» en lloc de «la suma de» que hem adoptat perquè clarifica el text.

1054. Nota 1084.

juntament amb el doble del rectangle de costats B i I. [EII 4][1055]

I els quadrats de costats [els segments] K i C junts equivalen als quadrats de costats K i C juntament amb el doble del rectangle de costats K i C. [EII 4]

De manera anàloga, les sumes dels quadrats de les altres línies iguals a A equivalen a les sumes dels quadrats dels seus components juntament amb el doble del rectangle de costats aquests mateixos segments.

Però la suma dels quadrats de costats els segments A, B, C, D, E, F, G i H, els construïts sobre I, K, L, M, N, O i P i el quadrat de A equival a la dels dobles dels quadrats de costats A, B, C, D, E, F, G i H.[1056] [Nc 1] ♠

Queda per a demostrar, doncs, que la suma dels dobles dels rectangles de costats les parts dels segments en les quals han quedat dividits els segments iguals a A,
juntament amb el rectangle de costats el segment H i el compost de tots els segments [junts] A, B, C, D, E, F, G i H,
equival als quadrats de costats A, B, C, D, E, F, G i H junts.

Sabem que el doble del rectangle de costats B i I és igual a dues vegades el de costats B i H,
el doble del de costats K i C ho és al de costat H i l'altre costat a quatre vegades [el segment] C[, ja que K és el doble de H],
el doble del de costats L i D equival al de costat H i l'altre, sis vegades [el segment] D[, ja que L és el triple de H],
i, anàlogament, els dobles dels rectangles que resten, de costats les parts [en les quals hem dividit els segments iguals a A],
equivalen al de costats H i un múltiple [d'acord amb la successió dels nombres parells] del segment següent. [EVI 1]

Per tant, tots aquests rectangles dobles juntament amb el rectangle de costats H i la suma de A, B, C, D, E, F, G i H junts

1055. Fixem-nos que, de fet, és una demostració algebraica però sense formalisme. Diu: $(m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2\,m\,n$.

1056. Observeu que $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2+G^2+H^2+I^2+K^2+L^2+M^2+N^2+O^2+P^2+A^2 = 2\,(A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2+G^2+H^2)$, ja que $I=H, K=G, L=F, M=E, N=D, O=C$ i $P=B$.

equivalen al de costats H i el segment compost [pel segment] A, el triple de B, el quíntuple de C i els segments successius multiplicats pels nombres imparells successius.[1057]

Però la suma dels quadrats de costats A, B, C, D, E, F, G i H també és igual a aquest rectangle,
perquè el quadrat de A ho és al rectangle de costats H i el segment als segments iguals a A,[1058]
és a dir, el segment compost de tants [segments] A com parts conté H,
ja que el segment H és tantes vegades part de A
com A ho és de la suma de A més els segments iguals a aquest.

Per tant, el quadrat de A equival al rectangle de costats el segment H i el compost de A més dues vegades la suma dels segments B, C, D, E, F, G i H,
perquè la suma dels segments iguals a A, llevat d'aquest, equival al doble de la suma dels segments B, C, D, E, F, G i H.[1059]

Anàlogament, el quadrat de costat B és igual al de costat H més el segment compost per B i el doble dels segments C, D, E, F, G i H.

I el de costat C equival al de costats H més el doble dels segments D, E, F, G i H.

Pel mateix motiu, els quadrats dels segments restants són iguals als rectangles de costats H més el doble d'aquests junts.

De fet, doncs, és evident que la suma dels quadrats de tots aquests segments equival al rectangle de costats H més el segment compost de totes aquestes línies,
és a dir, el segment compost de A, tres vegades B, cinc C, i així successivament amb els segments que falten. ♠ ♠[1060]

1057. És el resultat d'un simple càlcul. És a dir, $\mathcal{S}+H\,(A+B+C+D+E+F+G+H) = H\;(A+3\,B+5\,C+7\,D+9\,E+11\,F+13\,G+15\,H)$, en què $\mathcal{S} = 2\,B\times I+2\,C\times K+2\,D\times L+2\,E\times M+2\,F\times N+2\,G\times O+2\,H\times P$.

1058. Dit d'una altra manera, $A^2 = H\,\big(A+(B+I)+(C+K)+(D+L)+(E+M)+(F+N)+(G+O)+(H+P)\big) = H\times 8\,A = \frac{A}{8}\times 8\,A$, ja que $\frac{H}{A} = \frac{A}{8\,A}$.

1059. Això és degut al fet que aquests segments formen una progressió aritmètica, és a dir, $B+H = A, C+K = A, D+L = A$, etc.

1060. És aconsellable refer aquesta demostració amb un llenguatge for-

B.5$\boldsymbol{i}_{3.1}$ [LE 10, porisma] *A partir del que acabem d'exposar, és evident que:* a*) la suma dels quadrats de costats iguals al segment més gran és més petita que tres vegades la suma dels quadrats de costats els segments desiguals —que augmenten una mateixa quantitat— perquè, si hi sumem determinats segments, equival a aquestes tres vegades, i que*[1061] b*) la suma dels quadrats és més gran que aquesta segona suma si hi traiem el quadrat del segment més gran perquè allò que afegim a la primera és inferior a tres vegades això que traiem.*[1062]

Si fem figures semblants sobre els segments, tant en el cas dels que creixen un segment donat com en el dels que són iguals al més gran, la suma de les figures sobre segments que són iguals és inferior al triple de la suma de les figures sobre els segments desiguals,
però és superior al triple d'aquesta darrera suma, si hi descomptem el triple de la figura semblant sobre el segment més gran,
ja que les figures semblants tenen entre si la mateixa raó que els quadrats.[1063]

I ara donem les proposicions LE 12, 14, 15, 15e, 16, 21 i 21p que clouen el contingut de la taula B.1 (pàgina 368).

B.5$\boldsymbol{i}_4$ [LE 12] *En la primera volta d'una espiral, considerem un cert nombre de radis vectors, cada un formant el mateix angle amb el següent. L'excés de cada un d'aquests sobre l'anterior és el mateix.*

Considerem una espiral en la qual els segments rectilinis [radis vectors] AB, AC, AD, AE i AF formen angles iguals entre si.

Volem demostrar que l'excés de AC sobre AB és igual a l'excés de AD sobre AC, i així successivament.

[*Demostració.*] En el temps que triga el radi vector a anar de AB a AC,

---

mal. Aleshores, resulta simple, clara i evident. Problema 33 (pàgina 166).

1061. En clara referència a $A^2 + H\,(A + B + C + D + E + F + G + H)$.

1062. És a dir, $A^2 + (A + B + C + D + E + F + G + H) \times H < 3\,A^2$. En efecte, hem vist que $A^2 = (A + 2\,B + 2\,C + 2\,D + 2\,E + 2\,F + 2\,G + 2\,H) \times H$. Per tant, $A^2 < (A + B + C + D + E + F + G + H) \times H$. Així doncs, $A^2 + (A + B + C + D + E + F + G + H) \times H < 3\,A^2$. Mugler (1971*a*), nota 2, p. 198.

1063. Vegeu Evi 20.

el punt [mòbil del segment] recorre l'excés que hi ha entre AC i AB.

I en el temps que triga el radi vector a anar de AC a AD,
l'excés que hi ha entre AD i AC.

Ara bé, el radi vector va de [la posició] AB a [la] AC
i de [la] AC a [la] AD en el mateix temps
perquè els angles són iguals.[1064]

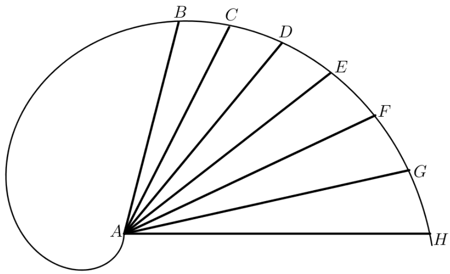


FIGURA LE 12

I, en aquest temps, el punt del segment que giravolta
recorre l'excés que hi ha entre AC i AB i entre AD i AC.

[LE, definició 1]

Per tant, l'excés entre AC i AB és igual a l'excés entre AD i AC.

[LE 1]

I així successivament. ♠

B.5*i*$_5$ [LE 14] *Considerem dos radis vectors de la primera volta d'una espiral. Els prolonguem fins a la circumferència del primer cercle. Aleshores, els radis vectors són entre si com els arcs circulars presos des de l'origen de l'espiral seguint la direcció del moviment.*

Considerem la primera volta de l'espiral ◡ $ABCDEH$.

Siguin A l'origen,
AH el primer radi vector i ○ HKG el cercle que correspon al primer vector [o a la primera volta].

Considerem els radis vectors AE i AD.

Els prolonguem fins a la primera circumferència,
és a dir, fins als punts F i G. [P 2]

Volem veure que AE és a AD com $\widehat{HKF}$ a $\widehat{HKG}$.

[*Demostració*.] És evident que, quan el radi vector AH gira
i el punt H descriu la circumferència del cercle ○ HKG a velocitat constant,

1064. I el moviment és uniforme —ἰσοταχέως.

el punt A, que es mou en el segment que gira, recorre el segment AH. [LE, definició 1]

I, mentre el punt H recorre l'arc $\widehat{HKF}$,
el A recorre el segment AE.

I també, mentre el punt A recorre el segment AD,
el punt H recorre l'arc $\widehat{HKG}$, [LE definició 1]
i cada un dels moviments és uniforme.[1065]

Però hem demostrat abans que AE és a AD com l'arc $\widehat{HKF}$ al $\widehat{HKG}$. [LE 2]

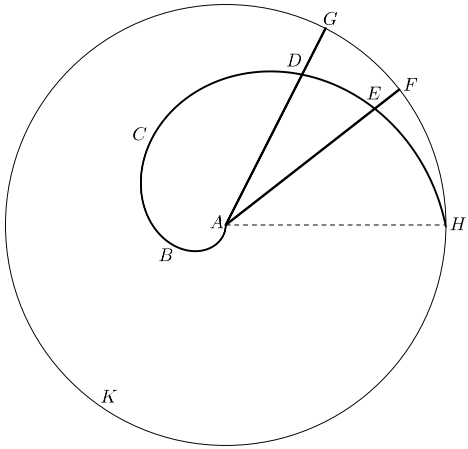


FIGURA LE 14

I el mateix establim per a cada radi vector de l'espiral. ♠

B.5*i*₆ [LE 15] *Considerem dos radis vectors de la segona volta d'una espiral. Els prolonguem fins a la circumferència del primer cercle. Aleshores, els radis vectors són entre si com els arcs circulars presos des de l'origen de l'espiral juntament amb una circumferència sencera del cercle.*

Considerem l'espiral ◡ $ABCDHLEM$,
en la qual la part ◡ $ABCDH$ és la descrita en la primera revolució i l'altra part ◡ $HLEM$, la descrita en la segona,
i, dins l'espiral, els radis vectors AE i A.

Volem demostrar que AD és a AE[1066] com l'arc $\widehat{HKF}$ juntament amb una circumferència completa del cercle és a l'arc $\widehat{HKG}$ juntament amb una circumferència completa del cercle.

[*Demostració*.] Mentre el punt A, que viatja en línia recta, recorre el segment AL en el mateix temps que [el punt] H es mou per una circumferència sencera del cercle i l'arc $\widehat{HKF}$,

1065. Es fa amb velocitat constant segons LE, definició 1.
1066. El text grec diu: *τὸν αὐτὸ λόγον*.

el segment AE recorre una circumferència sencera del cercle i l'arc $\widehat{HKG}$. [LE, definició 1]

Però aquests dos punts es mouen a una velocitat uniforme. [LE, definició 1]

És evident, doncs, que AL és a AE com l'arc $\widehat{HKF}$ juntament amb una circumferència completa del cercle és a l'arc $\widehat{HKF}$ juntament amb una circumferència completa del cercle. [LE 2] ♠

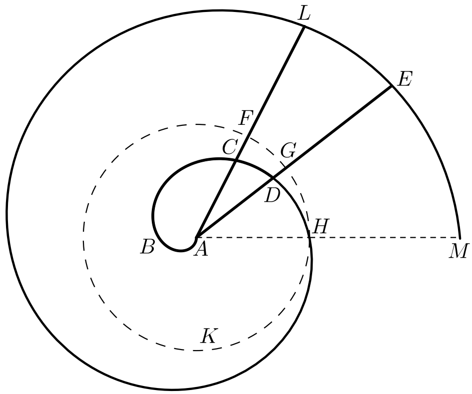


FIGURA LE 15

B.5$\boldsymbol{i}_{6.1}$ [Escoli a LE 15] *Els radis vectors corresponen a la tercera revolució de l'espiral són entre si com els arcs abans esmentats juntament amb el doble de tota la circumferència del cercle. I els que corresponen a altres revolucions de l'espiral són entre si com els arcs abans esmentats, juntament amb tantes vegades la circumferència del cercle com revolucions hem considerat, fins i tot si un dels radis vectors cau al final de l'espiral.* ♠

B.5$\boldsymbol{i}_7$ [LE 16] *Considerem una tangent a un punt de la primera revolució d'una espiral. El radi vector que uneix l'origen de l'espiral i el punt de tangència determina* [*en la tangent*] *dos angles diferents,*[1067] *l'angle que és al costat dels precedents és obtús i el que està al costat dels consegüents, agut.*

Considerem els punts A, B, C, D i H de la primera volta de l'espiral
◌ $ABCDH$,
amb A com a origen,
el segment AH el primer radi vector
i ◯ HKG el primer cercle.

Sigui EDF la tangent a l'espiral pel punt D.

Unim DA. [P 1]

1067. És a dir, a diferència de la circumferència, el radi vector no és perpendicular a la tangent en el punt de tangència.

Volem demostrar que:

a) Els segments DF i DA formen un angle obtús.

[i b) L'angle residu $\widehat{ADE}$ és agut.]

[*Demostració*.] a) Considerem el cercle $\bigcirc\, DTN$ de centre A i radi —*διάστημα*— AD.

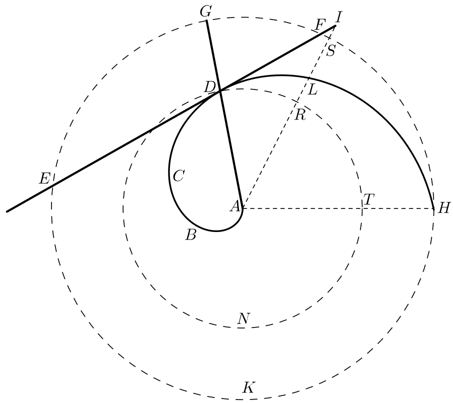


FIGURA LE 16

És evident que els punts de l'arc de circumferència que es troben a la banda del punts «precedents»[1068] cauen dins de l'espiral, mentre que tots els que es troben a la banda dels punts «consegüents» no ho fan,

perquè els radis vectors de l'espiral en els punts «precedents» són més llargs que el radi AD,

i en els punts «consegüents», més curts.

a_1)[1069] L'angle $\widehat{ADF}$ no és agut

perquè és més gran que l'angle del semicercle.[1070] ♠

a_2) Però tampoc no és recte.

Si ho és,[1071]

la recta EDF tangent a l'espiral pel punt D també ho és al cercle $\bigcirc\, DTN$. [EIII 16, porisma]

Per tant, per l'origen A, podem tirar un segment a la tangent de manera que la raó del segment que queda entre aquesta i la circumferència i el radi —*ἐκ τοῦ κέντρου*— del cercle

1068. LE, definició 6 (pàgina 359).

1069. Disjunció de casos.

1070. Ítem α de l'edició francesa de Remacle: «L'angle del semicercle és l'angle format pel diàmetre i la circumferència. EIII 18 estableix que l'angle del semicercle és més gran que qualsevol angle rectilini agut.»

1071. Hipòtesi de l'absurd.

és més petita que la de l'arc de cercle d'extrems el punt de tangència i el segment traçat amb un cert arc donat per endavant. [LE 5]

Tirem, doncs, el segment AI.

Talla l'espiral pel punt L i la circumferència pel R.

I, en conseqüència, tenim que la raó que hi ha entre RI i AR és més petita que la que hi ha entre $\widehat{DR}$ i $\widehat{DNT}$.

I, *componendo*,[1072] la que hi ha entre IA i AR també ho és més que la que hi ha entre $\widehat{RDNT}$ i $\widehat{DNT}$.

O sigui, la raó de IA i AR ho és més que la de $\widehat{SGKH}$ i $\widehat{GKH}$. [EVI 33]

Però els arcs $\widehat{SGKH}$ i $\widehat{GKH}$ són entre si com els radis vectors AL i AD. [LE 14]

En conseqüència, la raó que hi ha entre IA i AR és més petita que la que hi ha entre AL i AD.

I això és impossible, ja que AR i AD són iguals. [DI 15 o EV 8][1073]

Per tant, l'angle $\widehat{ADF}$ no és recte. ♠

Però hem vist que tampoc no és agut.

En definitiva, doncs, és obtús. [DI 11 i 12] ♠

b) I, conseqüentment, l'angle residu $\widehat{ADE}$ és agut. [EI 32] ♠

De manera anàloga, podem demostrar aquest resultat quan el punt de tangència és el punt final de la primera volta de l'espiral, és a dir, el punt H.[1074] ♠

B.5*i*₈ [LE 21] *Considerem la superfície limitada per la primera volta d'una espiral i el primer radi vector. Hi podem circumscriure una figura plana i inscriure-n'hi una altra de manera que l'excés de la figura circumscrita sobre la inscrita és més petit que qualsevol superfície donada per endavant.*

Considerem una espiral.

Siguin $\circlearrowleft ABCD$ la part descrita en la primera revolució, el punt H l'origen de l'espiral,

---

1072. Apliquem l'operació *componendo* [EV 18] a una desigualtat de raons.

1073. FRAJESE (1974), p. 353.

1074. Problema 33*a* (pàgina 166). La proposició LE 17 estableix el mateix resultat en la segona volta. Problema 33*b* (pàgina 166).

AH el primer radi vector [de l'espiral] de la revolució i $\bigcirc\, FGIA$ el primer cercle de diàmetres perpendiculars entre si AH i FI.

Si dimidiem un angle recte [EI 9]

i seguim dimidiant els sectors que obtenim, [EI 9]

al final queda un sector més petit que la superfície donada per endavant. [EX 1]

Sigui $\lhd\, AHK$ el sector limitat més petit que la magnitud donada.

Ara dividim els quatre angles rectes en angles iguals al de costats AH i HK. [EI 23]

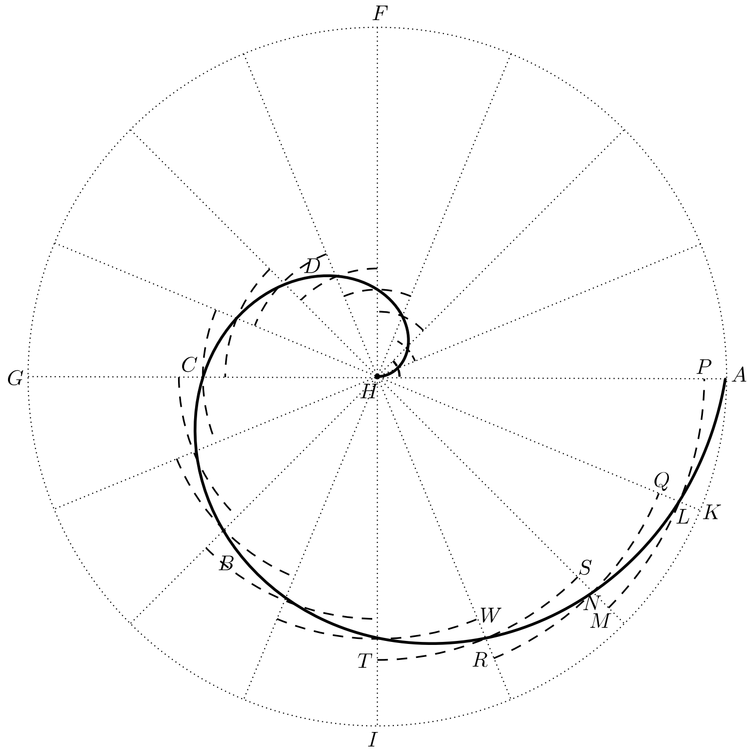


FIGURA LE 21

Prolonguem[, si cal,] els segments que inclouen aquests angles fins a l'espiral. [P 2]

Sigui L el punt en el qual el segment HK la interseca.

Amb centre a[l punt] H i radi —*διάστημα*— HL, tirem un cercle. [P 3]

La part de la circumferència d'aquest cercle que es troba a la banda dels «precedents» cau dins l'espiral
i la part que es troba en la dels «consegüents», fora.

Tirem l'arc [d'aquesta circumferència] $\widehat{PLM}$ limitat pels punts P i M dels radis [de la primera circumferència] HA
i per l'arc de radi HK limitat pels radis que passen per P i M.

Sigui N el punt en el qual el radi HM talla l'espiral.

Amb centre en el punt H i radi HN, tracem un arc de circumferència
fins a trobar el segment HK i l'arc següent.

I, de la mateixa manera, amb centre en el punt H, descrivim els arcs que passen pels altres punts en els quals els segments que formen angles iguals tallen l'espiral,
de manera que cadascun d'aquests arcs es troba limitat per [un punt d]el segment que precedeix i un que segueix [el radi amb el qual es determina].

[Un cop fet això,] tenim una figura formada per sectors similars inscrits en la superfície [de l'espiral] que considerem
i una altra de circumscrita.

Volem demostrar que l'excés de la figura circumscrita sobre la inscrita és més petit que qualsevol superfície proposada.

I ho fem així.

[*Demostració*.] Les parelles de sectors circulars $\lhd HLP$ i $\lhd HML$,
$\lhd HNQ$ i $\lhd HNR$,
$\lhd HWS$ i $\lhd HWT$ són iguals,
i cadascun dels altres sectors de la figura inscrita és igual al sector de la circumscrita
amb el qual comparteix costat.

D'això es dedueix clarament —δῆλον— que tots els primers sectors són iguals a tots els segons
i tots els segons als primers.

Així doncs, la figura inscrita en la primera espiral és igual a la figura circumscrita a la mateixa superfície menys el sector circular $\lhd AHK$, perquè aquest sector és l'únic de la figura circumscrita que hem considerat.

Per tant, és obvi que l'excés de la figura circumscrita sobre la figura inscrita és igual al sector $\lhd AHK$, que és més petit que la superfície donada per endavant.[1075] ♠

B.5*i*$_{8.1}$ [LE 21, porisma] *Per tant, podem circumscriure a la superfície indicada una figura com la que hem descrit, de manera que l'excés de la figura circumscrita sobre la inscrita és més petit que la superfície donada.* ♠

B.5*j* La resta de proposicions de LE

Ara, com ja hem dit abans, completarem aquesta monografia amb les proposicions que han quedat fora de la nostra presentació metodològica i didàctica; les escollim per la importància matemàtica que els atribuïm. De fet, es tracta de LE 6, 9, 11, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 27 i 28.

B.5*j*$_1$ Les dues primeres proposicions —LE 6 i LE 9— són casos en els quals Arquimedes aplica la *neusi*, com a LE 5, 6 i 7.

B.5*j*$_{1.1}$ [LE 6] *Donat un cercle i, en aquest, un corda més petita que el diàmetre, és possible tirar un segment, des del centre a la circumferència, que talla la corda de manera que la raó del segment situat entre la circumferència i la corda, i el segment que uneix l'extrem del segment incident —l'extrem que és a la circumferència—*[1076] *és una raó donada inferior a la de la meitat de la corda i el segment perpendicular a la corda des del centre.*[1077]

Considerem un cercle $\bigcirc ABC$ de centre K i, [EIII 1]
en aquest, una corda AC més petita que el diàmetre. [EIV 1]

1075. És a dir, amb divisions successives de l'angle, obtenim una àrea més petita que una de donada.

1076. Es tracta del segment que uneix un cap de la corda amb l'extrem d'un radi que la talla.

1077. La proposició està sotmesa a un diorisma. Atesa la complexitat de l'enunciat, vegeu l'explicació del text que ve tot seguit.

La raó entre [els segments] F i G és més petita que la que hi ha entre CH i KH,
essent KH la perpendicular a AC per K.[1078] [EI 12]

[*Construcció*.] Pel centre, tirem [els segments] KN paral·lel a AC [EI 31]
i CL perpendicular a KC. [EI 11]

Els triangles $\triangle CHK$ i $\triangle CKL$ són semblants. [EI 29, DVI 1 i EVI 4]

Per tant, CH és a KH com KC a CL. [EVI 7]

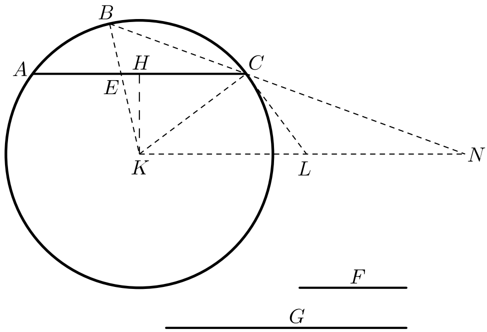


FIGURA LE 6

I, en conseqüència, la raó que hi ha entre F i G és més petita que la de KC i CL. [EV 13]

Així doncs, la raó de F i G és la de HC i un segment més gran que CL. [EV 10]

Suposem que aquest segment és BN.

És a dir, F és a G com KC a BN.

Ara col·loquem aquest segment de manera que passa per C i queda situat entre la circumferència i el segment [KN].

Això podem fer-ho.[1079] ♣

[*Demostració*.] El segment [BN] cau més enllà de[l segment] CL ja que és més llarg que aquest.[1080]

Per tant, com que BK és a BN com F a G, [DI 15 i EV 7]
el segment EB és a BC com F a G. [EVI 4, i NC 1 o EV 11] ♠

B.5$j_{1.2}$ [LE 9][1081] *Amb les mateixes dades que en la proposició anterior, prolonguem la corda donada. Pel centre de la circumferència, po-*

1078. I, de retruc, H és el punt mitjà de la corda [EIII 3].

1079. Aquí Arquimedes accepta la *neusi* com una eina idònia en les construccions geomètriques.

1080. Problema 32 (pàgina 166).

1081. És una proposició anàloga a LE 8 però ara elsegment KN, pel centre K, no talla la corda, sinó la seva prolongació. També cal recórrer aquí a *dem tirar un segment vers la prolongació de manera que la raó del segment comprès entre la circumferència i la prolongació de la corda, d'una banda, i, de l'altra, la tangent a partir del punt de contacte és donada. Això és possible sempre que aquesta raó sigui més gran que la que hi ha entre la meitat de la corda i el seu apotegma* [*és a dir, la perpendicular tirada a la corda pel centre*].[1082]

Considerem el cercle $\bigcirc ABCD$

i, pel punt C, tracem la corda CA inferior al diàmetre. [P 1]

Sigui OC la tangent a la circumferència del cercle pel punt C. [EIII 18]

Considerem dos segments F i G amb una raó més gran que la de CH i HK. [DV 7]

De retruc, aquesta raó també ho és més que la de KC i CL. [EVI 4 i EV 13]

[*Demostració.*] I ho fem de manera que KC és a CO com F a H.

D'això en resulta que el segment CO és més curt que el CL. [EV 10]

Considerem, ara, la circumferència que passa pels punts O, K i L. [EIV 5]

Atès que el segment OC és més curt que el CL

i que els KM i OC són perpendiculars,

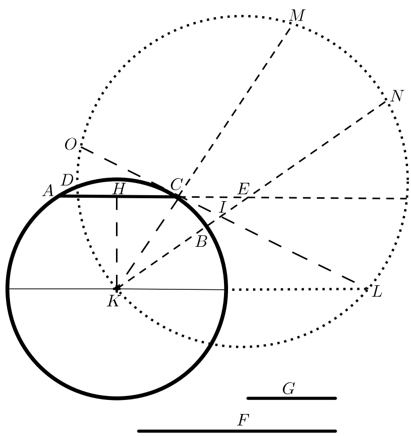


FIGURA LE 9

és possible determinar un segment IN igual a CM i orientat vers el punt K.[1083]

Ara bé, el rectangle de costats OI i IL és al de costats LI i KE, com el segment OI al KE, [EVI 1]

la *neusi*. Remetem a la nota 10, FRAJESE (1974), p. 331-332.

1082. Heus aquí el diorisma.

1083. Per *neusi*. Vegeu EECKE (1960), vol. I, p. 47.

els de costats OI i IL, i KI i IN són equivalents [EIII 35]
i també ho són els de costats KI i CL i LI i KE
perquè K és a KI com CL a LI. [EVI 4 i EV 18]

En conseqüència, el segment OI és al KE com el rectangle de costats KI i IN al de costats KI i CL [EV 11 o NC 1]
i, de retruc, el segment OI és al KE com el NI al CL, [EVI 4]
i com CM a CL. [EV 7]

Però tenim que el segment CM és al CL com CO al KC i com OC a KB. [EIII 35, EVI 16, EV 7 i DI 15]

Finalment, doncs, el segment OI és al KE com el OC al KB [EV 11]
i, en conseqüència, la raó dels romanents IC i BK és igual a la de OC i CK. [EV 7, DI 15, EV 16 i EV 17]

Ara bé, OC és a CK com F a G
i, per tant, el segment KE talla la prolongació de la corda pel punt E, ♠

i el segment BE, situat entre el AE i la circumferència del cercle de centre K, és al segment IC de la tangent con F a G.

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.5*j*₂ La proposició LE 11, que, com la LE 10, és aritmètica, proporciona una fita inferior a la raó de la suma de tants termes com el més gran i una d'inferior a la de la suma de tots menys el més petit i de tots menys el més gran.[1084] Val la pena indicar per endavant que, en no disposar d'un llenguatge idoni —més algebraic—, la demostració és molt feixuga.[1085]

B.5$j_{2.1}$ [LE 11] *Considerem una col·lecció de segments en la qual cada un excedeix el següent un mateix segment i una altra col·lecció amb un element menys que l'anterior i amb tots els membres iguals al segment més gran.* a*) La raó que hi ha entre els quadrats de costats els termes de la segona col·lecció junts i els de la primera menys el darrer és més petita que la que hi ha entre el quadrat de costat el segment més gran i el rectangle de costats el segment més gran i el més petit* [*de la pri-*

1084. Proposem les demostracions, en llenguatge actual, en el problema 33 (pàgina 166).

1085. Nota 1091 (pàgina 390).

mera col·lecció] i una tercera part del quadrat de la diferència dels costats [del rectangle]. b*) La raó que hi ha entre els quadrats dels termes de la segona col·lecció junts i els de la primera menys el primer junts és més gran que la raó descrita abans.*[1086]

Considerem un nombre arbitrari de segments AB, CD, EF, GH, IK, LM i NU, cada un dels quals supera l'anterior un mateix segment, és a dir, AB és més llarg que CD, CD més que EF, EF més que HG, HG més que IK, IK més que LM i més que NU un cert segment [el mateix CO en tots els casos].[1087]

Al segment CD hi afegim el CO, que és igual a la diferència [constant] dels segments de la col·lecció,
al EF el EP, que ho és a dues vegades aquesta diferència,
al HG, el RH, que ho és a tres vegades,
i així successivament amb els altres segments.

Tots els segments que obtenim són iguals al més gran de tots [és a dir, a AB].

Per tant, tots ho són entre si.

Volem demostrar que:

a) La raó que hi ha entre la suma dels quadrats de costats els segments obtinguts [OD, PF, etc.]
i la dels segments que augmenten successivament excepte el [quadrat] del darrer [NU] és més petita que la del quadrat de costat AB, l'àrea del rectangle de costats els segments més gran i més petit [AB i NU] i una tercera part del quadrat de costat NY.

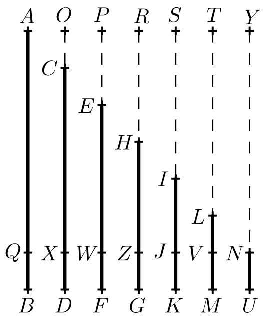


Figura LE 11

b) La raó de la suma dels quadrats de costats els segments obtinguts i la dels segments que augmenten successivament llevat el de costat AB és més gran que la raó indicada abans.

1086. Aquest és l'enunciat del final de la introducció de la monografia EC. I diu: $3\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\right) > n^3$ i $3\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right) < n^3$.

1087. Però $AB - CD = CD - EF = EF - HG = HG - IK = IK - LM = LM - NU = CO$.

[*Demostració.*] *a*) A cada un dels segments que augmenten hi sostraiem un segment igual a l'excedent.[1088]

Aleshores, el quadrat de costat AB és al rectangle de costats AB i QB i una tercera part del quadrat de costat AQ junts
com el quadrat de costat OD al rectangle de costats OD i DX i una tercera part del quadrat de costat XO junts.

I també com la del quadrat de costat PF al rectangle de costats PF i WZ i una tercera part del quadrat de costat WP junts.

I encara ho és com els quadrats dels altres segments a les àrees preses de la manera descrita. [Ev 12]

Per tant, els quadrats de costats OD, PF, RG, SK, TM i YU junts són als rectangles de costats NU i els segments indicats més una tercera part dels quadrats de costats OX, WP, RZ, SJ, TV i YN junts com el quadrat de costat AB al rectangle de costats AB i QB més una tercera part del quadrat de costat QA.[1089]

Si podem demostrar que l'àrea formada pel rectangle de costats el segment NU i els segments OD, PF, RG, KS, TM i YU junts més una tercera part dels quadrats de costats OX, WP, RZ, SJ, TV i YN és més petita que la dels quadrats de costats AB, CD, EF, GH, IK i LM junts
i alhora més gran que la dels quadrats de costats CD, EF, GH, IK més LM junts,
haurem acabat la demostració. [Dv 7]

Ara bé, l'àrea formada pel rectangle de costats NU i els segments OD, PF, RG, SK, TM i YU junts més una tercera part dels quadrats de costats OX, PW, RZ, SJ, TV i YN
equival a la dels quadrats de costats XD, F, ZG, JK, VM i NU junts i

---

1088. Així doncs, $AQ = AB - QB = AB - NU, CX = CD - XD = CD - NU \ldots$

1089. Considerem la cadena d'igualtats de raons $\frac{AB^2}{AB\times QB+\frac{1}{3}AQ^2} = \frac{OD^2}{O\times DX+\frac{1}{3}XO^2} = \cdots$ Ara, per la hipòtesi sobreentesa $DX = WF = ZG = KJ = MV = NU$ i l'explícita $OD = OX + XD, PF = PW + WZ = \cdots$, tenim $\frac{OD^2+PF2+RG^2+KS^2+TM^2+YU^2}{NU\times(OD+PF+RG+KS+TM+TU)+\frac{1}{3}(OX^2+PW^2+RZ^S+JS^2+TV^2+TN^2)} = \frac{AB^2}{AB\times QB+\frac{1}{3}QA^2}$ [Ev 12].

la del rectangle de costats NU i els segments OX, PW, RZ, SJ, TV i YN junts.

D'altra banda, els quadrats de costats AB, CD, EF, GH, IK i LM junts
equivalen als de costats BQ, XD, WF, ZG, JK i VM, juntament amb els de costats AQ, CX, EW, HZ, IJ i LV i el rectangle de costats BQ i dues vegades els segments AQ, CX, EW, HZ, IJ i LV junts. [EII 4]

Però els quadrats de costat un segment igual al NU són comuns a una banda i a l'altra,
i el rectangle de costats NU i OX, PW, RZ, SJ, TV i YN junts
és més petit que el de costats BQ i dues vegades els segments AQ, CX, EW, HZ, IJ i LV junts, [EII 4]
perquè aquests darrers segments junts, són iguals als CO, EP, RH, IS, LT i YN junts,
i alhora són més grans que els seus romanents [CX, EW, HZ, IJ i LV] junts,
mentre que els AQ, CX, EW, HZ, IJ i LV són més grans que una tercera part dels quadrats de costats OX, PW, RZ, SJ, TV i YN.[1090]

I, un cop hem demostrat aquest resultat,
tenim que les àrees indicades juntes són més petites que els quadrats de costats AB, CD, EF, GH, IK i LM junts. ♠

b) Les àrees juntes són més grans que els quadrats de costats CD, EF, HG, IK, LM i NU junts.

Per a demostrar-ho, tenim en compte que aquesta darrera àrea és novament equivalent a la dels quadrats de costats XC, EW, HZ, IJ i LV junts
més la dels quadrats de costats XD, WF, ZG, JK, VM i NU
i la del rectangle de costats NU i el doble dels segments CX, EW, ZF, JK i LV.

Ara bé, l'àrea formada pels quadrats de costats XD, WF, ZG, JK, VM i NU junts és comuna

1090. Atès que $CO+EP+RH+IS+AT+TN+EW+HZ+IJ+LV$ i $OX+PW+ZR+JS+VT+YN=(CO+EP+RH+IS+LT+YN)+(CX+EW+HZ+IJ+LV)$.

i la del rectangle de costats NU i els segments OX, WP, RZ, SJ, TV i YN junts
és més gran que la del rectangle de costats NU més el doble dels segments CX, EW, ZF i JK. [Eii 4]

D'altra banda, l'àrea dels quadrats de costats XO, WP, ZR, JS, UT i YN ho és al dels quadrats de costats CX, EW, HZ, IJ i LV junts, una propietat que hem establert abans. [Ei 10, porisma]

Per tant, les àrees indicades juntes superen els quadrats de costats CD, EF, GH, IK, LM i NU. ♠ ♠[1091]

B.5*j*2.2 [LE 11, porisma] *Així doncs, si fem figures semblants sobre els segments, tant en el cas dels que creixen un segment donat com en el cas dels que són iguals al més gran, la raó que hi ha entre la suma de les figures sobre els segments que són iguals més la suma de les figures sobre els desiguals menys el darrer és més petita que la del quadrat sobre el segment més gran i la suma del rectangle de costats el més gran i el més petit més el quadrat de costat l'excés del gran sobre el petit. I la suma de les figures sobre els segments iguals més la suma de les figures sobre els desiguals menys el primer és més gran que la del quadrat sobre el segment més gran més la suma del rectangle de costats el més gran i el més petit i el quadrat de costat l'excés del gran sobre el petit.*[1092]

1091. Heath (1913), p. 163-165. Tenim la progressió aritmètica de segments $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en la qual $a_n - a_1 = a_{n-1}$. [No cal que la diferència sigui igual a a_1]. Òbviament, $\frac{(n-1)\,a_n^2}{(n-1)\left(a_n \times a_1 + \frac{1}{3}a_{n-1}^2\right)} = \frac{a_n^2}{a_n \times a_1 + \frac{1}{3}(a_n - a_1)^2}$ [Evi 1]. Volem veure que: $a_2^2 + \cdots + a_n^2 > (n-1)\,a_n \times a_1 + \frac{1}{3}(n-1)a_{n-1}^2 > a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2$. Analitzem la primera desigualtat. Tenim que a) $(n-1)\,a_n \times a_1 + \frac{1}{3}(n-1)a_{n-1}^2 = (n-1)\,a_n^2 + (n-1)\,a_1 \times a_{n-1} + \frac{1}{3}\,a_{n-1}^2$ [Eii 1]. I b) $a_n^2 + a_{n-1}^2 + \cdots + a_2^2 \underset{\text{Eii 1}}{=} (a_{n-1} + a_1)^2 + (a_{n-2} + a_1)^2 + \cdots + (a_1 + a_1)^2 \underset{\text{Eii 4}}{=} a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + \cdots + a_1^2 + (n-1)\,a_1^2 + 2\,a_1(a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1) \underset{\text{Nc 1}}{=} a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + \cdots + a_1^2 + (n-1)\,a_1^2 + a_1(a_{n-1} + (a_{n-2} + a_1) + \cdots + (a_1 + a_{n-2}) + a_{n-1} \underset{\text{Nc 1}}{=} a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + \cdots + a_1^2 + (n-1)\,a_1^2 + n\,a_1 \times a_{n-1}$. Comparem a i b. Usem, d'una banda, que $(n-1)\,a_1 \times a_{n-1} < n\,a_1 \times a_{n-1}$, i, d'una altra, Ei 10, porisma, $\frac{1}{3}\,(n-1)a_{n-1}^2 < a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + \cdots + a_1^2$ i Nc 3 aplicat a desigualtats. Obtenim $a_2^2 + \cdots + a_n^2 > (n-1)\,a_n \times a_1 + \frac{1}{3}(n-1)a_{n-1}^2$. L'altra es fa de manera anàloga, *mutatis mutandis*.

1092. Evi 20.

B.5j_3 La proposició LE 17 és anàloga a LE 16 però relativa a la segona volta.

B.5$j_{3.1}$ [LE 17] *Considerem una tangent a un punt de la segona revolució d'una espiral. El radi vector que uneix l'origen de l'espiral i el punt de tangència determina* [*en la tangent*] *dos angles diferents:*[1093] *l'angle que és al costat dels precedents és obtús i el que està al costat dels consegüents, agut.*

[*Demostració.*][1094] Considerem la tangent EF per un punt de la segona volta de l'espiral i fem les mateixes construccions que les de LE 16. [LE 16]

La part precedent de la circumferència $\bigcirc\, RND$ es troba dins de l'espiral i la consegüent, ho fa fora. [LE, definició 6]

a) Per tant, l'angle de costats AD i DF no és recte, sinó que és obtús.

En efecte. Suposem que és recte.[1095]

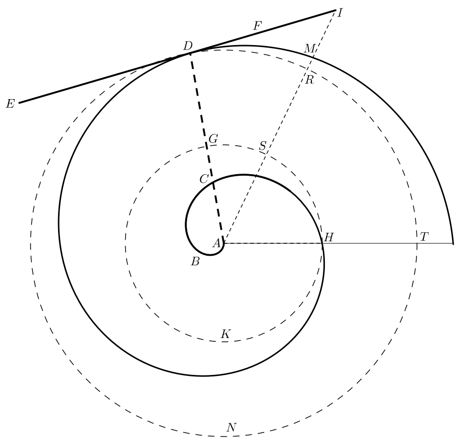


FIGURA LE 17

Aleshores, el segment EF és tangent a la circumferència $\bigcirc\, RND$ pel punt D. [EIII 16]

Tirem el segment AI que talla la tangent pel punt I. [P 1]

Talla l'espiral pel punt M i la circumferència $\bigcirc\, RND$ pel punt R.

La raó que hi ha entre RI i RA és més petita que la de l'arc $\widehat{DR}$ a la circumferència $\bigcirc\, DRN$ augmentada de l'arc $\widehat{DNT}$. [LE 5][1096]

1093. Vegeu la nota 1067 (pàgina 378).

1094. Compareu aquesta demostració amb la de LE 16 i vegeu-ne les analogies de les dues.

1095. Hipòtesi de l'absurd.

1096. $\frac{RI}{RA} < \frac{\widehat{DR}}{\bigcirc\, DNTR + \widehat{DNT}}$.

I, *componendo*,[1097] la raó que hi ha entre IA i RA és més petita que la de l'arc $\widehat{RDNT}$ i la circumferència $\bigcirc\, DNTR$, i l'arc $\widehat{DNT}$ i la circumferència $\bigcirc\, DATR$.[1098] [Ev 18]

Però, al seu torn, l'arc $\widehat{RDNT}$ i la circumferència $\bigcirc\, DATR$ són a l'arc $\widehat{DNT}$ i la circumferència $\bigcirc\, DATR$ com l'arc $\widehat{SHKG}$ i $\bigcirc\, GSHK$ a l'arc $\widehat{HKG}$ augmentat de la circumferència $\bigcirc\, GSHK$.

I la segona raó és igual a la dels segments MA i AD.[1099] [LE 15]

En conseqüència, la raó de IA i AR és més petita que la de AM i AD. [Ev 13]

I això és impossible. [Dv 7][1100]

En definitiva, l'angle de costats AD i DF és obtús i, de retop, el que resta [de costat AD i DE] és agut. ♠

b) I tenim el mateix resultat, si la tangent a l'espiral ho és per l'extrem [de la segona volta]. ♠ ♠

[Porisma.] I de manera anàloga s'estableix que un segment tangent a una espiral per un punt d'una de les voltes posteriors —àdhuc, si ho és en el punt extrem de la volta corresponent— forma angles diferents amb el segment que uneix el punt de tangència i el centre de l'espiral.

I, a més, l'angle de la part conseqüent és obtús, i el de la precedent, agut. ♠

B.5j_4 Les proposicions LE 19 i LE 20 proporcionen dues propietats de les tangents a l'espiral.

B.5$j_{4.1}$ [LE 19] *Considerem un segment tangent a la segona volta de l'espiral pel seu extrem. Tirem un segment perpendicular al segment que uneix el punt inicial de l'espiral i l'extrem de la segona volta. Aquesta perpendicular talla la tangent i, a més, el segment comprès entre el punt de tall i l'origen de l'espiral és igual a dues vegades la longitud de la circumferència de la segona volta.*

1097. Aplicat a la desigualtat de raons.

1098. $\frac{AI}{RA} < \frac{\widehat{RDNT} + \bigcirc\, DNTR}{\bigcirc\, DNTR + \widehat{DNT}}$.

1099. Aquí Arquimedes usa el fet de la semblança dels arcs de circumferència que corresponen a angles centrals iguals, que és igual a la dels radis corresponents.

1100. Atès que $AR = AD$ i $IA > AM$.

Considerem la primera volta de l'espiral, $\circlearrowleft ABCH$,
l'arc de la segona $\widehat{HET}$
i els cercles primer i segon, $\bigcirc HKG$ i $\bigcirc TMN$.

Però també el segment TF tangent a l'espiral pel punt T [l'extrem de la segona volta].

Pel punt A, tirem el segment AF perpendicular al TA. [Ei 11]

Afirmo que *a*) el segment TA talla el TF
perquè hem establert que l'angle de costats AT i TF és agut.
[LE 16 i 17]

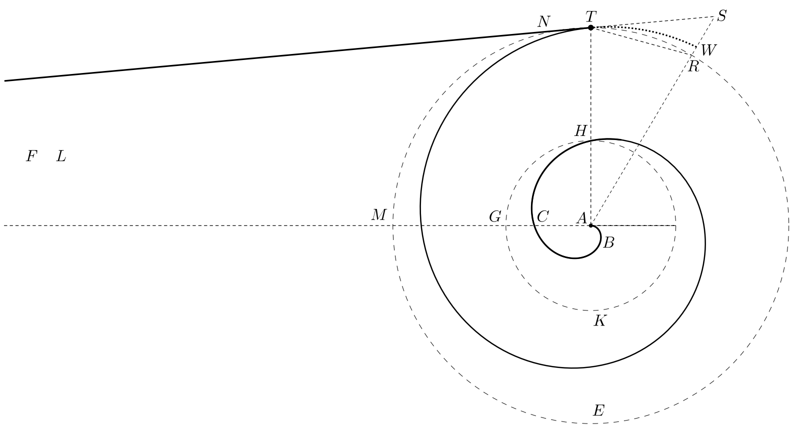


Figura LE 19

I també que *b*) el segment FA és igual a dues vegades la longitud de la circumferència $\bigcirc TMN$.

[*Demostració.*] Si no ho és,[1101]
o bé *a*) FA és més llarg,
o bé *b*) FA és més curt que dues vegades la longitud de la circumferència $\bigcirc TMN$.[1102]

a) D'entrada, suposem que FA és més llarg que dues vegades la longitud de la circumferència $\bigcirc TMN$.

Considerem un segment LA més curt que el FA però més llarg que dues vegades la longitud de la circumferència $\bigcirc TMN$. [Ei 2 o Ei 3]

1101. Hipòtesi de l'absurd.
1102. Disjunció de casos.

I, en el cercle $\bigcirc TMN$, una corda TN més curta que el seu diàmetre. [EIII 15]

Aleshores, la raó que hi ha entre el segment TA i AL és més gran que la que hi ha entre la meitat de la corda TN i el segment perpendicular pel punt A a aquesta corda. [EV 13 i 15]

Pel punt A, tirem el segment SA damunt la prolongació del TN de manera que RS és a TR com TA a AL. [LE 7]

I veiem que el segment AS talla el cercle per un punt R i l'espiral per W

i, *alternando*, el segment RS és al TA com TR a AL. [EV 16]

Ara bé, la raó que hi ha entre el segment TR i el AL és més petita que la de l'arc $\widehat{TR}$ i el doble de la longitud de la circumferència $\bigcirc TMN$,

atès que el segment TR és més curt que l'arc $\widehat{TR}$ [ECI, postulat 1]

i el AL més llarg que el doble de la longitud de la circumferència $\bigcirc TMN$. [DV 7]

Per tant, la raó que hi ha entre el segment AS i el AR —que és igual a AT— és més petita que la de l'arc $\widehat{TR}$ i el doble de la longitud de la circumferència $\bigcirc TMN$ més aquesta longitud. [EV 18]

Però els arcs d'abans són com el segment AW i AT. [LE 15]

En definitiva, la raó que hi ha entre els segments AS i AT és més petita que la de WA i AT. [EV 13]

I això és impossible.

Així doncs, el segment FA no és més llarg que dues vegades la longitud de la circumferència $\bigcirc TMN$.

b) De manera anàloga, establim que FA no és pas més curt que dues vegades la longitud de la circumferència $\bigcirc TMN$.[1103] ♠ ♠

B.5*j*4.1.1 [LE 19*a*] *I, seguint les petjades de la demostració anterior, podem afirmar que: si considerem el segment rectilini tangent a una qualsevol de les seves voltes per l'extrem de l'espiral, i per l'inici de la corba tirem una perpendicular al segment* [*que uneix aquest inici i el punt de tangència*], *aquesta perpendicular talla la tangent, i el segment d'extrems el punt de tangència i el de tall és múltiple de la lon-*

1103. Problema 36, pàgina 167.

gitud de la circumferència del cercle que correspon al número d'ordre de la volta considerada. ♠

B.5$j_{4.2}$ [LE 20] *Considerem un segment tangent a una espiral per un punt qualsevol de la primera volta i unim el punt de tangència amb l'origen* [*de la corba*]*. I, amb centre en aquest punt i radi igual al segment que queda determinat* [*per aquests dos punts*]*, tirem una circumferència. Per l'origen de l'espiral, tirem el segment perpendicular al segment anteriorment descrit. La tangent i la perpendicular es tallen. I, a més, la part de la perpendicular compresa entre la tangent i l'origen de l'espiral és igual a la longitud de l'arc de circumferència comprès entre el punt de tangència i el d'intersecció de la circumferència i el segment que origina l'espiral prenent-lo en el sentit del moviment.*[1104]

Considerem la primera volta $\circlearrowleft ABCD$ d'una espiral i el segment EF tangent a aquesta pel punt D.

Per aquest punt, tirem el segment AD que uneix l'origen amb el punt de tangència D. [P 1]

Ara, amb centre en el punt A i radi AD,[1105] dibuixem la circumferència $\bigcirc DMN$. [P 3]

Aquesta circumferència talla [el] radi [vector] de la primera volta pel punt K. [LE 11, definició 1]

Tirem el segment FA perpendicular al AD. [EI 11]

És evident que talla el DF. [LE 16 i P 5] ♠

Volem demostrar, a més, que és igual a la longitud de l'arc $\widehat{KMND}$.

[*Demostració.*] Si FA no és igual a la longitud de l'arc $\widehat{KMND}$,[1106]

a) FA és més llarg, o

b) és més curt.[1107]

a) Si és més llarg que la longitud de l'arc,

1104. Aquesta proposició generalitza LE 18 en el sentit que, si el punt arbitrari coincideix amb l'extrem de la primera volta, aquesta proposició és aquella.

1105. Diu: *διάστημα*.

1106. Hipòtesi de l'absurd.

1107. Disjunció de casos.

considerem un segment LA més curt que el FA però més llarg que l'arc esmentat. [LE 4]

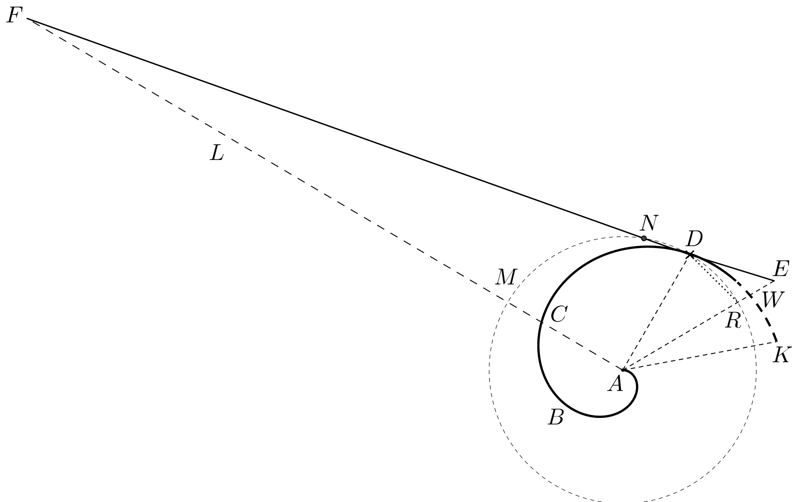


FIGURA LE 20

Novament, disposem d'un cercle $\bigcirc KMN$ i d'una corda seva DN més curta que el diàmetre.

La raó que hi ha entre el segment DA i AL és més gran que la que hi ha entre la meitat del segment DN i la perpendicular per A a aquest.

Per tant, és possible tirar pel punt A un segment AE en la prolongació del segment ND de manera que el segment ER és al DE com el DA al AL,
com hem establert abans. [LE 7]

I, de retruc, el segment ER és al AR com el DR al AL.
[DI 15, EV 7 i EV 16]

Però la raó que hi ha entre el segment DR i el AL és més petita que la de l'arc $\widehat{DR}$ i el $\widehat{KMD}$,
atès que el segment DR és més curt que l'arc $\widehat{DR}$ [ECI, postulat 1]
i el AL més llarg que el $\widehat{KMD}$. [DV 7]

En conseqüència, la raó que hi ha entre el segment ER i el RA és més petita que la que hi ha entre els arcs $\widehat{DR}$ i $\widehat{KMD}$. [EV 13]

Per tant, la raó que hi ha entre el segment AE i el AR és més petita que la dels arcs $\widehat{KMR}$ i $\widehat{KMD}$. [Ev 18]

Però l'arc $\widehat{KMR}$ és al $\widehat{KMD}$ com el segment AW al AD

[LE, definició 1]

i, de retruc, la raó que hi ha entre els segments AE i AR és més petita que la del AW i AD. [Ev 13]

I, en definitiva, el segment FA no és més llarg que la longitud de l'arc $\widehat{KMD}$. ♠

b) I, seguint les petjades precedents, establim que el segment FA tampoc és ni més curt ni igual que la longitud de l'arc $\widehat{KMD}$.

♠

Aquesta manera de procedir i les construccions emprades ens serveixen també per a demostrar que, si un segment és tangent per un punt de la segona volta de l'espiral que no és l'extrem, el segment rectilini limitat pel punt de tall de la tangent i el radi vector és igual a la longitud del cercle descrit més l'arc amb aquests mateixos extrems en el sentit del moviment.[1108] ♠

Finalment, si el segment és tangent a una volta arbitrària de l'espiral per un punt que no en sigui l'extrem, i amb la resta de construccions iguals, el segment rectilini limitat pels punts indicats és igual a la longitud de la circumferència corresponent multiplicada pel nombre de voltes més la de l'arc en qüestió considerat en el sentit del moviment. ♠ ♠

B.5j_5 Les proposicions LE 22 i LE 23 estenen LE 21 a altres situacions.

B.5$j_{5.1}$ [LE 22] *Considerem l'àrea limitada per la segona volta d'una espiral i pel segon vector director. Hi podem circumscriure una figura plana i inscriure-n'hi una altra que es compon de sectors semblants, de manera que l'excés de la circumscrita sobre la inscrita sigui inferior a qualsevol àrea donada per endavant.*

Considerem la segona revolució ◡ $ABCDE$ d'una espiral.

Siguin H l'origen de l'espiral,

1108. Vegeu els detalls a LE 19.

i AH i AE els segments de l'inici de l'espiral i el segon situat sobre el d'inici.

D'altra banda, siguin $\bigcirc AFG$ el segon cercle i ACG i FI dos diàmetres perpendiculars entre si.

[*Demostració.*] Ara dividim l'angle recte i el sector de l'angle recte per la meitat successivament.

Finalment, s'obté un sector més petit que una àrea donada. [Ex 1]

Així hem generat el sector circular $\lhd HKA$ més petit que l'àrea donada.

Ara dividim l'angle recte en angles iguals al del sector circular esmentat.

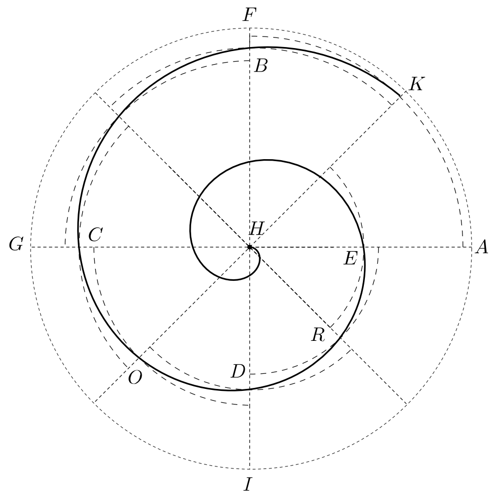


FIGURA LE 22

I les altres construccions són iguals a les que hem fet en la proposició vint-i-unena.[1109]

La figura circumscrita que en resulta[, d'aquestes construccions,] supera la figura inscrita en una àrea més petita que la del sector $\lhd HKA$.

I, a més, l'excés és més gran que la diferència amb la qual el sector $\lhd HKA$ supera el $\lhd HER$. ♠

D'això resulta evident que

B.5*j*5.1.1 [LE 22, porisma] *És possible que la figura circumscrita superi l'àrea considerada menys de la superfície donada i alhora que la considerada superi la inscrita menys que qualsevol altra superfície donada.*

I el mateix raonament posa de manifest la proposició següent: *Si es dona l'àrea compresa entre qualsevol volta d'una espiral i el segment*

1109. Pàgines 380-383.

d'origen determinat pel número de revolucions. Hi podem circumscriure una figura plana tal com hem indicat de manera que la figura circumscrita superi l'àrea donada d'una superfície que és més petita que qualsevol àrea proposada i alhora n'hi podem inscriure una altra de manera que l'àrea donada superi la figura inscrita d'una superfície més petita que qualsevol àrea que es proposi. ♠

B.5$j_{5.2}$ [LE 23] *Considerem una àrea limitada per un arc d'espiral més petit que una volta que no té un extrem a l'origen de l'espiral i pels segments* [*radis vectors*] *tirats pels extrems de l'arc a l'origen. Hi podem circumscriure una figura plana i inscriure-n'hi una altra, compostes per sectors semblants, de manera que la figura circumscrita supera la inscrita una àrea inferior a qualsevol que se'ns doni.*

Considerem l'espiral ◡ $ABCDE$ d'extrems A i E,
i origen el punt H.

Unim els segments AH i HE. [P 1]

Tirem la circumferència de centre H i radi —*διάστημα*— HA. [P 3]

Aquest segment talla el segment HE pel punt F. [LE, definició 1]

Dimidiem l'angle de vèrtex H
i sector $\lhd HAF$ successivament. [Eiii 30]

Finalment, obtenim un sector inferior a qualsevol àrea donada. [Ex 1]

Cada un dels arcs talla els radis vectors precedent i antecedent.

Suposem que el sector inferior a l'àrea donada és el $\lhd HAK$.

Ara, de manera anàloga a la que hem fet servir abans,

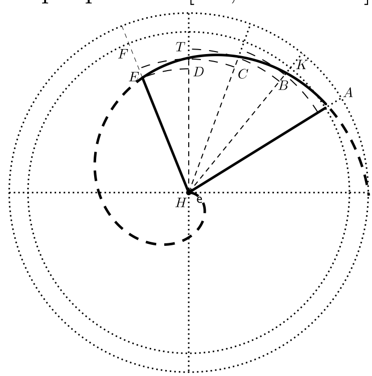


Figura LE 23

pels punts pels quals els segments que determinen els angles iguals tallen l'espiral, tirem circumferències. [P 3]

Així s'obtenen una figura plana circumscrita entre l'espiral ◡ $ABCDE$ i els segments AH i HE, que es compon de sectors semblants
i una altra d'inscrita.

I, a més, l'excés de la figura circumscrita sobre la inscrita és inferior a la donada,
atès que el sector $\triangleleft HAK$ és més petit que aquesta àrea. ♠

B.5*j*5.2.1 [LE 23, porisma] D'això en resulta que*, a la figura descrita abans, hi podem circumscriure una figura plana de la manera que hem dit, de manera que la figura circumscrita superi la superfície una àrea inferior a la donada. I també n'hi podem inscriure una de manera que la superfície la superi d'una àrea inferior a la donada.* ♠

B.5*j*6 Les quatre últimes [LE 25, 26, 27 i 28] analitzen les àrees limitades per voltes successives o parts de voltes de l'espiral.

B.5*j*6.1 [LE 25] *L'àrea limitada per la segona volta d'una espiral i el segon diàmetre és al segon cercle com set a dotze, és a dir, com l'àrea compresa pels radis del segon i el primer cercle i una tercera part del quadrat de l'excés del segon radi sobre el primer és al quadrat del segon radi.*

Considerem la segona volta d'una espiral ↻ $ABCDE$
i el seu punt inicial H.

Siguin HE el radi origen de les revolucions,
AE el segon,
$\bigcirc\, AFGI$ el segon cercle
i AG i IF dos diàmetres perpendiculars entre si.

Volem demostrar que l'àrea delimitada per l'espiral ↻ $ABCDE$
i el radi AE és al cercle $\bigcirc\, AFGI$ com set a dotze.

[*Demostració.*] Considerem un cercle $\bigcirc\, Z$ el radi del qual equival en potència (δυνάμει) al rectangle de costats AH i HE més la tercera part del quadrat de costat AE.[1110] [P 3, EII 14 o EVI 13]

Per tant, el cercle $\bigcirc\, Z$ és al $\bigcirc\, AGFI$ com set a dotze,
atès que el seu radi i el del cercle $\bigcirc\, AGFI$ tenen en potència aquesta raó. [EXII 2]

Tot consisteix, doncs, a demostrar que el cercle $\bigcirc\, Z$ equival a l'àrea limitada per l'espiral ↻ $ABCDE$ i el segment AE.

1110. És a dir, (radi del cercle $\bigcirc\, Z)^2 = \square\,(AH, HE) + \frac{1}{3}\, AE^2$.

En cas contrari,[1111]
a) és més gran o b) més petit.[1112]

a) Suposem, en primer lloc, que és més gran.

Aleshores, l'àrea indicada la podem circumscriure amb una figura plana composta de sectors semblants
que la supera en una àrea més petita que l'excés del cercle $\bigcirc Z$ sobre l'esmentada àrea. [LE 22, porisma]

Considerem aquesta figura circumscrita.

Siguin $\lhd HRK$ i $\lhd HPD$ el més gran i el més petit de tots els sectors que la componen, respectivament.

És clar que la figura circumscrita és més petita que el cercle. [Nc 5, adaptat]

Prolonguem els segments rectilinis que determinen els angles iguals amb el vèrtex en el punt H fins que tallen el segon cercle. [P 2]

Obtenim segments que tallen l'espiral i que, per tant, se sobrepassen els uns als altres un mateix segment,
sent HA el més gran i HE el més petit, [LE, definició 1]
i tants d'altres tots aquests iguals al més gran.

Construïm sectors circulars semblants sobre els segments iguals al més gran
i sobre els segments que augmenten successivament d'un mateix segment, exceptuant-ne el més petit.

La raó d'aquestes dues famílies de sectors és més petita que la que hi ha entre el quadrat de costat el segment més gran HA i l'àrea compresa per HA i HE juntament amb una tercera part del quadrat de costat EA, d'acord amb el que hem establert.[1113] [LE 11, porisma]

Ara bé, el cercle $\bigcirc AFGI$ coincideix amb la totalitat dels sectors circulars construïts sobre el segment més gran,
mentre que els sectors construïts sobre els segments que augmenten, llevat del més petit, coincideixen amb la figura circumscrita.

Per tant, la raó que hi ha entre el cercle i la figura circumscrita és més petita que la que hi ha entre el quadrat de costat AH

1111. Hipòtesi de l'absurd.
1112. Disjunció de casos.
1113. Textualment: *δέδεικται γὰρ τοῦτο.*

i el rectangle de costats AH i HE juntament amb una tercera part del quadrat de costat A. [Ev 13 o Dv 7]

Ara bé, el quadrat de costat HA és al rectangle de costats AH i HE juntament amb una tercera part del quadrat de costat AE com el cercle ◯ $AFGI$ al cercle ◯ Z.

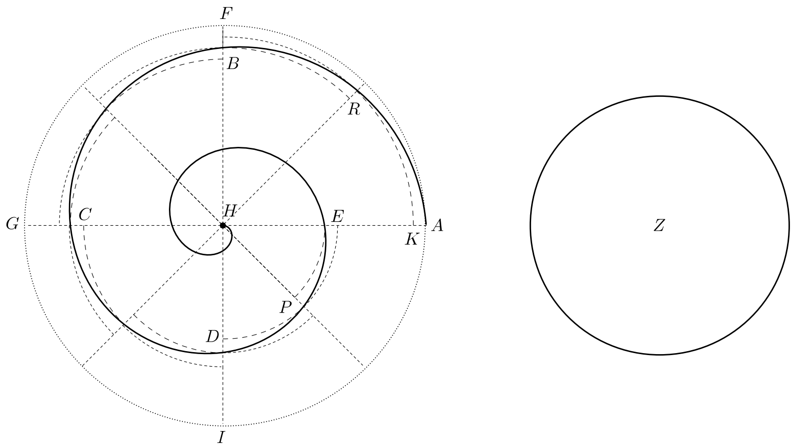


Figura LE 25

En definitiva, doncs, la raó que hi ha entre el cercle ◯ $AFGI$ i la figura circumscrita és més petita que la que hi ha amb el cercle ◯ Z. [Ev 13]

O sigui que el cercle ◯ Z és més petit que la figura circumscrita. [Ev 10 i Dv 7]

Però no és més petit perquè hem suposat que és més gran.

I això és impossible.

En conseqüència, el cercle ◯ Z no és més gran que l'àrea limitada per l'espiral ◡ $ABCDE$ i el segment AF. ♠

b) Però tampoc no és més petita,
ja que si és més petita,
podem inscriure una figura plana composta de sectors circulars semblants en l'àrea limitada per l'espiral ◡ $ABCDE$ i el segment AE, de manera que l'excés de l'àrea delimitada per l'espiral que acabem de descriure sobre la figura inscrita és més petit que el de l'àrea esmentada sobre el cercle ◯ Z. [LE 22, porisma]

Considerem la figura inscrita.

D'entre els sectors que la componen el $\lhd HKR$ i $\lhd HEP$ són el més gran i el més petit, respectivament.

És clar que la figura inscrita és més gran que el cercle $\bigcirc Z$.

Prolonguem els segments que determinen els angles iguals amb vèrtex en el punt H fins que tallen la circumferència del cercle. [P 2]

Novament, disposem d'una col·lecció de segments que augmenten successivament un mateix segment.

Són precisament els segments rectilinis que van del centre H a l'espiral,
sent HA i HE el més gran i el més petit, respectivament.

I també d'una altra, amb un segment menys que la primera, que van del mateix punt a la circumferència del cercle,
tots aquests iguals al més gran d'aquests.

Ara, construïm vectors circulars semblants de costats els segments d'ambdues col·leccions.

Aleshores, la raó que hi ha entre els sectors circulars construïts amb els segments que són iguals al més gran junts
i els construïts sobre els segments que augmenten successivament llevat del que correspon al segment més gran
és més gran que la que hi ha entre el quadrat de costat HA i el rectangle de costats AH i HE i la tercera part del quadrat de costat EA junts. [Ev 13 o Dv 7]

Ara bé, els sectors circulars construïts sobre els segments que augmenten successivament llevat del que correspon al segment més gran junt és igual a la figura inscrita en l'àrea indicada,
mentre que els altres junts són iguals al cercle.

Per tant, la raó que hi ha entre el cercle $\bigcirc AFGI$ i la figura inscrita és més gran que la que hi ha entre el quadrat de costat HA i el rectangle de costats HA i HE i una tercera part del quadrat de costat AE, [Ev 13]
és a dir, la dels cercles $\bigcirc AFGI$ i $\bigcirc Z$. [Ev 7 i 13]

O sigui que el cercle $\bigcirc Z$ és més gran que la figura inscrita. [Ev 10 o Dv 7]

I això és impossible (*ἀδύνατον*), perquè, de fet, és més petit. ♠

Per tant, el cercle Z no és ni més gran ni més petit que la figura limitada per l'espiral $\circlearrowleft ABCDE$ i el segment AE.

I, en definitiva, ambdues àrees són equivalents. ♠

B.5*j*$_{\mathbf{6.1.1}}$ [LE 25, porisma] *De manera anàloga es demostra que l'àrea limitada per qualsevol rotació de l'espiral i el segment indicat* [*relatiu al nombre de rotacions*] *és al cercle corresponent* [*a les rotacions*] *com el rectangle de costats el radi del cercle corresponent al número de voltes i el corresponent a una volta menys i una tercera part del quadrat de costat l'excés del quadrat més gran sobre el més petit, i el quadrat de costat el radi més gran suara esmentat.* ♠

B.5*j*$_{\mathbf{6.2}}$ [LE 26] *Considerem un sector d'espiral —és a dir, una àrea limitada per un arc d'espiral i dos radis vectors— més petit que una volta i que no té l'extrem al seu origen. La seva àrea és a la del sector circular de radi el més llarg dels dos radis vectors* [*del mateix angle*] *com el rectangle de costats els radis vectors* [*que determinen el sector de l'espiral*] *i una tercera part del quadrat de costat l'excés del radi vector gran sobre el petit junts, i el quadrat de costat el més llarg* [*dels radis vectors*]*.*

Considerem l'arc d'espiral $\circlearrowleft ABCDE$, inferior a una volta sencera, i extrems A i E.

Sigui H l'origen de la corba.

Tirem la circumferència de centre el punt H i radi (*διάστημα*) HA. [P 3]

Sigui F el punt pel qual la prolongació del radi vector HE talla aquesta circumferència. [P 2]

Volem demostrar que l'àrea limitada per l'arc d'espiral descrit $\circlearrowleft ABCDE$ i els radis vectors AH i EH és al sector $\lhd AHF$ com el rectangle de costats AH i EH i una tercera part del quadrat de costat EF al quadrat de costat AH.[1114]

[*Demostració.*] Considerem un cercle $\bigcirc WZ$ el radi del qual (*ἐκ τοῦ κέντρου*) és igual en potència (*δυνάμει*) al rectangle de costats AH i

1114. És a dir, $\frac{\text{àrea } HABCDE}{\lhd AHF} = \frac{\square\, AH,HE + \frac{1}{3}\, EF^2}{HA^2}$.

HE i una tercera part del quadrat de costat EF
i arc central el de vèrtex el punt H.

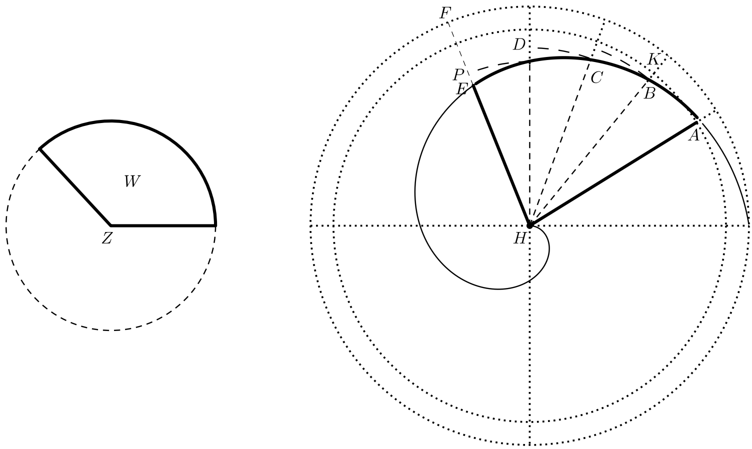


FIGURA LE 26a

Aleshores, el sector $\triangleleft ZW$ és al sector $\triangleleft HAF$ com el rectangle de costats AH i HE i la tercera part del quadrat de costat EF junts al quadrat de costat HA, atès que els quadrats dels seus radis tenen entre si aquesta raó. [EXII 2 aplicat a sectors circulars]

Tot es redueix, doncs, a demostrar que el cercle $\bigcirc ZW$ és equivalent a l'àrea limitada per l'arc d'espiral $\circlearrowleft ABCDE$ i els radis vectors AH i HE. [EV 7]

Si l'àrea del cercle $\bigcirc ZW$ no és igual a la limitada per l'espiral $\circlearrowleft ABCDE$ i els radis vectors AH i HE,[1115]

a) és més gran, o
b) més petita.[1116]

a) En primer lloc, suposem que és més gran.

A aquesta àrea, hi podem circumscriure una figura plana composta de sectors circulars semblants,
de manera que l'excés de la figura circumscrita sobre l'àrea esmentada

1115. Hipòtesi de l'absurd.
1116. Disjunció de casos.

és més petit que el del cercle $\bigcirc\, ZW$ sobre la mateixa àrea.

[LE 23, porisma]

Considerem, doncs, que l'hem circumscrit i que el sector circular més gran és $\lhd\, HAK$ i el més petit $\lhd\, HPD$.

És clar que aquesta figura plana és més petita que el sector $\lhd\, ZW$.

[Nc 4′, adaptada]

Prolonguem els radis vectors que formen angles iguals de vèrtex H fins que tallen la circumferència del sector $\lhd\, HAF$.

D'una banda, tenim la col·lecció de segments que augmenten successivament un segment donat.

Són els que tenen un extrem en el punt H i l'altre a l'espiral, sent HA i HE el més gran i el més petit, respectivament.

I, d'una altra, la dels segments iguals al segment HA, amb un terme menys.

Són els que tenen un extrem en el punt H i l'altre en l'arc de circumferència $\lhd\, AHF$,
excepte el HF.

Considerem, ara, la mateixa quantitat de segments circulars de costats tant els d'una col·lecció com els de l'altra [però hi ha el que correspon al segment sobre HF].

Sabem que la raó que hi ha entre els sectors circulars de costats els segments iguals junts i els de costats els segment que augmenten successivament [llevat el construït sobre el més petit]
és més petita que la que hi ha entre el quadrat de costat HA i el rectangle de costats AH i HE i la tercera part del quadrat de costat EF.

[LE 11, porisma]

Ara bé, els sectors circulars de costats iguals juntament amb el més gran de tots equivalen al sector $\lhd\, HAF$,
mentre que els de costats els segments que augmenten junts ho són a la figura circumscrita.

Per tant, la raó que hi ha entre el segment circular $\lhd\, HAF$ i la figura circumscrita és més petita que la del quadrat de costat HA

i el rectangle de costats HA i HE i una tercera part del quadrat de costat HE junts. [Ev 13 i 7]

Ara bé, el quadrat de costat AH és a la figura esmentada com el sector $\lhd HAF$ al $\lhd ZW$. [Exii 2 aplicat a sectors circulars]

Per tant, el $\lhd ZW$ és més petit que la figura circumscrita.

[Ev 10 o Dv 7]

Però no ho és, sinó que és més gran.

En definitiva, el sector $\lhd ZW$ no és més gran que l'àrea limitada per l'arc d'espiral $\circlearrowleft ABCDE$ i els radis vectors HE i HA. ♠

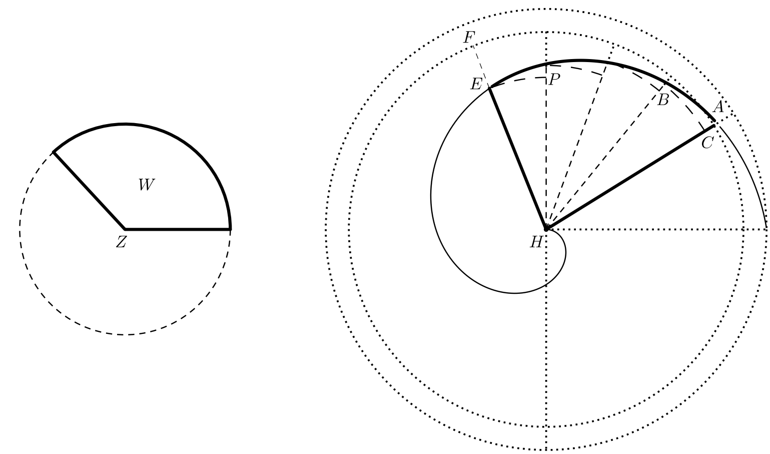


Figura LE 26*b*

b) Però l'àrea del cercle $\bigcirc ZW$ no és més petita que la limitada per l'espiral $\circlearrowleft ABCDE$ i els radis vectors AH i HE.

Amb les mateixes construccions d'abans,
sabem que és possible inscriure en l'àrea descrita una figura plana composta de sectors circulars semblants,
de manera que l'excés d'aquella àrea sobre la figura inscrita una àrea més petita que l'excés amb el qual supera el sector circular $\lhd ZW$.

[LE 23, porisma]

La considerem inscrita i observem que els sectors circulars $\lhd HBC$ i $\lhd PHE$ són el més gran i el més petit, respectivament.

És clar que la figura inscrita és més gran que el sector circular $\lhd ZW$.

Com abans, disposem de dues col·leccions de segments, la segona amb un element menys que la primera:
els radis vectors [que van de l'origen H a l'espiral, que augmenten successivament d'un mateix segment]
i els que van d'aquest mateix punt a la circumferència del sector $\lhd HAF$, exceptuant-ne el HA.

També, com en l'ítem *b*, construïm sectors circulars semblants limitats pels segments que augmenten successivament, llevat del més gran de tots.

La raó que hi ha entre els sectors circulars construïts sobre els segments iguals entre si i amb el més gran de tots junts
i els construïts sobre l'altra col·lecció de segments
és més gran que la del quadrat de costat HA i el rectangle de costats HA i HE i una tercera part del quadrat de costat EF junts.

[LE 11, porisma]

Per tant, la raó que el sector circular $\lhd HAF$ té amb la figura inscrita és més gran que la que té amb el $\lhd ZW$. [Ev 13 i 7]

I, de retruc, el sector circular $\lhd ZW$ és més gran que la figura inscrita. [Dv 7 o Ev 10]

Però no és més gran, sinó que és més petita.

En definitiva, el sector circular $\lhd ZW$ no pot ser més petit que l'àrea limitada per l'arc de l'espiral $\circlearrowleft ABCDE$ i els segments AH i HE. ♠

En conseqüència, aquestes dues superfícies planes són equivalents. ♠

B.5*j*6.3 [LE 27] *Considerem les àrees successives limitades per les rotacions de l'espiral i pels radis vectors. L'àrea de la tercera equival al doble de la segona, la de la quarta al triple* [*de la segona*]*, la cinquena a quatre vegades. I així, successivament, cada àrea és el múltiple enter successiu de la segona. De retruc, l'àrea limitada per la primera volta, és una sisena part de la limitada per la segona* [*volta*]*.*[1117]

1117. Si $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots$ i $\mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}'_2, \mathfrak{S}'_3, \ldots$ designen les àrees totals i les que s'augmenten en cada volta, respectivament, aleshores $\mathfrak{S}'_1 = \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}'_2 = \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}'_3 = \mathfrak{S}_3 - \mathfrak{S}_2, \ldots$. Aleshores $\mathfrak{S}_2$ és la sisena part de $\mathfrak{S}'_2$ (problema 37, pàgina 167).

Considerem la primera, segona, tercera volta d'una espiral, i tantes com vulguem.

Siguin A el seu origen,
el segment HE l'inici de la rotació,
i designem per K la primera àrea, per L la segona, per M la tercera, per N la quarta i per O la cinquena.

Volem veure que:
a) L'àrea K és una sisena part de la següent [L].
b) Les àrees M, N i O són el doble, el triple i el quàdruple de la L, respectivament,
i així successivament.

És a dir, cada àrea és el múltiple enter següent a la volta que correspon de l'àrea L.

[*Demostració*.] *a*) Per veure-ho, observem el següent.

L'àrea K i L juntes són al segon cercle com set a dotze. [LE 22]
Però el segon cercle és al primer com dotze és a tres. [EXII 2]
En canvi, el primer cercle és a l'àrea K com tres a u. [LE 24]
Per tant, [*ex æquali*,] l'àrea K equival a una tercera part de la L. [EV 22][1118] ♠

b) [Veiem els diferents casos.]

b_1) Hem establert que les àrees K, L i M juntes són a la tercera part del cercle com el rectangle de costats CH i HB i una tercera part del quadrat de costat CB al de costat CH. [LE 25, porisma]

Ara bé, el tercer cercle és al segon com el quadrat de costat CH al de costat HB, [EXII 2]
el segon cercle és a l'àrea conjunta de K i L com el quadrat de costat BH al rectangle de costats BH i HA i una tercera part del quadrat de costat AB. [LE 25, porisma]

Per tant, les àrees K, L i M juntes són a les K i L juntes com el rectangle de costats CH i HB i la tercera part del quadrat de costat CB junts al rectangle de costats BH i HA més la tercera part del quadrat de costat AB. [EV 22]

I la raó dels dos últims termes és com dinou a set.[1119]

1118. Nota 1117 (pàgina 408).
1119. Vegeu l'ítem *b* del problema 37

Per tant, les àrees K, L i M juntes són a les K i L juntes com dinou a set [Ev 11 o Nc 1]
i, de retruc, l'àrea M és a les àrees L i K juntes com dotze a set. [Ev 17]

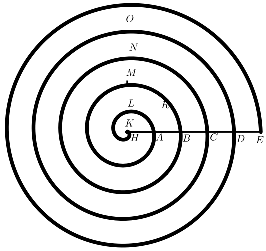


Figura LE 27

Però les àrees K i L juntes és a l'àrea L com set a sis.

En definitiva, doncs, l'àrea M equival al doble de la L. [Ev 22]

b_2) Ara demostrarem que les àrees successives són a la segona com els números enters successius.

$b_{2.1}$) Les àrees K, L, M, N i O juntes són al cercle de radi HE com el rectangle de costats EH i HD i la tercera part del quadrat de costat DE al quadrat de costat HE. [LE 25, porisma]

Ara bé, els cercles de radis HE i HD són entre si com els quadrats dels radis respectius. [Exii 2]

I el cercle de radi HD és a l'àrea conjunta de K, L, M i N com el quadrat de costat HD al rectangle de costats HD i DC i la tercera part del quadrat de costat DC junts. [LE 25, porisma]

D'aquí que les àrees K, L, M, N i O juntes són a les K, L, M i N juntes com el rectangle de costats HE i DH i la tercera part del quadrat de costat DE junts al rectangle de costats DH i DC i la tercera part del quadrat de costat DC junts. [Ev 22]

De retruc, *dividendo*, l'àrea O és a les àrees K, L, M i N com la diferència de les àrees conjuntes formades pel rectangle de costats HE i DH i la tercera part del quadrat de costat DE junts i el rectangle de costats DH i DC i la tercera part del quadrat de costat DC junts. [Ev 17]

Però aquesta diferència equival a la diferència dels rectangles de costats HE i DH, i DH i DC
que, al seu torn, equival al de costats HD i CE. [Eii 1, Nc 3 i Evi 1]

En definitiva, l'àrea O és a les àrees conjuntes K, L, M i N com el rectangle de costats HD i CE al de costats HD i HC juntament amb una tercera part del quadrat de costat CD. [Ev 7] ♠

$b_{2.2}$) Seguint el mateix procediment, podem veure que l'àrea N és a les àrees K, L i M com el rectangle de costats HC i BD al rectangle de costats HC i HB i una tercera part del quadrat de costat CB.

I, de retruc, l'àrea N és a les àrees K, L, M i N com el rectangle de costats HC i BD als rectangles de costats HC i DB, i HC i HB i una tercera part del quadrat de costat CB [i inversament].

[Ev 7, porisma, i Ev 18][1120]

Atès que l'àrea O és a l'àrea conjunta K, L, M i N com el rectangle de costats HD i CE al rectangle de costats HD i HC i una tercera part del quadrat de costat CD
i les àrees conjuntes K, L, M i N són a l'àrea N com al rectangle de costats HD i HC i una tercera part del quadrat de costat CD al rectangle de costats HC i DB,
l'àrea O és a la N com el rectangle de costats HD i CE al de costats HC i DB. [Ev 7, porisma, i Ev 22][1121]

Però el rectangle de costats HD i CE és al de costats HC i DB com el segment HD al HC,
atès que els segments CE i BD són iguals. [Evi 1 i LE, definició 1]

En definitiva, les àrees O i N són com els segments HD i HC.

[Ev 7] ♠

$b_{2.3}$) De la mateixa manera, podem veure que l'àrea N és a la M com el segment HC al HB.

$b_{2.4}$) I també que l'àrea M a la N com el segment HB al HA.

Però els segments HD, HC, HB i HA són entre si com els nombres enters successius. ♠

[I això és el que volíem demostrar. ♠[1122]]

B.5*j*₆.₄ [LE 28] *Considerem una volta arbitrària d'una espiral*[1123] *i dos dels seus punts diferents dels extrems, els radis vectors correspo-*

1120. Vegeu l'ítem *c* del problema 37 (pàgina 167).
1121. Vegeu l'ítem *d* del problema 37 (pàgina 167).
1122. Vegeu l'ítem *e* del problema 37 (pàgina 167).
1123. El teorema és vàlid per a qualsevol volta, com diu l'enunciat, però

nents i les circumferències de centre l'origen de la corba i radis els radis vectors esmentats. L'àrea limitada per l'arc de circumferència més gran determinat pels radis vectors, l'espiral i la prolongació del més petit d'aquests[1124] *és a la limitada per la circumferència més petita, la mateixa espiral i el segment que uneixen els extrems com el radi del cercle petit i dues terceres parts de l'excés del radi vector més gran sobre el més petit junts al mateix radi i una tercera part del mateix excés.*[1125]

Considerem la primera volta de l'espiral $\circlearrowleft ABCD$ d'origen el punt H i els punts A i C d'aquesta.

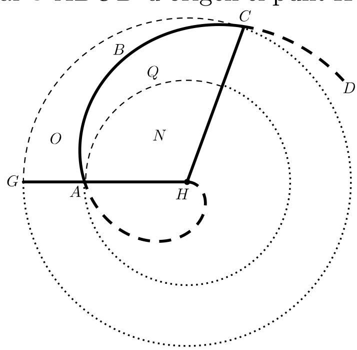


FIGURA LE 28

Unim els segments HA i HC [P 2] i tirem les circumferències de centre en el punt H i radis HA i HC. [P 3]

Volem demostrar que l'àrea O és a la Q com el segment AH i dues terceres parts del GA junts al AH i una tercera part de GA junts.

[*Demostració.*] Hem establert que les àrees N i Q juntes són al sector circular $\triangleleft GCH$ com el rectangle de costats GH i HA i la tercera part del AG junts al quadrat de costat GH. [LE 26]

Per tant, l'àrea O és a l'àrea N i Q com el rectangle de costats HA i dues terceres parts del quadrat de costat A junts com el rectangle de costats AH i AG i una tercera part del quadrat de costat AG junts.[1126] [EV 7, porisma, EV 17 i EII 4]

Però l'àrea N i Q és a la N, Q i O com el rectangle de costats HA i HG i una tercera part del quadrat de costat GA al quadrat de costat HG.[1127] [EXII 2 a segments circulars i EV 22]

Arquimedes l'estableix només per a la primera volta. Per aquesta raó, Heiberg opina que la paraula *οποιϱοῦν* va ser afegida posteriorment. HEIBERG (1880-1881), vol. II, p. 117.

1124. El radi vector menor es prolonga fins a la circumferència gran.

1125. Si r i R designen els radis vectors gran i petit i $\mathfrak{S}$ i $\mathfrak{s}$ les àrees descrites, aleshores $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{s}} = \frac{r+\frac{2}{3}\,(R-r)}{r+\frac{1}{3}\,(R-r)}$.

1126. Vegeu l'ítem *a* del problema 38 (pàgina 168).

1127. Vegeu l'ítem *b* del problema 38 (pàgina 168).

I el sector circular $\lhd GCH$[, que és l'àrea composta de les àrees N, Q i O,] és a l'àrea N[, que és un sector circular,] com el quadrat de costat HG al de costat HA. [Exii 2, per a sectors circulars semblants]

I, *ex æquali*, l'àrea conjunta N i Q és a la N com el rectangle de costats HG i HA i una tercera part del quadrat de costat AG junts al quadrat de costat HA. [Ev 22]

I, *dividendo* [i *invertendo*], l'àrea conjunta Q i N és a la Q
com el rectangle de costats HG i HA i una tercera part del quadrat de costat AG al rectangle de costats AG i HA i una tercera part del quadrat de costat AG junts. [Eii 3, Ev 19, porisma, i Ev 17][1128]

Tenim, doncs, d'una banda, que l'àrea O és a l'àrea N i Q com el rectangle de costats HA i dues terceres parts del quadrat de costat A junts com el rectangle de costats AH i AG i una tercera part del quadrat de costat AG junts
i, d'una altra, que l'àrea conjunta Q i N és a la Q
com el rectangle de costats HG i HA i una tercera part del quadrat de costat AG al rectangle de costats AG i HA i una tercera part del quadrat de costat AG junts.

Per tant, l'àrea O és a la Q com el rectangle de costats HA i AG i dues terceres parts del quadrat de costat AG junts al rectangle de costats HA i AG i dues terceres parts del quadrat de costat AG junts. [Ev 22]

Però el rectangle de costats HA i AG i dues terceres parts del quadrat de costat AG junts és al rectangle de costats HA i AG i dues terceres parts del quadrat de costat AG junts com els segments AH i dues terceres parts del AG junts a AH i una tercera part de AH junts. [Evi 1]

En definitiva, doncs, l'àrea O és a la Q com els segments AH i dues terceres parts del AG junts a AH i una tercera part de AH junts. [Ev 7] ♠

B.5*h* Ajuntem, ara, dos textos de Pappos i un de Simplici que, p. 98
com hem dit abans, estan relacionats d'alguna manera amb l'espiral.

1128. Vegeu l'ítem *c* el problema 38 (pàgina 168).

B.5h_1 [IV 33] PROPOSICIÓ 28. *Com ja he dit abans,*[1129] *la generació de la corba* [*quadratriu*] *és mecànica.*[1130] *Però la podem analitzar geomètricament recorrent a dos llocs en superfície —διὰ τῶν πρὸς ἐπιφανεΐας τόπων.*

[*Construcció.*] Considerem un quadrant de cercle $\lhd ABC$ donat en posició.

I, en aquest, un radi BD arbitrari.

Tirem el segment EF, perpendicular al radi BC [EI 12]
que té amb l'arc $\widehat{AC}$ una raó donada. ♣

Afirmo que el punt E [que queda determinat d'aquesta manera] es troba damunt la corba.

[*Demostració.*] Imaginem la superfície de cilindre que s'aixeca [verticalment] damunt l'arc $\widehat{ADC}$, *ἀπό τῆς ΑΔΓ περιφερείας ὀρθοῦ κυλίνφρου ἐπιφάνεια.* [DXI 21]

I també l'arc d'hèlix [cilíndrica] $\widehat{CHG}$ [d'aquesta superfície].[1131]

Sigui DG una generatriu del cilindre, *πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου.*

Tirem els segments EI i BL perpendiculars al pla del quadrant de cercle. [EXI 11]

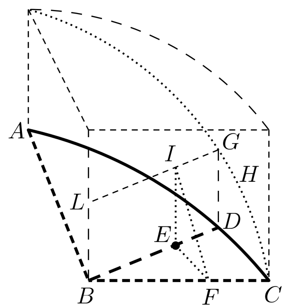


FIGURA B.5h_1 Proposició 33 del llibre IV de la *Col·lecció matemàtica* de Pappos

I, pel punt G, el segment GL paral·lel al BD.

Atès que la raó del segment EI i l'arc $\widehat{DC}$ és donada per la naturalesa de l'hèlix,

i la del segment EF i l'arc $\widehat{DC}$ ho és per hipòtesi,

resulta que la dels segments EF i EI queda determinada. [dada 8]

A més, aquests segments estan en juxtaposició, *εἰσὶν παρὰ θέσει.*[1132]

Per tant, el segment FI el trobem ben determinat. [dada 41]

1129. Es refereix al text B 7.9.d_1 de PLA (2016*b*), p. 500.

1130. És a dir, s'introdueix a través del moviment de dos segments. L'un lineal i l'altre circular. PLA (2016*b*), p. 252.

1131. De fet, l'hèlix cilíndrica la descriu Heró alguns segles més tard, però nosaltres ho hem fet a la pàgina 98.

1132. Són donats en posició. *Dades*, definició 15.

En conseqüència, FI és perpendicular al radi BC.[1133]

I, en conseqüència, FI es troba en el segment pla secant, *ἐν τέμοτι ἄρα ἐπιπέδῳ*,[1134] i, de retruc, el punt I també.

Així doncs, el punt I es troba en la [superfície cilíndrica,][1135]
ja que el segment GL, situat entre l'arc d'hèlix $\widehat{GHC}$ i el segment LB, està donat en posició i es manté paral·lel al pla base.[1136]

En definitiva, el punt I es troba en una corba[1137]
i el E també.[1138] ♠

Fins aquí l'anàlisi general.

Ara bé, si la raó que hi ha entre el segment EF i l'arc $\widehat{AC}$ és la del segment BA i l'arc $\widehat{ADC}$,
obtenim la quadratriu tal com havíem promès. ♠[1139]

B.5h_2 [IV 34] PROPOSICIÓ 29. *Tanmateix, aquesta anàlisi es pot fer de manera semblant però usant l'espiral descrita en el pla.*[1140]

[*Construcció.*] Suposem que la raó que hi ha entre el segment EF i l'arc $\widehat{AC}$ és la mateixa que hi ha entre el segment AB i l'arc $\widehat{ADC}$.

I que, mentre el segment AB gira al voltant del punt B,
un punt H que surt del punt A es mou cap a aquest i hi arriba quan el segment AB se superposa al BC
i descriu l'arc d'espiral $\widehat{BHA}$.[1141]

Aleshores, l'arc $\widehat{CDA}$ és al $\widehat{CD}$ com el segment AB al BH.[1142]

1133. Ítem *a* del problema 61 (pàgina 177).
1134. En el pla que talla el cilindre.
1135. En el manuscrit, aquestes paraules són il·legibles.
1136. El segment GL genera una superfície helicoidal en el cilindre.
1137. La corba que determinen la superfície helicoidal i el pla que passa pel segment LG que la genera.
1138. El punt E es troba damunt la projecció ortogonal de la corba guerxa que determina el punt I i, per tant, en el pla base.
1139. Ítem *b* del problema 61 (pàgina 177).
1140. Podem aconseguir la quadratriu com a intersecció de dues superfícies basant-nos en l'espiral d'Arquimedes. La figura que trobem a TORELLI (1769), p. 96, millora sensiblement la de COMMANDINO (1588), p. 58.
1141. És la definició d'*espiral* donada per Arquimedes [LE, definició 1, pàgina 358].
1142. És una propietat que deriva del fet que els moviments són uniformes, és a dir, amb velocitat constant.

I, si apliquem l'operació *alternando*, [Ev 16]
el segment EF manté la raó amb $\widehat{DC}$.

Per tant, els segments BH i FE són iguals.[1143]

Ara, pel punt H, tirem la perpendicular KH al pla base [▱ABC] [Exi 12] de manera que KH és igual a BH.

[Ei 2 o Ei 3]

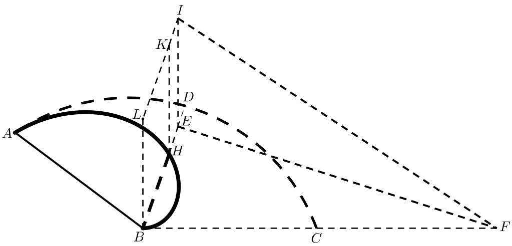


Figura B.5h_2 Proposició 34 del llibre iv de la *Col·lecció matemàtica* de Pappos

El punt K es troba en una superfície cilíndrica sobre l'espiral però també damunt una superfície cònica[, ja que el segment BK és una generatriu d'un con inclinat mig angle recte sobre el pla base].

En conseqüència, el punt K es troba en una corba.[1144] ♣

[*Demostració*.] Pel punt K, tirem el segment LKI paral·lel al EB

[Exi 6][1145]

i els segments BL i EI perpendiculars al pla base. [Exi 12]

D'això es dedueix que el segment LKI es troba damunt una superfície plectoide, ἐν πλεςτοειδεῖ ἐπιφανείᾳ,[1146]
ja que es mou segons el segment BL donat en posició
i seguint el segment també donat en posició en el qual es troba el punt K.

En conseqüència, el punt I també està situat en aquesta superfície.

Però també és damunt d'un pla,
ja que els segments FE i EI són iguals perquè EI és igual a BH
i FI, perpendicular a BC, que està donat en posició.

1143. Per la propietat de l'espiral, $\frac{\widehat{CDA}}{\widehat{CD}} = \frac{BC}{BH} = \frac{AB}{BH}$. *Alternando*, $\frac{BH}{\widehat{CD}} = \frac{AB}{\widehat{ADC}}$ [Ev 16]. I, per hipòtesi, $\frac{EF}{\widehat{CD}} = \frac{AB}{\widehat{ADC}}$. De fet, doncs, Ev 11 o Nc 1, $\frac{BH}{\widehat{CD}} = \frac{EF}{\widehat{DC}}$. Per tant, $BH = EF$ [Ev 9].

1144. Ítem c del problema 61 (pàgina 177).

1145. N'és un porisma.

1146. Nota 6 de Pappos (1932), edició francesa, vol. i, p. 198.

En definitiva, doncs, el punt I es troba en una corba i, per tant, el E també.

I, atès que l'angle que formen els segments AB i BC és recte, evidentment la corba que obtenim és la quadratriu descrita al començament. ♠

Iàmblic, referint-se a la quadratura del cercle, exposa la informació següent recollida per Simplici.

B.5h_3 Arquimedes [quadra el cercle] amb l'espiral i Nicomedes usant una corba especial anomenada *quadratriu* —*τετραγωίζουνα*. Apol·loni, en canvi, n'empra una que anomena la *germana de la cocleoide* que és igual a la de Nicomedes. I, finalment, Carp fa servir una corba que en diu *de doble moviment*.[1147]

B.6 CE: *Sobre els conoides i els esferoides*

En aquest apartat oferim, en primer lloc, a) la introducció d'aquesta monografia, adreçada a Dositeu, que conté els enunciats dels resultats més importants. I, després, b)les dues definicions i c) un lema que no demostra.[1148] Tot seguit, proporciona d) les proposicions que classifiquem en cinc blocs: d_1) els enunciats de les primeres proposicions sobre sumatoris; d_2) la proposició 3, que amplia un resultat d'Euclides; d_3) proposició 4, que compara l'àrea d'una el·lipse amb la del cercle de diàmetre el seu diàmetre gran; d_4) proporciona el con que genera una el·lipse donada d'alçada la del vèrtex en un extrem d'un segment que ix del seu centre; d_5) la proposició 21, que proporciona el volum d'un segment de paraboloide de revolució i, finalment, p. 100-107

1147. Simplici (2002), llibre vii, 192, 20-23, p. 49.

Aquests comentaris de Simplici sobre les *Categories* d'Aristòtil es titulen *Σιμπλικίου διδακαλου τοῦ μεγάλου σχόλια ἀπό φωνῆς εἰ̓ς τας Ἀριστοτέλους κατηγορίας* i es van publicar per primera vegada a Venècia l'any 1499.

1148. La demostració es troba a LE 11.

d_6) totes les proposicions de les quals depèn la demostració de la CE 21.[1149]

B.6*a* La introducció de la monografia

p. 100 [Introducció.] Arquimedes a Dositeu: «Salut!»

En aquesta monografia t'he tramès no només les demostracions dels teoremes que no t'he enviat abans,[1150] sinó també les d'altres teoremes que he descobert posteriorment i que han entretingut el meu pensament força temps perquè, després d'examinar-los una vegada i una altra, he vist que presentaven moltes dificultats que em preocupaven. Per això, he decidit no ajuntar-los amb els altres. Ara bé, un cop els he considerat amb cura, he trobat les demostracions que inicialment se m'escapaven.

El que quedava per dir dels primers teoremes fa referència als conoides parabòlics.[1151] I el que he descobert més recentment té a veure amb els conoides hiperbòlics i els esferoides,[1152] alguns dels quals anomeno *allargats* i uns altres *aixafats*.[1153]

[I.] Pel que fa al paraboloide, afirmo el següent:[1154]

a) Si una paràbola gira al voltant del seu diàmetre fins a retornar al lloc de partida,[1155]
el sòlid que determina s'anomena *conoide parabòlic*.[1156]

El diàmetre fix de la paràbola és l'eix del conoide,
i el punt en el qual l'eix troba la superfície del paraboloide, el vèrtex.

1149. Per a la traducció catalana completa, Masià (2016).

1150. En clara referència a les monografies ECi i ii, LE i QP.

1151. A partir d'ara, en direm *paraboloides*.

1152. D'ara endavant, els anomenarem *hiperboloides* i *el·lipsoides*. Els hiperboloides són «hiperboloides de dos fulls» però no hi ha confusió possible perquè Arquimedes no tracta mai els «d'un full».

1153. Hi ha autors que prefereixen l'expressió *aplanats*.

1154. Fixem-nos que els ítems *a* i *b* de [I] són definicions que Arquimedes no inclou en l'apartat de les definicions (text B.6*b*, pàgines 423-424).

1155. L'analogia d'aquesta definició amb les del cilindre, el con i l'esfera d'Euclides està explicitada en el llibre Exi.

1156. Nota 1151.

b) Considerem un pla que toca[1157] un paraboloide.

En tirem un altre de paral·lel al pla tangent. [Exi 14 o Exi 15]

Aquest pla talla el paraboloide en el que s'anomena *segment de paraboloide*.[1158]

La secció que [aquest pla] determina en el paraboloide és la base del segment,
el punt de tangència, que es troba en l'altre pla, és el vèrtex,
i el segment rectilini que ix del vèrtex paral·lel a l'eix i que està situat a l'interior del segment de paraboloide, l'eix.[1159]

Les qüestions que plantegem són les següents:

1. El segment de paraboloide obtingut amb un pla perpendicular a l'eix equival a tres vegades la meitat del con que té la mateixa base i com a eix[1160] aquest segment.[1161]

2. Però quan el tallem per dos plans arbitraris,[1162] els segments de paraboloide són entre si com la raó doble dels eixos.[1163]

[II.] Pel que fa a l'hiperboloide, dic això:[1164]

a) En un pla hi ha una hipèrbola, el seu diàmetre i les asímptotes.

Fem girar [tot plegat] una volta sencera al voltant del diàmetre.

És clar que les asímptotes descriuen un con recte[1165] de vèrtex el punt de tall de les asímptotes[1166] i eix el diàmetre.

1157. En la nomenclatura geomètrica grega, és tangent.

1158. De vegades, si no hi ha confusió, el «segment de paraboloide» l'anomenarem simplement *paraboloide*.

1159. Fixem-nos que Arquimedes distingeix l'eix del paraboloide, infinit, i l'eix del segment de paraboloide, finit. De fet, aquesta distinció no és rellevant perquè solament treballa amb segments de paraboloide.

1160. Altura.

1161. CE 21 (B.6d_5, pàgina 440).

1162. Són plans perpendiculars a l'eix del paraboloide i, de retruc, paral·lels entre si. Exi 14.

1163. CE 24. Masià (2016), p. 91-93.

1164. Nota 1155 (pàgina 418).

1165. Aquesta no és pas la definició que dona Euclides a Dxi 18, però aquestes dues definicions són equivalents.

1166. Les rectes que més s'apropen a la secció del con obtusangle: «αἳ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνιον κώνου τομᾶς». Fixem-nos que Arquimedes maneja molt bé la hipèrbola i les asímptotes. Apol·loni de Perge (1963), Cii 1.

El sòlid limitat per la hipèrbola s'anomena *hiperboloide*; el diàmetre immòbil, *eix*, i el punt de la superfície de l'hiperboloide, que es troba en l'eix, *vèrtex*.

El con determinat per les asímptotes es diu *con envoltant a l'hiperboloide*.[1167]

I, finalment, el segment que uneix els vèrtexs de l'hiperboloide i del con s'anomena *segment adjunt a l'eix*.[1168]

b) Considerem un pla tangent a un hiperboloide.

Hi tirem un pla paral·lel. [Exi 14 o 15]

Determina un segment d'hiperboloide.[1169]

La secció determinada pel pla en l'hiperboloide és la *base del segment*, i el punt de tangència, el *vèrtex*.

La part de segment inclosa dins el segment d'hiperboloide [de la prolongació] del segment que uneix els vèrtexs de l'hiperboloide i del con serà l'*eix*,
i la que es troba entre els vèrtexs, *segment afegit a l'eix*.

c) Tots els paraboloides són semblants.

I, en canvi, els hiperboloides ho són quan els cons envoltants respectius també ho són.[1170]

Les qüestions que ens plantegem són les següents:

1. Tallem un hiperboloide per un pla perpendicular a l'eix.

La raó del segment d'hiperboloide que obtenim i el con de la mateixa base i el mateix eix[1171] és la que hi ha entre el segment [d'hiperboloide] format per l'eix i tres vegades el segment adjunt junts i el d'hiperboloide format per l'eix i dues vegades el segment adjunt.[1172]

2. Quan el pla que talla l'hiperboloide no és perpendicular a l'eix, la raó que el segment d'hiperboloide té amb el segment de con de la mateixa base i el mateix eix que aquest és la mateixa que la que té el

1167. Diu: περιέχων τὸ κωνοειδές.

1168. Diu: ποτεοῦσα τῷ ἄξονι.

1169. Si no crea confusió l'anomenarem, simplement, *hiperboloide*.

1170. Els paraboloides són semblants perquè les paràboles ho són. Però, en el cas de les hipèrboles, cal que aquestes siguin semblants, és a dir, que els seus eixos siguin proporcionals.

1171. Altura.

1172. CE 25. Masià (2016), p. 93-98.

segment que obtenim ajuntant l'eix del segment i tres vegades el segment adjunt i el que obtenim ajuntant l'eix i dues vegades el segment adjunt.[1173]

[III.] Pel que fa als esferoides, dic el següent:[1174]

a) Si una el·lipse gira al voltant del diàmetre gran fins a tornar al mateix lloc,
el sòlid que produeix s'anomena *esferoide allargat*.

Però, si ho fa al voltant del diàmetre petit, s'anomena *esferoide aixafat* [o aplanat].[1175]

[En tots dos casos,] el diàmetre immòbil rep el nom *eix de l'el·lipsoide*;
el punt de la superfície de l'el·lipsoide determinat per l'eix, *vèrtex*,
i el centre de l'eix, *centre*.

Finalment, el segment perpendicular a l'eix pel seu punt mitjà, *diàmetre*.

b) Considerem dos plans paral·lels tangents a l'el·lipsoide
i un altre paral·lel a aquests que el talli.

La secció que determina el pla que el talla s'anomena *base dels segments* [*d'el·lipsoide*];
els punts de tangència, els *vèrtexs*,
i, finalment, les parts del segment [rectilini] que uneix els vèrtexs inclosos en els segments de l'el·lipsoide, *eixos* dels segments.

c) Els plans tangents a l'el·lipsoide només el toquen en un punt
i el segment [rectilini] que uneix els punts de contacte hi passa pel centre.

d) Els el·lipsoides semblants són els que tenen els eixos i els diàmetres proporcionals.[1176]

e) Els segments d'el·lipsoides, hiperboloides i paraboloides són semblants quan els obtenim de sòlids semblants, tenen les bases i els eixos semblants, tant si són perpendiculars als plans de les bases com si formen angles iguals amb els seus diàmetres,
i mantenen entre si la mateixa raó que els diàmetres homòlegs corresponents.

1173. CE 26. Masià (2016), p. 99-103.

1174. Nota 1155 (pàgina 418).

1175. Usarem el terme *el·lipsoide* per a referir-nos tant als esferoides allargats com als aixafats.

1176. Fixem-nos en la diferència entre aquesta definició de semblança i la de l'ítem *c* de [II].

També ens plantegem les qüestions següents relatives als el·lipsoides:

1. Per què, quan tallem un el·lipsoide per un pla que passa pel centre i és perpendicular a l'eix,
els segments resultants equivalen al doble del con que té la mateixa base i el mateix eix que aquest?[1177]

2. En canvi, si el tallem per un pla perpendicular a l'eix però que no passa pel centre,
per què el segment més gran [de l'el·lipsoide] és al con amb la mateixa base i el mateix eix que aquest segment [d'el·lipsoide]
com el segment [rectilini format per la meitat de l'eix de l'el·lipsoide i l'eix del seu segment petit a l'eix d'aquest segment petit?

3. Per què el segment petit [de l'el·lipsoide] és al con que té la mateixa base i el mateix eix que aquest
com un segment [rectilini] format per la meitat de l'eix de l'el·lipsoide a l'eix del seu segment gran?[1178]

4. I per què, quan tallem l'el·lipsoide per un pla que passa pel seu centre però no és perpendicular a l'eix,
cada un dels segments obtinguts equival al doble del sòlid —que, de fet, és el segment de con—[1179] de la mateixa base i el mateix eix que aquest?[1180]

5. Per què, quan obtenim aquests esferoides tallant l'el·lipsoide per un pla que ni passa pel centre ni és perpendicular al seu eix,
el segment més gran [de l'el·lipsoide] és al sòlid de la mateixa base i el mateix eix que aquest com el segment [rectilini] format per la meitat del segment que uneix els vèrtexs dels seus segments
i l'eix del segment petit [de l'el·lipsoide] a l'eix del seu segment petit?[1181]

6. I, per acabar, per què el segment petit és al sòlid de la mateixa base i el mateix eix com el segment [rectilini] format per la meitat del

1177. Altura. CE 27. Masià (2016), p. 103-108.
1178. CE 29 i CE 31. Masià (2016), p. 111-118 i 121-125.
1179. Diu: *ἀπότμαμα κώνον* però en fixa el sentit en la definició 1 (pàgina 424).
1180. CE 28. Masià (2016), p. 108-111.
1181. CE 30. Masià (2016), p. 118-121.

que uneix els vèrtexs dels segments [d'el·lipsoide] més la meitat de l'eix del seu segment gran a l'eix d'aquest segment?[1182]

[IV.] Un cop establerts aquests teoremes, en podem demostrar d'altres, juntament amb alguns problemes, com ara:[1183]

1. Els el·lipsoides i els segments d'el·lipsoides, hiperboloides i paraboloides semblants són com la raó triple dels seus eixos respectius.
2. Els quadrats construïts sobre els diàmetres d'el·lipsoides equivalents són inversament proporcionals als seus eixos.

I els el·lipsoides equivalen entre si quan els quadrats construïts sobre els seus diàmetres són inversament proporcionals als eixos.[1184]

3. Donat un pla i un el·lipsoide, un hiperboloide o un paraboloide, podem tallar-ne un segment amb un pla paral·lel al pla donat de manera que el segment que obtenim és equivalent a un con, un cilindre o una esfera donada.[1185]

Un cop he redactat els teoremes i tot allò que cal[1186] per a demostrar les proposicions que acabo d'enunciar, en dono les demostracions.

Que la fortuna et somrigui!

B.6*b* Les dues definicions de CE

Com acabem de veure, en la introducció, Arquimedes descriu p. 100
els sòlids que actualment anomenem *quàdriques*. Però, ara, un cop acabat aquest apartat inicial, dona dues definicions referents als talls dels cons i dels cilindres per un pla.[1187]

1182. Aquests sòlids són cons. CE 32. Masià (2016), p. 126-128.

1183. Enuncia dos teoremes (ítems 1 i 2) i un problema (ítem 3). Cap, però, no es troba ni en aquesta monografia ni en cap altra de les conservades. Tampoc no tenim coneixement d'una obra perduda en la qual els pogués haver establert.

1184. Aquests dos enunciats junts proporcionen una condició necessària i suficient per a l'equivalència d'aquestes tres menes de sòlids: els paraboloides, els hiperboloides i els el·lipsoides.

1185. Com indica el text, és un problema.

1186. Diu: *ἐπιτάγματα*, és a dir, ordres, qüestions imposades com les que trobem a les proposicions CE 7 [B.6d_4, pàgines 436-439], CE 8 i 9 [Masià (2016), p. 53-56 i 56-60].

1187. Fixem-nos que ara, com abans, Arquimedes diferencia el sòlid en

B.6*b*₁ [Definició 1] Suposem que un pla talla totes les generatrius d'un con. La secció resultant serà una circumferència[1188] o una el·lipse.

Si és una circumferència, és obvi que el segment [de sòlid] que queda determinat a la banda del vèrtex [del con] és un con.

Si és una el·lipse, el segment [de sòlid] que queda determinat a la banda del vèrtex [del con] s'anomena *segment de con*.

La *base* del segment [de con] és el [segment de] pla limitat per l'el·lipse.

El *vèrtex* és el del con, i l'*eix*, la recta que uneix el vèrtex i el centre de l'el·lipse.

B.6*b*₂ [Definició 2] Suposem que dos plans paral·lels tallen totes les generatrius d'un cilindre. La seccions resultants seran circumferències[1189] o el·lipses iguals i semblants.

Si són circumferències, és obvi que el segment [de sòlid] que queda delimitat pels plans paral·lels és un cilindre.

Si són el·lipses, el segment [de sòlid] que queda delimitat pels plans paral·lels és un *segment de cilindre*.

La *base* del segment és un dels [segments dels] plans limitats per les el·lipses,
i l'*eix*, el segment que uneix els centres de les el·lipses i forma part de l'eix del cilindre.

B.6*c* El lema previ de CE

p. 100 Abans d'establir les proposicions amb demostració de la monografia, Arquimedes ofereix un enunciat —que nosaltres distingim com a lema— del qual diu que té una demostració evident.[1190]

la seva totalitat i el segment que queda determinat quan el tallem per un o dos plans paral·lels.

1188. El text diu «un cercle» però sembla més adequat fixar-se en la corba que el pla determina en les generatrius.

1189. Nota 1188.

1190. Aquest lema també s'enuncia i es demostra a LE 11.

B.6*c*1 [Lema.] Considerem una col·lecció de magnituds diferents. Cada una excedeix de l'anterior la mateixa magnitud i l'excés és la [magnitud] petita.[1191]

I considerem també una altra [col·lecció] amb el mateix nombre de termes, tots aquests iguals a la magnitud gran [de la col·lecció anterior].

La suma de les magnituds iguals [les de la segona col·lecció] és més petita que el doble de la suma de les diferents [les de la primera] i més gran que el doble de la suma de les magnituds desiguals menys la més gran de totes.[1192]

La demostració és evident. ♠

B.6*d* Algunes proposicions de CE

Ara, com ja hem indicat en la nota introductòria del paràgraf B.6 (pàgina 417), recollim algunes de les proposicions de CE. Les apleguem en sis grups. El primer d_1) conté les dues primeres, que són «elements» aritmètics.[1193] El segon d_2), la tercera, que amplia un resultat d'Euclides. El tercer d_3), la quarta, que compara l'àrea de l'el·lipse amb la del cercle que té de diàmetre el més gran de l'el·lipse. El quart d_4) proporciona el con que genera una el·lipse donada d'alçada la del vèrtex del con al centre de l'el·lipse [CE 7]. De fet, es tracta d'un problema. En el cinquè d_5), trobem la proposició CE 21 —la més important—, que determina el volum d'un segment de paraboloide [de revolució]. I el darrer grup d_6), aplega les proposicions que fan que la demostració de CE 21 no tingui forats (taula A.2, pàgina 426). p. 100

1191. És a dir, tenim una progressió aritmètica de magnituds que es diferencien el terme més petit. O sigui, $a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n$, amb $a_i = a_{i-1} + a_0$ i $i = 1, \ldots, n$.

1192. Expressat algebraicament, correspon a $2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right) < n \cdot a_n < 2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)$. Vegeu l'exercici 47 o bé l'ítem b_1 del problema 34 (pàgines 102 i 166), respectivament.

1193. Vegeu el problema 43 (pàgina 171), en el qual s'enuncien en termes algebraics.

TAULA B.2. *Dependències internes de CE 21*

Proposició	*Paràgraf*	*Pàgines*	*Dependències*
CE 21	B.6d_5	439-443	CE 19, 11 i CE lema[1194]
CE 19	B.6$d_{6.6}$	454-455	CE 17, 15 i 11
CE 17	B.6$d_{6.5}$	452-454	CE 16 i 14
CE 16	B.6$d_{6.4}$	450-452	CE 11
CE 15	B.6$d_{6.3}$	448-450	CE 11
CE 12	B.6$d_{6.2}$	445-448	CE 11
CE 11	B.6$d_{6.1}$	444-445	——
CE 7	B.6d_4	436-439	——
CE 4	B.6d_3	434-436	——
CE 3	B.6d_2	431-434	——
CE 2	B.6$d_{1.2}$	428-431	CE 1
CE 1	B.6$d_{1.1}$	426-428	——

B.6d_1 Les dues primeres proposicions de CE

Els enunciats i les demostracions de les proposicions CE 1 i CE 2, relatives a les sumes dels termes d'una progressió aritmètica i dels seus quadrats, són feixucs.

B.6$d_{1.1}$ [CE 1] *Considerem una col·lecció de magnituds proporcionals dos a dos i una altra amb la mateixa quantitat* [*de membres*] *igualment disposats. Suposem que les primeres, o només algunes d'aquestes, es comparen amb unes altres quantitats i hi tenen la mateixa raó. I suposem que les segones també la tenen* [*amb les d'una quarta col·lecció*]. [*Afirmo que*] *la suma de les primeres és a la de les quantitats amb les quals s'han comparat com la suma de les segones a la d'aquelles amb les quals s'han comparat.*

Considerem dues col·leccions amb dos grups de magnituds, totes amb el mateix número de termes, com ara:
A, B, C, D i F, i G, H, I, K, L i M,
i N, O, P, Q, R i S, i T, U, V, W, X i Y.

Suposem que els termes de les dues primeres tenen la mateixa raó dos a dos,
és a dir, que A és a B com G a H, B a C com H a I, i així amb els altres.

1194. B.6c_1 (pàgina 425).

I també que els de la primera i la tercera tenen la mateixa que els de la segona i la quarta,

és a dir, que A és a N com G a T, B a O com H a U, i així amb els altres.

Es tracta de demostrar que la suma dels termes A, B, C, D, E i F és a la de N, O, P, Q, R i S com la dels G, H, I, K, L i M a la dels T, U, V, W, X i Y.

[*Demostració.*] *Invertendo*, atès que A és a N com G a T, tenim també que N és a A com T a G. [Ev 7, porisma]

I, *ex æquali*, com que A és a B com G a H i B a O com H a U, resulta que N és a O com T a U. [Ev 22]

Per les mateixes raons, tenim que O és a P com U a V.

D'altra banda, la suma dels segments A, B, C, D, E i F és a A com la dels G, H, I, K, L i M a G. [Ev 16 i 12]

Però també sabem que N és a la suma de les magnituds N, O, P, Q, R i S com T a la de les T, U, V, W, X i Y. [Ev 16 i 12]

Per tant, la suma de les magnituds A, B, C, D, E i F és a la de les N, O, P, Q, R i S com la de les G, H, I, K, L i M a la de les T, U, V, W, X i Y.
[Ev 7 o Nc 1, Ev 16, 11 i 22]

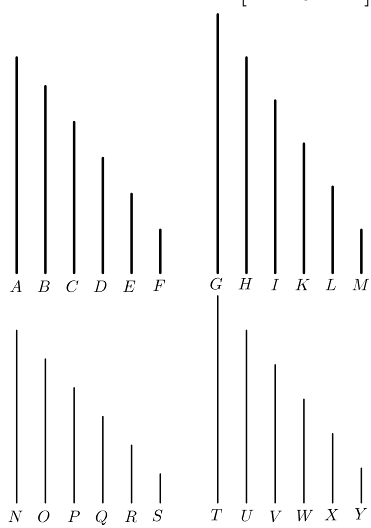


FIGURA CE 1

També és clar que, si d'entre les magnituds A, B, C, D, E i F, les A, B, C, D i E tenen la mateixa raó amb les de N, O, P, Q i R,
però F no la té amb cap altra,
i, anàlogament, entre les G, H, I, K, L i M,
les G, H, I, K i L tenen la mateixa raó que les G, H, I, K i L amb les T, U, V, i X,
però M no la té amb cap altra,

tenim anàlogament que la suma del les magnituds A, B, C, D, E i F és a la de les N, O, P, Q, R com la de les G, H, I, K, L i M a la de les T, U, V i X. ♠[1195]

B.6*d*₁.₂ [CE 2] *D'una banda, disposem d'un cert nombre de segments* [*rectilinis*] *iguals. A cada un hi apliquem una superfície l'excedent de la qual és un quadrat.*[1196] *Suposem que cada un dels costats* [*dels quadrats*] *augmenta el mateix respecte de l'anterior i que l'augment és precisament el costat del quadrat més petit. D'altra banda, disposem d'una col·lecció d'àrees iguals al rectangle més gran* [*dels aplicats*]. [*Afirmo*] *que la raó que hi ha entre la suma de les àrees iguals i la de les diferents és més petita que la que hi ha entre un segment igual al costat del quadrat gran més un dels segments iguals i la tercera part d'aquest costat més la meitat d'un dels segments iguals. I també afirmo que la raó que hi ha entre la suma de les àrees iguals i la de les diferents exclosa la més gran és més gran que la mateixa raó dels segments* [*esmentada abans*].

Considerem una col·lecció arbitrària de segments rectilinis iguals i damunt de cada un d'aquests, que designem A, hi apliquem una àrea per excés d'un quadrat.

Siguin B, C, D, E, F i G els costats dels quadrats,

1195. Tenim $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ i $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, amb $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}_{i+1}} = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{B}_{i+1}}, i = 1, 2, \ldots, n-1$ (α). I també $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ i $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n$, amb $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{M}_i} = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{N}_i}, i = 1, 2, \ldots, n$. Volem veure que $\frac{\sum_1^n \mathfrak{A}_i}{\sum_1^n \mathfrak{M}_i} = \frac{\sum_1^n \mathfrak{B}_i}{\sum_1^n \mathfrak{N}_i}$. La proposició és una conseqüència immediata de les propietats de les proporcions de magnituds establertes en el llibre V dels *Elements* d'Euclides. De fet, només cal observar que la igualtat de raons dels elements de les col·leccions primera i segona es transporta a la tercera i la quarta, *alternando* [Ev 16]. En concret, $\frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{A}_i} = \frac{\mathfrak{N}_i}{\mathfrak{B}_i}$, $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}_{i+1}} = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{B}_{i+1}}$ i $\frac{\mathfrak{A}_{i+1}}{\mathfrak{M}_{i+1}} = \frac{\mathfrak{B}_{i+1}}{\mathfrak{N}_{i+1}}$. La resta és un exercici. De fet, només cal aplicar Ev 22 per a obtenir $\frac{\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{M}_{i+1}} = \frac{\mathfrak{N}_i}{\mathfrak{N}_{i+1}}, i = 1, 2, \ldots, n-1$ (β). Ara fem servir Ev 12 a α i a β, i, després, *ex æquali* [Ev 22].

1196. Diu: *ϵί κα..., παρ′ ϵκάσταν αυτᾶν παραπέση τι χωριν υπϵρβάλλον ϵῖδϵι τϵτραγώνῳ*, «aplicar a un segment a un rectangle R de base b i altura h de manera que $h - a = b$». O sigui que $R := b\,h = a\,h + h^2$. Pla (2016*b*), p. 139, 144 i 149, i, més tècnicament, EI 44, EII 5 i EII 6, a Pla (2018), p. 143 i 165-167.

cada un dels quals excedeix el següent una mateixa línia
que és igual al més petit d'aquests.[1197]

Anomenem B i G el més gran i el més petit.

Suposem donades les àrees H, I, K i L [juntes] el mateix nombre de vegades que les anteriors.

Pel que fa a la seva grandària, cada una és igual a l'àrea gran aplicada als segments A i B junts.

I suposem que els segments H i I [junts] són iguals a A,
els K i L a B, i els H i I al doble de I, els K i L al triple de K.

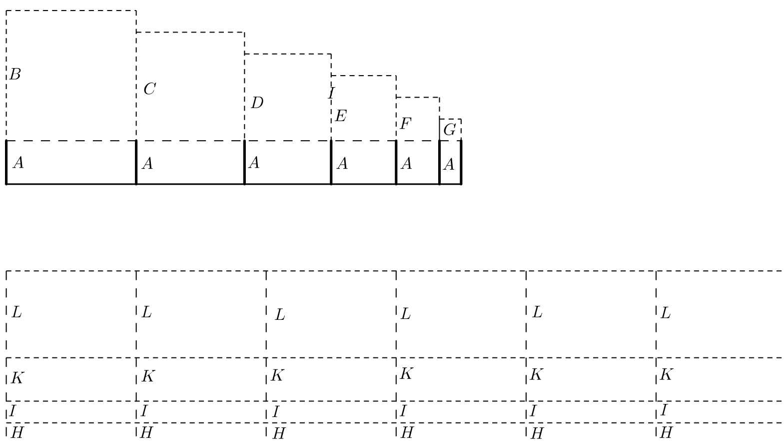


FIGURA CE 2

Volem demostrar que la raó que hi ha entre les àrees de H, I, K i L junts i la suma de les A i B, A i C, A i D, A i F, i A i G és més petita que la dels segments H, I, K i L [junts] i els I i K junts,[1198] mentre que la que hi ha entre la primera suma i la segona menys l'àrea gran A i B és més gran que la dels segments H, I, K i L [junts] i que la dels I i K junts.

Considerem algunes àrees, designades amb la lletra A, cada una de les quals supera la següent una àrea comuna igual a la més petita de totes aquestes àrees.[1199]

1197. És a dir, $B - C = C - D = D - E = E - F = F - G = G$.
1198. Arquimedes usa les mateixes lletres per a designar costats i àrees.
1199. És a dir, formen una progressió aritmètica.

I un nombre igual d'aquestes que les A, H i I, que juntes equivalen a l'àrea gran A.

[*Demostració.*] Òbviament, totes les àrees H i I juntes en fan una de més petita que el doble de totes les A
i més gran que el doble d'aquestes si hi traiem la més gran. [CE 1]

D'això es dedueix que la suma de totes les àrees I és més petita que la suma de totes les àrees A
i més gran que la de totes aquestes llevat de la més gran.

D'altra banda, disposem d'una col·lecció de segments B, C, D, E, F i G, cada un dels quals supera el següent el segment més petit de tots,[1200]
i, d'una altra, el mateix nombre de segments K i L que els de la col·lecció precedent,
que junts són iguals al primer d'aquesta col·lecció.

Per tant, d'acord amb un resultat que he establert en l'obra relativa a l'espiral,
la suma de tots els quadrats de costats iguals entre si i iguals a B és més petita que tres vegades la suma dels quadrats que tenen com a costats els segments que augmenten un segment constant
i més gran que tres vegades la primera suma menys el quadrat més gran. [LE 10]

Ara bé, la suma de les àrees K és més petita que la de les àrees B, C, D, E, F i G,
però més gran que la de les àrees C, D, E, F i G.

En conseqüència, la suma de les àrees K i I també és més petita que la de les àrees [conjuntes] A i B, A i C, A i D, A i E, A i F, i A i G
i alhora més gran que la de les A i C, A i D, A i E, A i F, i A i G.

En definitiva, és clar que la raó que hi ha entre la suma de les àrees H, I, K, L i MN i la de les primeres àrees conjuntes [A i B, A i C, A i D, A i E, A i F, i A i G] és més petita que la dels segments H i L junts, i I i K junts.[1201]

I també és evident que la raó que hi ha entre la primera suma i la

1200. Nota 1199 (pàgina 429).
1201. Nota 1198 (pàgina 429).

de totes aquestes menys A i B és més gran que la dels segments H i L junts, i I i K junts. [EV 8, DV 7 i EVI 1] ♠[1202]

B.6d_2 La proposició CE 3

Aquesta proposició consta de dues parts. La primera ja era coneguda i Arquimedes n'omet la demostració però n'hi afegeix una segona i la demostra.

[CE 3] a*) Si, per un punt arbitrari, tirem segments tangents a una secció cònica i dues cordes paral·leles als segments tangents concurrents, els rectangles determinats pels segments són entre si com els quadrats de les tangents, i el rectangle determinat per un dels segments de la corda correspon al quadrat del segment tangent paral·lel a aquesta. Això s'ha demostrat en un dels* Elements de còniques.[1203] b*) Si considerem dos segments de paràbola amb el mateix diàmetre:* b_1*) els segments són iguals, i* b_2*) també ho són els triangles inscrits en aquests segments de base els segments considerats i la mateixa altura.*

Anomenem diàmetre *d'un segment arbitrari el segment que dimidia tots els segments paral·lels a la base.*

Sigui ◡ ABC una paràbola.

Tallem els dos segments parabòlics ▽ ADE i ▽ HBC.

Siguin DF i BG els seus diàmetres.

Suposem que són iguals.

1202. Siguin $R_1, \ldots, R_{n-1}, R_n$ els rectangles aplicats a A, sent $R_i := a\cdot(i\,h)+(i\,h)^2$, llavors $\frac{n, R_n}{\sum_1^n R_i} < \frac{a+n\,h}{\frac{n\,h}{3}+\frac{a}{2}}$ i $\frac{n\,R_n}{\sum_1^{n-1} R_i} > \frac{a+n\,h}{\frac{n\,h}{3}+\frac{a}{2}}$. Cal fer servir CE 1 en la col·lecció d'àrees $a\,h, a\,(2\,h), \ldots, a\,\big((n-1)\,h\big), a\,(n\,h)$ i LE 10 en $h^2, (2\,h)^2, \ldots, \big((n-1)\,h\big)^2, (n\,h)^2$, que estableix que la suma de totes i la de totes menys la darrera és més gran i més petita, respectivament, que $\frac{n\,(n\,h)^2}{3}$. Nota 1193 (pàgina 425).

Voldríem fer notar que, en aquestes proposicions, Arquimedes es preocupa de fitar la suma dels termes d'una progressió aritmètica i la dels seus quadrats i, en particular, la dels n primers nombres naturals i la dels seus quadrats.

1203. Probablement, eludeix el treball d'Euclides. La proposició la trobem demostrada, d'una manera relativa, a *Còniques*, CIII 17.

Volem demostrar que:

b_1) Els segments $\bigtriangledown ADE$ i $\bigtriangledown HBC$ són equivalents.

b_2) Els triangles inscrits de la manera descrita també ho són.

$b_{1.1}$) i $\mathrm{b}_{2.1}$)[1204] D'entrada, suposem que el segment CH que determina un dels segments és perpendicular al diàmetre de la paràbola.

Considerem que el «paràmetre» [de la paràbola] és M.[1205]

Pel punt A, tirem el segment AK perpendicular al DF.

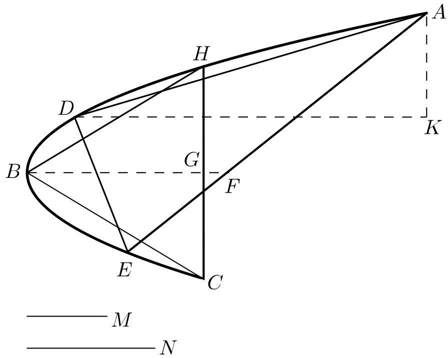


Figura CE 3

Aleshores, DF és el diàmetre del segment de paràbola i és paral·lel al diàmetre d'aquesta.[1206]

Per tant, dimidia tots els segments paral·lels a AE. [Evi 4][1207]

Sigui N el segment la raó del qual amb M és la de AF i AK.

[Evi 9 i 1][1208]

1204. Disjunció de casos.

1205. Amb aquest nom abreugem, el segment, que és el doble del que va del vèrtex a l'eix del segment de paràbola (*τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος*) i segons el qual els rectangles equivalen als quadrats de les ordenades de la paràbola (*παρ′ ἅν δύνανται αἱ ἀπό τᾶς τομᾶς*). El nom grec d'aquesta constant *ὀρϑια* és d'Apol·loni. Els geòmetres del Renaixement imposaran el terme *λατυς ρεςτυμ*. Eecke (1960), vol. i, p. 149-150.

Es tracta d'una aplicació d'àrees exacta o en paràbola [Pla (2016*b*), p. 140, 144, 149, 261 i 323-328]. Tenim un segment donat $a = 2\,p$ que és l'altura del rectangle de base l'*abcisa* x —el segment que va del vèrtex al peu de la perpendicular del punt de la paràbola a l'eix— i que equival al quadrat de l'*ordenada* —el segment perpendicular que acabem de descriure. En símbols, $y^2 = 2\,p\,x$. El paràmetre p és igual al segment de generatriu que va del vèrtex de la paràbola al del con.

1206. És a dir, l'eix de la paràbola.

1207. Aquesta propietat és l'objectiu de *Còniques*, Ci 46 o Ci 66.

1208. És un porisma immediat. Cal fer dos rectangles de la mateixa altura equivalents als quadrats.

Conseqüentment, els quadrats dels segments que cauen de la paràbola a DF paral·lels a AE
equivalen als rectangles que, aplicats al segment N, tenen una llargada igual al DF que ix de D,
d'acord amb el que hem establert a *Còniques*.[1209]

D'això, en resulta que el quadrat de AF equival al rectangle de costats N i DF.

Però el quadrat de HG ho fa al rectangle de costats M i BG,
ja que HG és perpendicular al diàmetre. [CI 11][1210]

Per tant, el quadrat de AF és al de HG com N a M
perquè els segments DF i BG són iguals.[1211] [Nc 1 o Ev 7, i Evi 1]

I els quadrats de AF i AK tenen la mateixa raó que N i M.

Per tant, HG i AK són iguals. [Ev 9]

Però també ho són BG i DF.

En conseqüència, els rectangles de costats HG i BG, i AK i DF són iguals.[1212]

I els triangles $\triangle HGB$ i $\triangle DAF$, equivalents. [Nc 1 i Ei 34]

I, per tant, també ho són els seus dobles [Nc 2 o Nc 6′][1213]

Tanmateix, sabem que els segments parabòlics $\bigtriangledown ADE$ i $\bigtriangledown HBC$ equivalen a una vegada i mitja els triangles $\triangle ADE$ i $\triangle HBC$.

[QP 17 i 24]

Així doncs, és evident que els segments de paràbola i els triangles inscrits són equivalents. ♠

$b_{1.2}$) i $b_{2.2}$). Però, si cap dels segments rectilinis que tallen els segments de paràbola no és perpendicular al diàmetre d'aquesta,
prenem, del diàmetre de la paràbola, un segment igual al d'un d'aquests segments [Ei 2 o Ei 3]
i, per l'extrem del segment, en tirem un de perpendicular al diàmetre.

[Ei 11]

1209. En clara referència a les d'Aristeu o d'Euclides.

1210. És a dir, $HG^2 = M \times DF$. Vegeu l'expressió formal de la paràbola de la nota 1205 (pàgina 432).

1211. Tenim: $AF^2 = N \times DF$, $HG^2 = M \times BG$ i $DF = BG$. Per tant, $\frac{AF^2}{HG^2} = \frac{N}{M}$ [Nc 1 o Ev 7, i Evi 1].

1212. Ítem f_4 del problema 52. Pla (2018), p. 67.

1213. És a dir, els triangles $\triangle HBC$ i $\triangle ADE$ són equivalents.

Aleshores, el segment de paràbola que obtenim equival a qualsevol dels segments [de paràbola] donats per endavant. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.6d_3 La proposició CE 4

Aquesta proposició compara l'àrea d'una el·lipse amb la del cercle de diàmetre igual al seu diàmetre gran.

[CE 4] *La superfície limitada per una el·lipse és al cercle de radi el semidiàmetre gran* [*de l'el·lipse*] *com el diàmetre petit és al gran, és a dir, al diàmetre del cercle.*

Considerem l'el·lipse ⬭ $ABCD$ de diàmetre gran AC i petit BD,
i el cercle [◯ $ACEF$] de diàmetre AC. [P 3]

Volem demostrar que l'àrea delimitada per l'el·lipse és a aquest cercle com el segment BD a CA, que és igual a EF.

Suposem que el cercle ◯ X és al ◯ AEF com BD a EF.

Afirmo que el cercle ◯ X equival a la superfície delimitada per l'el·lipse.

[*Demostració*.] Suposem que el cercle ◯ X no és igual a la superfície delimitada per l'el·lipse.[1214]

a) En primer lloc, podem imaginar que l'excedeix.[1215]

És possible inscriure, en el cercle ◯ X, un polígon amb un nombre parell de costats[1216]
amb una àrea més gran que la delimitada per l'el·lipse ⬭ $ABCD$.
[ECI 6][1217]

Suposem que ho hem fet
i inscrivim un polígon semblant al del cercle ◯ X en el ◯ AEF.

[Pels seus vèrtexs,] tirem perpendiculars al diàmetre AC. [EI 12]

Unim els punts [successius] en els quals les perpendiculars tallen l'el·lipse. [P 2]

Obtenim un polígon inscrit en l'el·lipse.

1214. Hipòtesi de l'absurd.
1215. Disjunció de casos.
1216. S'entén que és un polígon regular.
1217. O bé el procediment descrit a EXII 2.

La raó entre aquest [polígon] i l'inscrit en el cercle $\bigcirc AECF$ és la que hi ha entre [els segments] BD i EF.[1218]

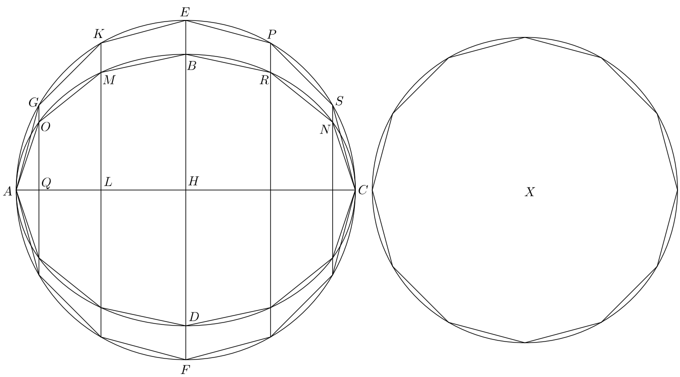


FIGURA CE 4

Atès que les perpendiculars EH i KL es tallen proporcionalment pels punts M i B,
és obvi que el trapezoide ⏢ LE és al ⏢ HM com HE a BH.[1219]

Per la mateixa raó, els trapezis del cercle són als trapezis de l'el·lipse com HE a BH.

Però els triangles del cercle amb els vèrtexs A i C també són als triangles de l'el·lipse amb els mateixos vèrtexs com HE a BH. [EVI 1]

Per tant, el polígon [sencer] inscrit en el cercle $\bigcirc AECF$ és al [sencer] inscrit en l'el·lipse ⬭ $ABCD$ com EF a BD. [EV 12]

Ara bé, el polígon [inscrit en el cercle $\bigcirc AECF$] és a l'inscrit en el cercle $\bigcirc X$ com EF a BD
perquè els cercles són entre aquests com els polígons. [EXII 1 i 2]

En conseqüència, el polígon inscrit en el cercle $\bigcirc X$ equival a l'inscrit en l'el·lipse. [EV 7]

1218. Aquí el siracusà usa una propietat que no demostra i que, per tant, hem de suposar que era ben coneguda: «Les ordenades $OQ, LM, HB\ldots$ i $QG, LK, HE\ldots$ mantenen la raó de HB i HE.» Vegeu el problema 44 (pàgina 171). La resta és conseqüència immediata de proposicions dels llibres EV i EVI. En efecte, si $\frac{QO}{QG} = \frac{LM}{LK} = \frac{HB}{HE}$, llavors, *alternando*, $\frac{LM}{HB} = \frac{LK}{HE}$ [EV 16] i, de retruc, *componendo*, $\frac{LM+QB}{QB} = \frac{LK+HE}{HE}$ [EV 18]. I ara solament cal aplicar EVI 1.

1219. Nota 1218.

Tanmateix, això no és possible perquè hem suposat que el polígon inscrit en el cercle $\bigcirc X$ és més gran que l'àrea delimitada per l'el·lipse. ♠

b) En segon lloc, podem imaginar que el cercle $\bigcirc X$ és més petit que la superfície determinada per l'el·lipse.

En l'el·lipse podem inscriure un polígon amb un nombre parell de costats més gran que el cercle $\bigcirc X$.[1220]

Suposem, doncs, que l'hi hem inscrit.

Prolonguem les perpendiculars pels vèrtexs al diàmetre AC fins que tallen la circumferència. [P 2 i EI 12]

De bell nou, tenim un polígon inscrit en el cercle $\bigcirc AEF$ que és al polígon inscrit en l'el·lipse com EF a BD.

Ara, en el cercle $\bigcirc X$, n'inscrivim un de semblant a l'inscrit en el cercle [$\bigcirc AECF$].[1221]

Podem demostrar que el polígon inscrit en el cercle $\bigcirc X$ equival a l'inscrit en l'el·lipse.

Però això no és possible.

Per tant, [l'àrea d]el cercle $\bigcirc X$ no és més petita que [la de] l'el·lipse. ♠

I, en definitiva, la superfície delimitada per l'el·lipse és a la del cercle $\bigcirc AEF$ com BD a EF. ♠

B.6d_4 La proposició CE 7

En aquesta proposició es resol el problema de la determinació d'un con que conté una el·lipse donada i el vèrtex a una altura donada del centre de la cònica.

[CE 7] *Donada una el·lipse i un segment perpendicular a aquesta pel centre, és possible determinar un con el vèrtex del qual és l'extrem del segment [diferent del centre de l'el·lipse] i en la superfície del qual trobem l'el·lipse.*[1222]

1220. Hem de reproduir la demostració d'EXII 2 per a el·lipses.
1221. Cal refer els passos de la demostració de l'ítem *a*.
1222. És a dir, podem trobar un pla que talli el con de manera que la

Ens donen una el·lipse i un segment perpendicular al pla d'aquesta pel seu centre.

Considerem un pla que conté aquesta perpendicular i que passa pel diàmetre petit AB. [Exi 4]

Suposem que el centre de l'el·lipse és el punt D,
que l'extrem[, diferent de D,] del segment perpendicular donat CD és D
i que l'el·lipse donada, de diàmetre [petit] AB, és en un pla perpendicular a CD.

Volem determinar un con amb el vèrtex en el punt C
que, en la superfície, conté l'el·lipse donada.

[*Construcció.*] Pel punt C, tracem segments fins als punts A i B [P 1] i els prolonguem. [P 2]

Pel punt A, tirem el segment AF de manera que l'àrea determinada per [el rectangle de costats] AE i EF és al quadrat de [costat] EC
com el quadrat de la meitat del diàmetre gran al quadrat de DC.[1223]

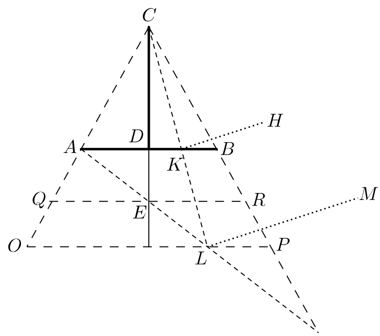


Figura CE 7

Això ho podem fer perquè la raó de la superfície [del rectangle] de costats AE i EF i el quadrat de EC
és més gran que la del rectangle de costats AD i DB i el quadrat de costat DC.

Pel segment AF, tirem un pla perpendicular a aquell en el qual es troben les rectes CA i AF. [Exi 4]

En aquest pla, observem el cercle de diàmetre AF [P 3]
i el con de base aquest cercle i vèrtex el punt C.[1224] ♣
Veiem que l'el·lipse donada es troba en la superfície del con.[1225]

corba resultant sigui l'el·lipse donada.

1223. És plausible, aquesta relació? Vegeu el problema 45 (pàgina 171).

1224. Fixem-nos que aquest con és oblic i, per tant, no és com els que trobem definits a Exi 18.

1225. És a dir, hi ha un pla que talla el con de manera que la corba és l'el·lipse donada.

[*Demostració.*] Perquè, si l'el·lipse no està situada en aquesta superfície,
hi ha un punt seu que no hi és.[1226]

Parem esment en un punt qualsevol H de l'el·lipse que no és en la superfície del con.

Per aquest, tracem el segment HK perpendicular a AB.[Exi 4][1227]

Aquest segment també és perpendicular al pla ▱CAF.[1228]

Unim CK, [P 1]
el prolonguem fins que talla AF pel punt L [P 2]
i, per aquest punt, tirem un segment perpendicular LM al cercle de diàmetre AF, [Exi 4]
sent M un punt de la circumferència d'aquest cercle.

Pels punts L i E, tirem els segments OP i QR paral·lels a AB. [Ei 31]

Ara bé, l'àrea del rectangle de costats AE i EF és al quadrat de EC com el quadrat de la meitat del diàmetre gran al quadrat de [costat] DC.

Però el quadrat de EC és al rectangle de costats EQ i ER com el [quadrat] de costat DC al [rectangle] de [costats] AD i DB.[1229]

Per tant, *ex æquali*, el rectangle de costats AE i EF és al de [costats] EQ i ER com el quadrat de la meitat del diàmetre gran al rectangle de AD i BD. [Ev 22]

Tanmateix, el rectangle de [costats] AE i EF és al de [costats] EQ i ER com el de [costats] AL i LF al de [costats] LO i LP.[1230]

I, d'altra banda, el quadrat de la meitat del diàmetre gran és al rectangle de costats AD i DB com el quadrat de [costat] HK al [rectangle] de costats AK i KB.[1231]

1226. Hipòtesi de l'absurd.

1227. En el pla de l'el·lipse.

1228. Això és així perquè HK és perpendicular a AB en el pla de l'el·lipse que, al seu torn, és perpendicular al pla ▱CLF.

1229. Usem Evi 4 i la composició de raons o, directament, Evi 19. Vegeu el problema 45 (pàgina 171).

1230. Fent servir la semblança de triangles $\triangle AEQ$ i $\triangle ALO$, i $\triangle EFR$ i $\triangle LFP$, tenim que $\frac{AE}{EQ} = \frac{AL}{LO}$ i $\frac{EF}{ER} = \frac{LF}{LO}$. Ara componem les dues primeres i les dues segones raons.

1231. És una propietat de l'el·lipse que no demostra. Es troba a *Còni-*

Per tant, el rectangle de costats AL i LF és al de costats OL i LF com el quadrat de [costat] HK al rectangle de [costats] AK i KB. [Nc 1 iterat][1232]

Però el rectangle de [costats] LO i LR és al quadrat de costat CL com el de costats AK i KB al quadrat de costat KC.

En conseqüència, *ex æquali*, el rectangle de costats AL i LF és al quadrat de costat CL com el quadrat de costat HK al de [costat] KC. [Ev 21]

Tanmateix, el rectangle de costats AL i LF equival al quadrat de [costat] AM,
ja que hem tirat el segment perpendicular al diàmetre AF del semicercle AM. [Evi 13]

De tot això en resulta que el quadrat de [costat] LM és al de costat LC com el de [costat] HK al de [costat] KC.
[Ev 11 o Nc 1, i per substitució]

Així doncs, els punts C, H i M estan alineats.[1233]

Però el segment CM es troba en la superfície del con.[1234]

Per tant, òbviament, el punt H també s'hi troba.

Però hem suposat que no hi era.

En definitiva, no hi ha cap punt de l'el·lipse fora de la superfície del con que hem construït.

I, consegüentment, l'el·lipse se situa totalment sobre la superfície d'aquest con. ♠

B.6d_5 La proposició CE 21

La proposició CE 21 és la que realment ens interessa posar en relleu. Proporciona el volum d'un segment de paraboloide ex-

---

ques, Ci 21. Fixem-nos que, en termes algebraics, diu que, si l'equació de l'el·lipse és $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, aleshores $\frac{b^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a+x)(a-x)}=1$. Vegeu l'ítem g del problema 45 (pàgina 171).

1232. Ítem h del problema 45 (pàgina 171).

1233. Suposem que, si $\frac{LM^2}{LC^2}=\frac{HK^2}{KC^2}$, llavors $\frac{LM}{LC}=\frac{MK}{KC}$. I d'això es dedueix l'alineació. Vegeu l'ítem i del problema 45 (pàgina 171).

1234. N'és una generatriu.

pressat en relació amb el con de la mateixa base i la mateixa altura quan el pla que el determina és perpendicular a l'eix.

[CE 21] *Un segment de paraboloide determinat per un pla perpendicular a l'eix equival a tres vegades la meitat del con de la mateixa base i la mateixa altura que el segment.*[1235]

Considerem un segment de paraboloide determinat per un pla perpendicular a l'eix.

El tallem amb un pla que passa per aquest eix.

Siguin $\bigtriangledown ABC$ la paràbola en la qual el pla talla el segment de paraboloide, [CE 11]

CA el segment [rectilini en el qual talla] la base, i BD l'eix.

Posem esment en el con que té la mateixa base i el mateix eix que el segment

i en el vèrtex en el punt B.

Volem demostrar que el segment de paraboloide equival a tres vegades la meitat d'aquest con.

Observem, ara, el con $\triangle X$, que equival a tres vegades la meitat del con de base el cercle de diàmetre AC i eix BD,[1236]

i també el cilindre de base el cercle de diàmetre AC i eix BA.

Aleshores, el con $\triangle X$ equival a la meitat del cilindre total

perquè és igual a tres vegades la meitat de l'altre con. [Exii 10]

Afirmo que el segment de paraboloide equival al con $\triangle X$.

[*Demostració*.] Perquè, si el segment de paraboloide no és igual al con $\triangle X$,[1237] és una d'aquestes dues coses:

a) Més gran.

b) Més petit.[1238]

a) Suposem, en primer lloc, que és més gran.

Hi inscrivim una figura sòlida composta per cilindres de la mateixa alçada i n'hi circumscrivim una altra de manera que l'excés de la cir-

---

1235. $\mathcal{V}_{\text{segment de paraboloide}} = \frac{3}{2}\,\pi \times r^r \times h$.

1236. Per exemple, el con de la mateixa base que l'anterior i eix una vegada i mitja el del con anterior.

1237. Hipòtesi de l'absurd.

1238. Disjunció de casos.

cumscrita sobre la inscrita és més petit que el [excés] del segment de paraboloide sobre el con △X. [CE 19]

El cilindre més gran de la figura sòlida circumscrita té de base el cercle de diàmetre AC i d'eix el segment ED,
i el més petit té de base el cercle de diàmetre ST i d'eix el segment BI.

El cilindre més gran de la figura sòlida inscrita té de base el cercle de diàmetre KL i d'eix el segment DE,
i el més petit té de base el cercle de diàmetre ST i eix el segment HI.

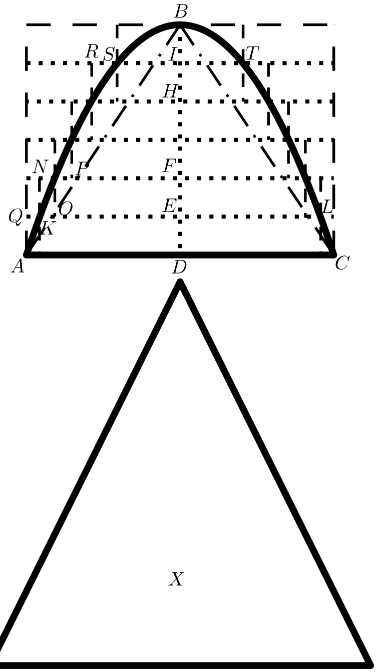


FIGURA CE 21

Prolonguem tots els plans [de les bases d'aquests cilindres] fins [que tallen] el cilindre circumscrit [en el segment de paraboloide] que té com a base el cercle de diàmetre AC i com a eix el segment BD.

Per tant, el cilindre circumscrit està format pel mateix nombre de cilindres que els de la figura sòlida circumscrita, tots iguals al més gran d'aquests.

Atès que l'excés del sòlid circumscrit al segment de paraboloide sobre l'inscrit és més petit que el del segment [de paraboloide] sobre △X,
és clar que la figura inscrita en el segment de paraboloide és més gran que el con △X.[1239]

D'altra banda, el primer cilindre —dels que formen el que circumscriu el segment de paraboloide—, d'eix ED,
és al primer dels cilindres de la figura sòlida inscrita —d'eix ED—
com el quadrat de costat DA al de costat KE.[1240] [EXII 11 i 12]

1239. Vegeu, per exemple, el problema 46 (pàgina 172).
1240. Textualment: δυνάμει, 'en potència'.

Però el quadrat del segment DA és al del KE com BD a BE [QP 3][1241]

i com DA a EO. [EVI 4]

De la mateixa manera, podem demostrar que el segon cilindre del cilindre total, d'eix EF, és al segon dels inscrits

com QE, és a dir, DA, a FP.

A més, cada un dels altres cilindres del cilindre total és al corresponent —és a dir, al del mateix eix— de la figura inscrita

com el radi de la base al segment entre AB i BD que es troba sobre el diàmetre.[1242]

Per tant, la suma de tots els cilindres del cilindre de base el cercle de diàmetre AC i eix dret BD és a la de tots els cilindres inscrits

com la suma dels radis de tots els cercles inscrits a la dels segments situats entre els segments AB i BD. [EV 12]

Però la suma dels primers és més gran que el doble de la suma dels segons.

Així doncs, la suma dels cilindres del cilindre total, d'eix BD, és més gran que el doble de la figura inscrita.

Dit d'una altra manera, el cilindre total d'eix BD ho és més que el doble de la figura inscrita.

Però aquest cilindre equival al doble del con X.

En conseqüència, la figura inscrita és més petita que el con X.

I això no és possible perquè hem vist que és més gran.

En definitiva, el segment de paraboloide no és més gran que el con X. ♠

b) Suposem, en segon lloc, que és més petit.

En el segment de paraboloide inscrivim i circumscrivim unes figures de manera que l'excés de l'una sobre l'altra és més petit que l'excés del con X sobre el segment de paraboloide. [CE 19]

I ara procedim com abans.

Atès que la figura inscrita és més petita que el segment [de paraboloide]

1241. Hem de suposar que era un resultat conegut. Vegeu, tanmateix, *Còniques*, CI 20.

1242. És a dir, $DA, EO, FP, \ldots$, que són els radis de les bases dels cilindres inscrits.

i la inscrita està superada per la circumscrita menys del que el segment supera el con X,

la figura circumscrita és més petita que la del con X.[1243]

De bell nou, el primer dels cilindres del cilindre total, d'eix el segment DE,

és al primer dels de la figura circumscrita, d'eix el mateix segment ED,

com el quadrat de AD a si mateix.[1244]

El segon cilindre del cilindre total, d'eix EF, és al de la figura circumscrita, d'eix EF,

com el quadrat de DA al de KE,

ja que BD és a BE com DA a EO.[1245]

I cadascun dels altres cilindres del cilindre total, d'eix un segment igual a DE, és a cada un dels cilindres de la figura circumscrita del mateix eix

com el radi de la base a la part d'aquest radi situada entre els segments AB i BD.

Per tant, la suma de tots els cilindres del cilindre total, d'eix BD, és a la suma dels cilindres de la figura circumscrita

com la suma dels primers segments a la suma dels segons. [Ev 12]

Però la suma de tots els primers, és a dir, la suma dels radis dels cercles que són les bases dels cilindres és més petita que el doble de la suma dels segments determinats damunt del [segment] AD pels talls descrits. [CE, lema]

En conseqüència, és evident que la suma dels cilindres del cilindre total és més petita que el doble de la suma dels de la figura circumscrita.

I, llavors, el cilindre de base el cercle de diàmetre AC i eix el segment BD ho és més que el doble de la figura circumscrita.

Tanmateix, aquest cilindre no és més petit que el doble d'aquesta ja que, ben al contrari, és més gran que això perquè aquest cilindre equival al doble del con X.

I hem vist que la figura circumscrita és més petita que el con X.

1243. Nota 1239 (pàgina 441).

1244. Ja que el primer cilindre del cilindre total i el primer cilindre circumscrit són el mateix.

1245. Vegeu el paràgraf que conté la nota 1241, pàgina 442.

Així doncs, el segment de paraboloide no ho és més que el con $\triangle X$.

♠

Tanmateix, hem demostrat que no era més gran.

En conseqüència, el segment de paraboloide és igual a tres vegades la meitat del con que té la mateixa base i el mateix eix que el segment [de paraboloide]. ♠

B.6d_6 Els elements de la proposició CE 21

Tancarem el recull de textos de CE amb els que completen del tot la proposició CE 21.

B.6$d_{6.1}$ [CE 11][1246]

I. *Si tallem un paraboloide [de revolució],* τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς, *per un pla que passa per l'eix o és paral·lel a aquest, la secció obtinguda és la mateixa paràbola,* τὸ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, *que delimita el paraboloide. I el seu diàmetre és el segment comú al pla d'intersecció i la perpendicular que passa per l'eix.*

Si, en canvi, aquest paraboloide és tallat per un pla perpendicular a l'eix, la secció obtinguda és una circumferència amb el centre a l'eix.

II. *Si tallem un hiperboloide [de revolució],* τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς, *per un pla que passa per l'eix o pel vèrtex del con que l'envolta,*[1247] *la secció resultant és una hipèrbola,* ἀμβλυγωνίον κώνου τομά, *que:*

a*) si el pla passa per l'eix, la hipèrbola és la mateixa que abraça la figura;*

b*) si el pla és paral·lel a l'eix, la hipèrbola és semblant a aquesta,*[1248] *i*

c*) si el pla passa pel vèrtex del con que l'envolta la hipèrbola no és semblant a aquesta.*

El diàmetre de la hipèrbola és el segment comú al pla de tall i al que el talla perpendicularment per l'eix.

1246. És un element de moltes de les proposicions que segueixen.

1247. És a dir, el con asimptòtic.

1248. Aquesta semblança és conseqüència de la constància de la raó del quadrat de l'ordenada i el producte dels segments que determina sobre l'eix, que és la que hi ha entre els quadrats de l'eix gran i del petit. Vegeu la nota 1233 (pàgina 439).

Si, en canvi, tallem l'hiperboloide per un pla perpendicular a l'eix, la secció obtinguda és una circumferència amb el centre dins l'eix.

III. *Si tallem un el·lipsoide*[1249] *mitjançant un pla per l'eix o per un pla paral·lel a l'eix, la secció obtinguda és una el·lipse,* οξυγωνίου κώνου τομὰ.

a*) Si el pla de tall passa per l'eix, l'el·lipse és la mateixa que la que abraça l'el·lipsoide.*

b*) Si el pla de tall és paral·lel a l'eix, l'el·lipse és semblant a la que abraça l'el·lipsoide.*

El diàmetre [*de l'el·lipse*] *és el segment comú al pla de tall i al que el talla perpendicularment per l'eix.*

Si, en canvi, el tallem per un pla perpendicular a l'eix, la secció és una circumferència amb el centre a l'eix.

IV. *Si tallem cadascuna de les figures de les quals acabem de parlar per un pla que passa per l'eix, els segments perpendiculars al pla secant per punts que, no trobant-se a la secció, són a la superfície de la figura cauen dins d'aquesta.*

Les demostracions corresponents són clares.[1250] ♠

B.6$d_{6.2}$ [CE 12] *Si tallem un paraboloide per un pla que no passa per l'eix ni hi és paral·lel o perpendicular, la secció que en resulta és una el·lipse el diàmetre gran de la qual és la secció del pla de tall, i el pla perpendicular per l'eix* [*a aquest pla*] *i diàmetre petit és la distància entre els segments paral·lels*[1251] *a l'eix tirats pels extrems del diàmetre gran.*

1249. Tant si és allargat com aplanat.

1250. Hi ha autors que suposen que ja eren conegudes. Altres creuen que no ho eren però haver-les donades amb detall suposaria endarrerir encara més les proposicions nuclears de la monografia. Vegeu el problema 47 (pàgina 172).

1251. Aquí Arquimedes usa: «Dos segments paral·lels es troben a una certa distància». Aquesta distància està determinada pel segment que té com a extrems dos punts: l'un en un dels segments paral·lels i l'altre determinat per la intersecció del segment perpendicular al segment paral·lel pel primer punt [E I 31]. Òbviament, per P 5, el tall existeix.

Recordem que acceptar l'existència de «la» distància entre dos segments paral·lels equival a P 5.

Tallem un paraboloide per un pla com el que hem descrit
i ho fem per un pla que passa per l'eix perpendicular al pla de tall.

Siguin $\smile$ ABC la línia en la qual [aquest segon pla] talla el paraboloide
i AC el segment en el qual interseca el pla de tall.

I sigui BD l'eix del paraboloide i el diàmetre de la secció.[1252]

[CE 11]

Hem de demostrar que la secció del paraboloide determinada pel pla que passa per AC és una el·lipse de diàmetre gran AC i diàmetre petit AL,
sent CL un segment parallel a BD i AL perpendicular a CL.

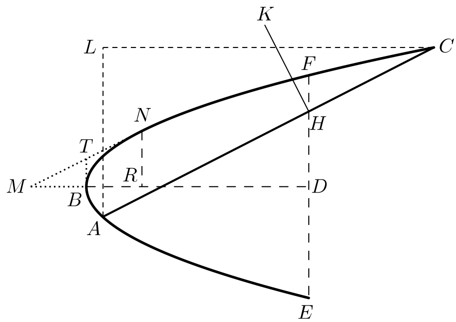


Figura CE 12

[*Demostració*.] Considerem un punt arbitrari de la secció, com ara el punt K.

Per K, tirem el segment perpendicular KH a CA. [Ei 12]

El segment KH també és perpendicular al pla en el qual es troba la paràbola $\smile$ ACB
perquè el pla de tall igualment és perpendicular a aquest pla. [Exi 1]

Pel punt H, tracem el segment HF[1253] perpendicular a BD. [Ei 12]

Considerem el pla que passa pels segments EF i KH. [Exi 2]

Veiem que és perpendicular al segment BD.[1254]

Per tant, el paraboloide està tallat per un pla perpendicular que passa per l'eix.

En conseqüència, la secció obtinguda és un cercle de centre D.

[CE 11]

1252. De la secció determinada pel pla que passa per l'eix, que és una paràbola idèntica a la que genera el paraboloide.

1253. Encara millor, EF.

1254. Això és així perquè el segment HK és perpendicular al pla ▱ ABC que passa pels segments KH i EF. I també ho és al pla ▱ ABC i al segment BD, que ho és al EF, pertanyent al pla ▱ ABC [Exi 4].

I el quadrat de KH equival al rectangle de costats FH i HE.

[EVI 13][1255]

Tirem el segment MN tangent a la paràbola i paral·lel a AC.

[QP 2 o CI 12]

Toca la paràbola pel punt N.

Finalment, tirem el segment BC tangent a la paràbola i paral·lel a EF. [QP 2]

Aleshores, veiem que el rectangle de costats AH i HC és al de costats EH i HF com el quadrat de NT al de TB. [CE 3][1256]

Per tant, els segments TM i NT, i BM i BR són iguals.

[QP 2 i EVI 4][1257]

I el rectangle de costats AH i HC és al quadrat de costat HK com el quadrat de costat TM al de costat TB.

[NC 1 i EV 11][1258]

Invertendo, el quadrat de costat HK és al rectangle de costats AH i HC com el quadrat de costat TN al de costat TM. [EV 7, porisma]

Però els triangles $\triangle CAL$ i $\triangle TMB$ són semblants.[1259]

En conseqüència, el quadrat de costat HK és al rectangle de costats AH i HC com el quadrat de costat AL al de costat AC.

[EVI 4 i EV 11]

De manera anàloga, veiem que els quadrats dels altres segments perpendiculars per un punt de la corba secció a AC[1260] tenen amb el rectangle de costats els segments que [l'ordenada] determina sobre AC la mateixa raó que el quadrat de costat AL al de costat AC.[1261]

1255. Ja que KH és un segment perpendicular al diàmetre EF del cercle i KH la mitjana proporcional de FH i HE [EVI 13].

1256. Vegeu el problema 48 (pàgina 172). També està demostrat a APOL·LONI DE PERGE (1963), CIII 17, edició francesa, p. 210-212.

1257. APOL·LONI DE PERGE (1963), CI 12, edició francesa, p. 24-28.

1258. Ras i curt, per substitució.

1259. És fàcil veure que tenen els tres angles iguals [DVI 1]. I hi apliquem EVI 4.

1260. Les ordenades.

1261. Usa la característica de l'el·lipse que hem comentat en la nota 1232 (pàgina 439).

Això posa de manifest que la corba és una el·lipse de diàmetre gran AC i petit AL. ♠

B.6$\boldsymbol{d_{6.3}}$ [CE 15][1262]

I. *Si des d'un* [*punt de la superfície d'un*] *paraboloide tirem segments paral·lels a l'eix, els que hem tirat en la direcció convexa cauen fora i els que hem tirat en l'altra direcció ho fan dins.*

[*Demostració.*] De fet, si tirem un pla que passa per l'eix i pel punt pel qual hem fet el segment paral·lel a l'eix, [Exi 2]
la secció és una paràbola
el diàmetre de la qual és l'eix del paraboloide. [CE 11]

Però en una paràbola,
d'entre tots els segments rectilinis paral·lels al diàmetre tirats des d'un punt arbitrari de la corba,
els que van en el sentit del costat convex cauen fora
i els que van en el sentit contrari, dins. [Ci 26]

Per tant, la proposició és òbvia. ♠

II. *Si des d'un* [*punt de la superfície de l'*]*hiperboloide tirem segments paral·lels a un que va del vèrtex del con que l'envolta, els que hem tirat en el sentit convex cauen fora d'aquest i els que hem tirat en l'altra direcció, dins.*

[*Demostració.*] Si el pla passa pel segment que va del vèrtex del con que envolta l'hiperboloide a l'hiperboloide
i pel punt des del qual hem tirat aquest segment, [Exi 2]
la secció obtinguda és una hipèrbola
amb un diàmetre que és el segment que va del conoide al vèrtex del con. [CE 11]

I, en una hipèrbola, d'entre els segments que, tirats per un punt del segment [d'hipèrbola] i paral·lels al segment considerat,[1263]
els que van en el sentit del costat convex cauen fora
i els que van en el sentit contrari, dins. [Ci 26] ♠

1262. Aquesta proposició solament fa referència als paraboloides i als hiperboloides. Els el·lipsoides en queden exclosos.

1263. Es tracta del segment paral·lel al que passa pel punt de tall de les asímptotes i que, per tant, correspon al segment precedent que, en el conoide, passa pel vèrtex del con asimptòtic corresponent.

III. *Si un pla és tangent a una figura conoidal*[1264] *i no la talla:*
a*) Li és tangent en un sol punt.*
b*) El pla que passa pel punt de tangència i l'eix és perpendicular al pla tangent.*

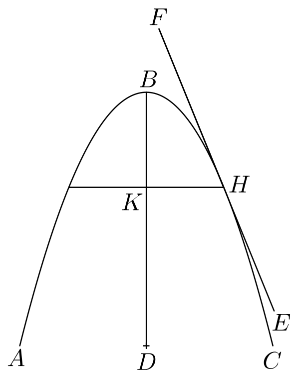


FIGURA CE 15

[*Demostració.*] *a*) Suposem que li és tangent en diversos punts.[1265]

Considerem dos d'aquests punts i, per aquests, tirem rectes paral·leles a l'eix. [EI 31]

Aquest pla o bé passa per l'eix o bé li és paral·lel.

En tots dos casos, talla el conoide i produeix una [secció] cònica[1266] [CE 11]
que conté els punts,
perquè es troben en la superfície [de la quàdrica] i en el pla.

El segment que uneix aquests punts és dins la cònica. [CI 10]

Per tant, també és dins el paraboloide.

Però aquest segment està en el pla tangent perquè els seus extrems hi són. [EXI 1]

D'això, en resulta que una part d'aquest pla es troba dins del conoide.

Aquest fet no és possible perquè hem suposat que no el talla.

Per consegüent, el pla només és tangent en un punt. ♠

b) Analitzem, ara, el segon cas.[1267]

b_1) Suposem que el pla que passa pel punt de contacte i per l'eix és perpendicular al pla tangent [al conoide] pel vèrtex.

Això és evident[1268] perquè, si tirem dos plans que passen per l'eix del conoide,
les seccions obtingudes són còniques i tenen de diàmetre l'eix, [CE 11]

1264. Aquest enunciat val per a tots els conoides introduïts per Arquimedes.

1265. Hipòtesi de l'absurd.

1266. Segons com sigui el conoide serà la secció cònica.

1267. La demostració procedeix per disjunció de casos.

1268. Diu: «δῆλον».

i els segments tangents a les seccions còniques per l'extrem del diàmetre es troben en el pla tangent.

Però els segments tangents a les seccions còniques per l'extrem del diàmetre li són perpendiculars.

Per tant, en el pla tangent hi ha dos segments perpendiculars a l'eix.

I, en conseqüència, el pla també ho és a l'eix. [Exi 4]

I, de retruc, també ho és al pla que passa per l'eix. [Exi 18] ♠

b_2) Suposem que el pla no és tangent al conoide pel vèrtex. Considerem el pla que passa pel punt de tangència i per l'eix i suposem que la secció amb el conoide és la cònica $\smile ABC$,[1269] [CE 11]

d'eix i diàmetre el segment BD de la figura conoidal.

Suposem també que la intersecció del pla tangent és el segment EHF [Exi 3]

i que el punt de contacte és H.

Per H, tirem el segment HK perpendicular a BD [Ei 12]

i aixequem un pla perpendicular a l'eix. [Exi 5]

Aquest pla interseca[, en el conoide,] un cercle de centre K. [CE 11]

La intersecció d'aquest pla amb el primer és un segment tangent al cercle

i, per tant, un segment perpendicular al segment HK. [Eiii 18]

Així doncs, també ho és al pla que conté els segments KH i BD. [Dxi 4]

I, òbviament, el pla tangent és perpendicular a aquest pla perquè ho és als segments que conté. [Exi 18] ♠ ♠

B.6*d*$_{6.4}$ [CE 16] I. *Si un pla toca un el·lipsoide*[*, tant si és allargat com si és aplanat,*] *però no el talla:* a*) Aquest pla només el toca en un punt, és a dir, li és tangent.* b*) El pla que passa pel punt de tangència i per l'eix és perpendicular al pla tangent.*

[*Demostració.*] *a*) Si un pla toca l'el·lipsoide en diversos punts,[1270] n'agafem dos.

1269. Malgrat que la figura representa una paràbola, podríem haver representat una hipèrbola.

1270. Hipòtesi de l'absurd.

Per cada un, tirem segments paral·lels a l'eix. [EI 31]

Si fem passar un pla per aquests segments, [EXI 2]

la secció de l'el·lipsoide és una el·lipse [CE 11, ítem III]

i [el segment] que uneix els punts [que hem considerat] es troba dins d'aquesta secció [cònica, l'el·lipse]. [CI 10]

Per tant, cau dins l'el·lipsoide.

Però [aquest segment] també està en el pla tangent

perquè els dos punts són d'aquest pla. [EXI 1]

Així doncs, una certa part del pla tangent es troba dins de l'el·lipsoide.

Però això no és possible perquè hem suposat que no el tallava.

És clar, doncs, que aquest pla només el toca en un punt. ♠

b) La demostració que el pla que passa pel punt de contacte i conté l'eix és perpendicular al pla tangent es fa de manera anàloga a la que hem fet servir en el cas dels paraboloides.[1271] ♠ ♠

II. *Tallem un conoide o un esferoide*[1272] *per un pla que passa per l'eix. Considerem un segment tangent a la secció cònica que queda determinada. Per aquest, tirem el pla perpendicular al pla secant i veiem que és tangent a la figura* [*conoide o esferoide*] *pel punt de tangència del segment i la cònica* [*paràbola, hipèrbola o el·lipse*].

[*Demostració.*] No és tangent en cap altre punt de la superfície de la figura.[1273]

En cas contrari,[1274]

la perpendicular tirada des d'aquest altre punt al pla secant cau fora de la secció [cònica],

perquè va a parar damunt el segment tangent [o la seva prolongació] ja que els plans són perpendiculars entre si. [DXI 4]

Però això no és possible,

perquè hem establert que queia dins [de la cònica]. [CE 11, ítem IV]

♠

1271. Vegeu la darrera part de la demostració de CE 15.
1272. De qualsevol de les menes possibles.
1273. Del sòlid, el conoide o l'esferoide.
1274. Hipòtesi de l'absurd.

III. *Si dos plans paral·lels són tangents a un el·lipsoide de revolució, el segment que uneix els punts de tangència passa pel seu centre.*

[*Demostració.*] *a*)[1275] La proposició és evident quan els plans són perpendiculars a l'eix. ♠

b) No ho és tant quan suposem que no ho són.[1276]

El pla que passa per l'eix i per un dels punts de contacte [EXI 2]
és perpendicular al pla tangent. [CE 16, ítem I]

També ho és, doncs, a qualsevol pla paral·lel a aquest. [EXI 6]

Necessàriament, aquest pla és el que passa per l'eix i pels dos punts de tangència, ja que, altrament,[1277]
hi hauria dos plans perpendiculars a un mateix pla per un segment que no és perpendicular al darrer d'aquests plans
[perquè hem suposat que l'eix no ho és en els plans.][1278]

Per tant, l'eix i els punts de tangència són al mateix pla.

En conseqüència, l'el·lipsoide l'hem tallat per [un pla que passa per] l'eix.

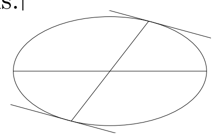


FIGURA CE 16

I, per tant, la secció és una el·lipse, [CE 11, ítem III]
i les seccions amb els plans tangents són segments paral·lels [EXI 16]
tangents a l'el·lipse en els punts de contacte dels plans.

I, si dos segments paral·lels són tangents a una el·lipse,
el seu centre i els punts de tangència estan alineats. [CIV 28] ♠

B.6*d*6.5 [CE 17][1279] *Considerem dos plans paral·lels tangents a un el·lipsoide de revolució*[1280] *i, pel seu centre, tracem un pla paral·lel als plans tangents. Els segments paral·lels al que uneix els punts de tangència que ha estat tirat pels punts* [*determinats*] *per la secció cauen fora de l'el·lipsoide.*[1281]

1275. Disjunció de casos.
1276. Hipòtesi de l'absurd.
1277. Hipòtesi de l'absurd.
1278. I això no té sentit. Vegeu el problema 49 (pàgina 172).
1279. Com feia en la primera part de CE 15 amb els conoides, aquesta proposició determina quina és la forma dels el·lipsoides.
1280. És a dir, a un esferoide allargat o aplanat.
1281. És un enunciat un pèl fosc. Tanmateix, els passos de la demostra-

[*Construcció.*] Considerem els objectes geomètrics descrits
i un punt de la secció [cònica] generada
[en tallar l'el·lipsoide per un pla que passa pel centre].

Tirem un pla que passa pel segment que uneix els punts de tangència i per aquest punt.

Talla l'el·lipsoide i els plans paral·lels.

Sigui l'el·lipse ⬭ $ABCD$ la secció [cònica] que determina en l'el·lipsoide.

Tinguem en compte les seccions EF i GH dels plans tangents,
el punt A que hem pres [en l'el·lipse]
i el segment BD que uneix els punts de contacte. ♣

Aquest pla talla l'el·lipsoide i els plans paral·lels.

Sigui, doncs, (l'el·lipse ⬭ $ABCD$) la secció [cònica] que determina en l'el·lipsoide.[1282]

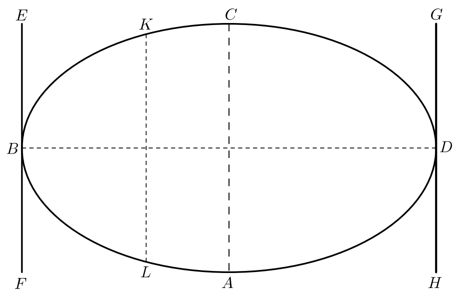


FIGURA CE 17

[*Demostració.*] El segment BD passa pel centre. [CE 16, ítem III]

Sigui AC la secció del pla paral·lel als plans tangents [considerat abans, el que conté A i BD]. [ExI 2]

a) Aquest segment BD també passa pel centre, ja que el pla ho fa.[1283]

Com que la secció AB és una circumferència o una el·lipse, [CE 14]
els segments rectes EF i GH són tangents a la cònica
i el [segment] paral·lel AC els és paral·lel i passa pel centre;
és clar que els segments tirats pels punts A i C, paral·lels a BD, són tangents a la secció [CI 17 o CII 6]
i cauen fora de l'esferoide. ♠

ció n'aclareixen el significat.

1282. Aquí hi ha una precisió que no és del tot correcta, com veiem unes línies més avall perquè pot ser una circumferència.

1283. En aquest cas, suposem que el pla passa pel centre i iniciem una anàlisi per disjunció de casos.

b) Si el pla paral·lel a les tangents no passa pel centre, com ara [el que determina la intersecció] KL,
llavors d'entre tots els segments tirats des de la secció [cònica, paral·lels a BD],
els de la banda de la part més petita de la secció cauen fora de l'el·lipsoide,
però els de l'altra banda ho fan dins. ♠ ♠

B.6$\boldsymbol{d}_{\mathbf{6.6}}$ [CE 19] *Tenim el segment de conoide* [*és a dir, de paraboloide o d'hiperboloide*] *obtingut tallant* [*el conoide*] *per un pla perpendicular a l'eix, o un segment d'esferoide*[*, és a dir, d'el·lipsoide, allargat o aplanat,*] *més petit que la meitat de l'el·lipsoide* [*sencer*]*. Per un pla perpendicular* [*a l'eix*]*, tant* [*en els segments de conoides com en els d'esferoide*] *hi podem inscriure i circumscriure sòlids compostos de cilindres de la mateixa altura, amb un excés* [*del volum*] *del circumscrit sobre el de l'inscrit inferior a un sòlid donat per endavant.*

[*Demostració.*] Donat un segment com ABC,
el tallem per l'eix mitjançant un pla.
Considerem la secció cònica ABC, [CE 11]
el segment AC, secció del pla amb el segment de la figura,
i el BD, eix del segment i diàmetre de la secció cònica.

Com que suposem que el pla de tall és perpendicular a l'eix, la secció és una circumferència de diàmetre CA. [CE 11]

Damunt d'aquest cercle aixequem un cilindre d'eix el segment BD.

La seva superfície cau fora del segment
perquè el sòlid és un segment d'un conoide o d'un esferoide
que no supera la meitat de l'esferoide. [CE 15 i 17]

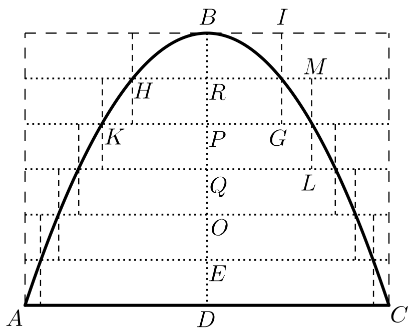


FIGURA CE 19

Tallem el cilindre successivament per la meitat mitjançant un pla perpendicular a l'eix,[1284]
fins a aconseguir un sòlid residual inferior al sòlid donat. [Ex 1]

Sigui aquest cilindre residual el de base el cercle de diàmetre AC i eix ED,
inferior al sòlid donat.

Dividim l'eix DB en parts iguals a DE pels punts R, P, Q i O.[1285]

Per aquests punts, tirem segments paral·lels a AC fins a la secció cònica. [Ei 31]

I, per aquests segments, plans paral·lels perpendiculars a BD. [Exi 4]

Les seccions obtingudes són cercles amb els centres en el segment BD.

Damunt de cadascun d'aquests construïm dos cilindres, [Dxi 21]
tots amb un eix igual a ED.

L'un és de la banda del cilindre del punt D
i l'altre de la del cilindre del punt B.[1286]

És evident que hem obtingut una figura sòlida inscrita
que es compon dels cilindres de la banda del punt D,
i una de circumscrita que es compon dels cilindres de la banda del punt B.

Hem de demostrar que l'excés de la figura circumscrita sobre la inscrita és més petit que el sòlid donat.

Cada un dels cilindres inscrits és igual a un dels circumscrits,
com ara el cilindre HG, que ho és al HI,
o el KL, que ho és al KM,
i així successivament.

Per tant, la suma de tots aquests cilindres és igual a la dels altres.

Òbviament, l'excés de la figura circumscrita sobre la figura inscrita supera el cilindre de base AC i altura ED
i és més petit que el sòlid donat. ♠

1284. L'altura de cada tall és, doncs, $\frac{BD}{2^n}$.

1285. Tenim tants punts de divisió com determinen els cilindres petits sorgits de la segmentació del cilindre total.

1286. El de la banda de B és circumscrit i l'altre, inscrit.

B.7 MC: *De la mesura del cercle*

p. 107-118 Aquesta breu monografia estableix dos resultats relatius al cercle molt rellevants. MC 1 relaciona la seva àrea S i la longitud L de la circumferència. I MC 3 proporciona un algorisme iteratiu per a aproximar-se a la raó $\frac{\mathcal{L}}{d}$, en què d és el diàmetre del cercle.

B.7.1 La proposició MC 1

[MC 1] [*L'àrea d'*]*un cercle qualsevol equival a un triangle rectangle de catets el radi del cercle i longitud la de la seva circumferència.*

Sigui $\bigcirc ABCD$ el cercle.

Afirmo que equival al triangle $\triangle E$.

[*Demostració.*][1287]

a) Suposem que [l'àrea d]el cercle [de centre N] és més gran que [la d]el triangle [$\triangle E$].

En aquest cercle, hi inscrivim el quadrat $\square AC$ [EIV 6]

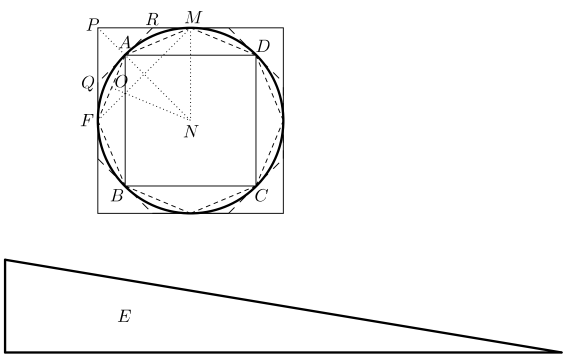


FIGURA MC 1

i hi dimidiem[, iteradament,] els arcs [EIII 30]
fins a aconseguir que la suma dels segments circulars sigui més petita que l'excés del cercle sobre el triangle. [EXII 2]

Obtenim una figura rectilínia[, el polígon ⬠ $AMDCBF$,] més gran que el triangle.[1288]

Determinem el centre N del cercle [EIII 1]
i, per aquest, tirem el segment NO perpendicular [al segment AF]. [EI 12]

1287. Disjunció de casos i hipòtesi de l'absurd.

1288. Hem aconseguit un polígon regular inscrit p_{2^n} en què $S - p_{2^n} < S - E$. Per tant, $p_{2^n} > E$.

El segment NO és més petit que un dels catets del triangle rectangle $\triangle E$.

I el perímetre del polígon regular [$\pentagon AMDCBF$] és més curt que l'altre catet,
ja que [aquest catet] ho és més que la circumferència del cercle.
[ECI, postulat 1]

En definitiva, [l'àrea d]el polígon [$\pentagon AMDCBF$] també és més petita que el triangle E.[1289]
I això és absurd. $\spadesuit$

b) Suposem que [l'àrea d]el cercle [S] és més petita que [la d]el triangle $\triangle E$.

Hi circumscrivim un quadrat,
dimidiem els arcs
i, pels punts de divisió, hi tracem tangents.

Atès que l'angle $\widehat{PAR}$ és recte, [EIII 18]
el segment PR és més llarg que el MR, ja que MR equival a RA.
[EI 47, EIII 21 i DI 20]

Per tant, [l'àrea d]el triangle $\triangle RPQ$ és més gran que la meitat de la curvilínia $PMAF$.[1290]

Ens queden els triangles curvilinis restants equivalents al $\frown QFA$ i que sumen menys que l'excés del triangle $\triangle E$ sobre el cercle $\bigcirc ABCD$.[1291]

Per tant, el polígon circumscrit és més petit que el triangle $\triangle E$.[1292]

I això és impossible, ja que és més gran considerant que NA és igual a l'altura del triangle,
i el perímetre de la figura ho és més que la seva base. $\spadesuit$
En definitiva, doncs, el cercle $\bigcirc ABCD$ equival al triangle $\triangle E$. $\spadesuit$

1289. És a dir, $p_{2^n} < E$. Figura MC 1*a* (pàgina 110).

1290. En efecte, com que $PR > RM$, l'àrea del triangle $\triangle PAR$ és més gran que el triangle $\triangle RAM$ i, pel mateix motiu, la del triangle $\triangle PAQ$ ho és més que la del $\triangle QAF$.

1291. Vegeu-ne l'exercici 68 (pàgina 109).

1292. Hem aconseguit un polígon regular circumscrit P_{2^n} de manera que $P_{2^n} - S < E - S$. Per tant, $P_{2^n} < E$. I, en canvi, $P_{2^n} > E$.

B.7.2 La proposició MC 2

[MC 2] *Un cercle és al quadrat construït sobre el seu diàmetre com 11 a 14, aproximadament.*[1293]

[*Demostració.*] Considerem el cercle de diàmetre AB. [EI 10 i P 3]

Hi circumscrivim el quadrat $\square CG$, [EIV 9]

tirem el segment DE igual al doble de CD [P 2, EI 2 o EI 3, i EIV 15]

i el EF igual a una setena part. [EVI 9]

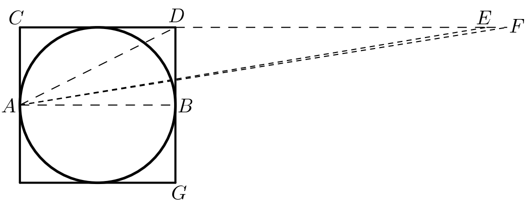


FIGURA MC 2

Atès que el triangle $\triangle ACE$ és al $\triangle ACD$ com 21 a 7 i el $\triangle ACD$ al $\triangle AEF$ com 7 a 1, [EVI 1]

el triangle $\triangle ACF$ és al $\triangle ACD$ com 22 a 7.

Però el quadrat $\square CG$ equival a quatre vegades el triangle $\triangle ACD$. [EI 34]

Per tant, el triangle $ACDF$ és al quadrat del diàmetre AB com 22 a 28,

o com 11 a 14.

Tanmateix, el triangle $\triangle ACDF$ equival al cercle [de diàmetre] AB, ja que l'altura AC és igual al radi del cercle i la base a la [seva] circumferència, [MC 1]

i aquesta circumferència és igual al triple més una setena part del diàmetre, aproximadament. [MC 3]

En definitiva, el cercle és al quadrat $\square CG$ com 11 a 14, aproximadament. ♠

1293. És curiós que aquesta proposició utilitza la següent. En conseqüència, s'hauria d'invertir l'ordre de l'exposició. Tira $DE = 2CD$ i $DF = \frac{1}{7}CD$. Per tant, $CF = \left(3 + \frac{1}{7}\right)CD = \frac{22}{7}CD$. Per MC 3, CF és igual a la longitud de la circumferència del cercle de diàmetre AB, més o menys. Per MC 1, [l'àrea d]el triangle $\triangle ACF$ equival a la del cercle, aproximadament. Però el $\triangle ACF$ és al $\triangle ACD$ com 22 a 7 [EVI 1]. I aquest triangle és al quadrat $\square CG$ com 1 a 4. Si considerem la raó composta, veurem que el cercle és al quadrat $\square CG$ com 11 a 14.

B.7.3 La proposició MC 3

[MC 3] *La circumferència d'un cercle qualsevol equival al triple del diàmetre més una certa part seva que:* a*) és més petita que una setena part i* b*) és més gran que deu setanta-unèsimes parts d'aquest diàmetre.*

[*Demostració.*] *a*) Considerem el cercle de diàmetre AC i centre E, [P 3]
i el segment CLF tangent al cercle pel punt C.

Fem l'angle $\widehat{FEC}$ equivalent a la tercera part de l'angle recte.[1294]

El segment EF és al FC com 306 a 153.

Per tant, la raó que hi ha entre EC i CF és més gran que la que hi ha entre 265 a 153.[1295]

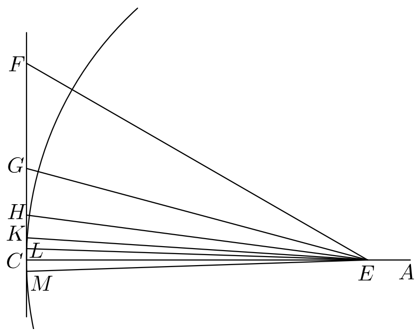


Figura MC 3*a*

Dimidiem l'angle $\widehat{FEC}$ amb la bisectriu EG. [EI 9]

Aleshores, el segment FE és al EC com el FG al CG. [EVI 3]

Per tant, *componendo* i *alternando*, la suma dels segments EF i FC és al segment CF com EC a CG. [EV 18 i 16]

En conseqüència, la raó que hi ha entre CE i CG és més gran que la que hi ha entre 571 i 153.[1296]

I, aleshores, la raó doble de EG i GC ho és més que la raó de 349.450 i 23.409,

---

1294. Cal considerar mig costat de l'hexàgon circumscrit [EIV 15 i EVI 18].

1295. En tota aquesta demostració, Arquimedes segueix el que hem exposat a la pàgina 113, quan hem explicat el seu mètode iteratiu i hem indicat la manera com aconsegueix cada una de les raons d'aquesta proposició. En concret, la que ara ens ocupa és: $\frac{EF}{CF} = \frac{306}{153}$ i $\frac{EC}{CF} = \frac{265}{153}$, que prové del fet següent: $\frac{EC}{CF} = \frac{\sqrt{EF^2 - FC^2}}{CF} = \sqrt{(\frac{EF}{FC})^2 - 1} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$. Ja no tornarem a detallar aquests càlculs.

1296. Nota 1295.

i, per tant, la raó entre EG i CG és la de $591\,\frac{1}{8}$ i 153.[1297]

De bell nou, dimidiem l'angle $\widehat{GEC}$ amb la bisectriu EH.

[Pels raonaments que hem vist abans,] la raó de EC i CH és més gran que la de $1.162\,\frac{1}{8}$ i 153.

I, de retruc, la de HE i HC ho és més que la de $1.172\,\frac{1}{8}$ i 153.

Dimidiem l'angle $\widehat{HEC}$ amb la bisectriu EK.

La raó de EC i CK és més gran que la de $2.334\,\frac{1}{4}$ i 153.

Consegüentment, la de EK i CK ho és més que la de $2.339\,\frac{1}{4}$ i 153.

Dimidiem, finalment, l'angle $\widehat{KEC}$ amb la bisectriu LE.

La raó de EC i LC també és més gran que la de $4.673\,\frac{1}{2}$ i 153.

I, atès que hem dividit l'angle $\widehat{FEC}$, que equival a una tercera part d'un angle recte, en quatre parts iguals,

l'angle $\widehat{LEC}$ és igual a la quaranta-vuitena part d'un angle recte.

[Sobre el segment EC,] construïm l'angle $\widehat{CEM}$ igual al $\widehat{LEM}$, amb el vèrtex en el punt E. [EI 23]

Aquest angle també equival a una quaranta-vuitena part d'un angle recte

i, per tant, el segment LM és el costat del polígon de noranta-sis costats circumscrit al cercle.

En definitiva, hem demostrat que la raó de EC i CL és més gran que la de $4.673\,\frac{1}{2}$ i 153.

Però, com que AC és el doble de EC, i ML el doble de CL, resulta que la raó de EC i el perímetre del polígon regular circumscrit de noranta-sis costats és més gran que la raó de $4.673\,\frac{1}{2}$ i 14.688.[1298]

Per tant, la del perímetre del polígon regular de noranta-sis costats circumscrit i el diàmetre [del cercle que circumscriu] és més petita que la de 14.688 i $4.673\,\frac{1}{2}$. [DV 7]

Tanmateix, el primer d'aquests dos nombres conté tres vegades el segon i el residu que queda és igual a $667\,\frac{1}{2}$ i més petit que la setena part de $4.673\,\frac{1}{2}$.

Per això, el perímetre del polígon circumscrit conté tres vegades el diàmetre i una part d'aquest que és més petita que una setena part seva. [ECI 1]

1297. De fet, és més gran.

1298. És a dir, 153×96.

I la circumferència del cercle és més petita que el triple del diàmetre més una setena part seva. ♠[1299]

b) Considerem el cercle de diàmetre AC [P 3]

i l'angle $\widehat{BAC}$ equivalent a la tercera part d'un angle recte.[1300]

Tenim que la raó que hi ha entre AB i BC és inferior a la que hi ha entre 1.351 i 780,

i la de CB és més petita que la de 1.560 i 780.

Dimidiem l'angle $\widehat{BAC}$ amb la bisectriu AG.

Vist que l'angle $\widehat{BAG}$ és igual al $\widehat{GCB}$ [EIII 26]

i al $\widehat{GAC}$, [per construcció]

els angles $\widehat{GCB}$ i $\widehat{GAC}$ també ho són entre si. [Nc 1]

Però l'angle recte $\widehat{AGC}$ [EIII 31]

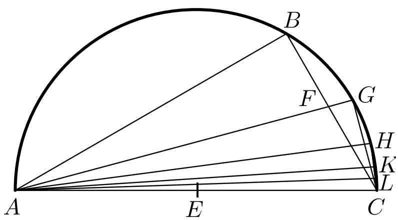


FIGURA MC 3*b*

és comú [als triangles $\triangle FGC$ i $\triangle AGC$].

Per tant, els angles restants $\widehat{GFC}$ i $\widehat{GCA}$ també són iguals. [Nc 3 i EI 32]

I d'això en resulta que els triangles $\triangle AGC$ i $\triangle CFC$ esdevenen equiangles.

De fet, doncs, AG és a GC com GC a GF i com AC a CF. [EVI 4]

Però AC és a CF com la suma dels segments CA i AB a BC.[1301] [EVI 3, EV 16 i 18]

Consegüentment, la suma dels segments BA i CA és a BC com AG a GC, [Nc 1 o EV 11]

la raó de AG i GC és més petita que la raó de 2.911 i 780,

i la de AC i GC que la de $3.013\,\frac{3}{4}$ i 780.

Dimidiem l'angle $\widehat{CAG}$ amb la bisectriu AH.

1299. Aquí s'acaba la fitació superior que proporciona el polígon regular circumscrit de noranta-sis costats.

1300. De fet, Arquimedes considera el costat de l'hexàgon regular inscrit en el cercle, ja que l'angle central $\widehat{BEC}$ —que no es mostra en la figura— equival a dues terceres parts de l'angle recte, que és el que correspon a l'hexàgon regular inscrit en el cercle.

1301. Per EVI 3 i EV 16, $\frac{AC}{CF} = \frac{AB}{BF}$. Per tant, EV 18, $\frac{AC}{CF} = \frac{AC+AB}{BC}$.

Pel que hem vist abans, la raó de AH i HC és més petita que la raó de $5.924\,\frac{1}{8}$ i 780
o que la raó de 1.823 i 240,
ja que aquests dos darrers nombres són les $\frac{4}{13}$ parts dels primers.

Per tant, la raó de AC i HC és més petita que la de $1.838\,\frac{9}{11}$ i 240.

Dimidiem encara l'angle $\widehat{HAC}$ amb la bisectriu AK.

Aleshores, la raó de KA i KC és més petita que la raó de $3.661\,\frac{9}{11}$ i 240
o que la de 1.007 i 66,
ja que els dos darrers nombres són les $\frac{11}{40}$ parts dels dos anteriors.

Així doncs, la raó de AC i KC és més petita que la de $1.009\,\frac{1}{6}$ i 66.

Finalment, dimidiem l'angle $\widehat{KAC}$ amb la bisectriu AL.

La raó de AL i LC és més petita que la de $2.016\,\frac{1}{6}$ i 66,
i la de AC i CL que la de $2.017\,\frac{1}{4}$ i 66.

Invertendo, la raó de CL i AC és més gran que la de 66 i $2.017\,\frac{1}{4}$.
[Ev 7, porisma]

En conseqüència, la raó del perímetre del polígon [regular de noranta-sis costats] i el diàmetre és més gran que la de 6.336 i $2.017\,\frac{1}{4}$.

Però el primer d'aquests nombres conté el segon tres vegades, amb un residu que és més gran que les $\frac{10}{71}$ parts del segon.

Per tant, el perímetre d'un polígon [regular] de noranta-sis costats inscrit en un cercle és més gran que el triple del seu diàmetre més $\frac{10}{71}$ parts d'aquest.

I, més justificat encara, la circumferència del cercle és més gran que el triple del diàmetre i les seves $\frac{10}{71}$ parts. ♠

Així doncs, la circumferència d'un cercle és igual al triple del seu diàmetre més una part del seu diàmetre que és més petita que una setena part d'aquest i més gran que les seves $\frac{10}{71}$ parts. ♠

B.8 Ar: *Arenari*

B.8.1 Un text preliminar

p. 118 Ni tots els grans de sorra poden apaivagar l'afront que Agamèmnon ha infringit a Aquil·les.

B.8.1*a* Ni que em donés deu o vint vegades tot el que té i hi afegís, a més, tot el que pogués trobar, tant si arriba d'Orcomen com de la Tebes d'Egipte, la ciutat de les cases curulles de tresors i de les cent portes, per cadascuna de les quals poden passar cent barons amb els seus cavalls i carros, ni que em donés tots els grans de sorra i de pols,[1302] Agamèmnon no aconseguiria arribar-me al cor, si abans no em pagava tot l'afront que em turmenta.[1303]

B.8.2 El text de l'*Arenari*

Aquesta monografia consta essencialment de quatre parts ben p. 118
diferenciades: una introducció, una descripció de l'Univers, un sistema de numeració idoni per a poder comptar nombres enormement grans i una aproximació al càlcul dels grans de sorra. La descompondrem, doncs, en aquestes parts.[1304]

B.8.2*a* La introducció d'Ar

I [1] Algunes persones creuen, oh rei Geló!, que el nombre de grans de p. 125
sorra és infinit. No parlo pas dels grans de sorra que rodegen Siracusa i cobreixen les platges de Tinàcria,[1305] sinó dels que hi pot haver en totes les regions, tant en les habitades com en les desertes. Però afirmo que està molt lluny de ser-ho, d'infinit. D'altres pensen que, encara que sigui finit, és del tot impossible assignar-li un número determinat.

[2] Què dirien els que opinen d'aquesta manera quan consideren aquestes masses d'arena, si imaginessin que la Terra tota sencera, des dels cims més alts de les muntanyes fins a les cavitats més pregones dels mars, és una massa formada per grans de sorra?

1302. Diu: «οὐδ᾽ εἴ μοι τόσα δοίν ὅσα ψαμαθός τε κόνις τε.»
1303. Homer (1978), cant IX, 382-388, edició catalana, p. 199.
1304. Delsedime (1970).
1305. De la referència que fa Homer a aquesta illa, en parlarem quan analitzem el problema dels bous.

No tinc cap mena de dubte que dirien que, en conjunt, el seu nombre ha d'excedir moltíssim, i enormement, tots els possibles.[1306]

[3] Ara et mostraré amb demostracions geomètriques que no podràs refusar, però que hauràs d'acceptar, que, entre els nombres que he introduït en les comunicacions que vaig adreçar a Zeuxip, n'hi ha que excedeixen no només el nombre de grans de sorra de la Terra, sinó de tot l'Univers.[1307]

B.8.2*b* La descripció de l'Univers

p. 119 [4] Com saps molt bé, molts astrònoms anomenen *Món* una esfera que té el mateix centre que la Terra i un radi igual al segment que uneix el seu centre i el del Sol.

Aristarc de Samos així ho exposa,[1308] alhora que aporta proposicions que refusen [les opinions d]els astrònoms. D'acord amb el que exposa aquest mateix, el Món és més gran del que hem dit.

[5] Suposa que les estrelles i el Sol són immòbils, que la Terra gira al voltant del Sol i que n'és el centre,[1309] i que la grandària de l'esfera de les estrelles fixes, el centre de la qual és el del Sol, és de tal manera que la raó de la circumferència descrita per la Terra i la seva distància a les estrelles (*ἀναλογία*) és la que hi ha entre el centre i l'àrea de l'esfera.[1310]

1306. Recordem la pobresa expressiva dels sistemes numèrics grecs. PLA (2016*b*), § 1.3, p. 9-12.

1307. ARQUIMEDES (2009*a*), edició castellana de 1970, p. 204-205. O també, NEWMAN (1956), edició castellana de 1968, vol. I, part III, p. 420-431.

1308. No pas en el llibre que s'ha conservat, que hem comentat i que hem traduït a PLA (2021), p. 135-147 i 309-346. Probablement, ho deia en l'obra perduda *Les hipòtesis* (*Αρχαι*) (260 aC).

1309. Aquesta afirmació és molt important des del punt de vista de la història de l'astronomia perquè «és el testimoni més antic, i més autoritzat, de l'existència d'un sistema heliocèntric en l'antiguitat». DIJKSTERHUIS (1987), p. 362-363.

1310. O sigui, $\dfrac{\text{òrbita de la Terra}}{\text{distància a les estrelles fixes}} = \dfrac{\text{centre de l'esfera}}{\text{àrea de l'esfera}}$.

[6] És obvi que això és impossible, ja que, com que un punt no té grandària, no podem pensar que hi hagi una raó entre aquest i l'àrea de l'esfera.[1311] Tanmateix, podem creure que Aristarc ho veia així: com que hem acceptat que la Terra és el centre del món, la raó que té la Terra amb el que anomenem el *Món* és la mateixa que la que hi ha entre l'esfera que conté la circumferència per la qual gira la Terra i l'esfera de les estrelles fixes.[1312]

I, a partir d'aquesta hipòtesi, podem establir les demostracions dels «fenòmens» ($\varphi\alpha\iota\nu o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\nu$)[1313] que s'esdevenen d'aquesta manera i sobre tot l'acceptació que l'esfera en la qual giravolta la Terra és igual a la que anomenem *Món*.

[7] Afirmo que, si considerem una esfera de sorra amb la grandària que Aristarc atribueix a la de les estrelles fixes, podem demostrar que entre els nombres [dels que hem parlat abans] n'hi ha que superen el que expressa la [quantitat de grans de] sorra que conté.

1311. Aquí la hipòtesi s'expressa d'acord amb el llibre V dels *Elements* d'Euclides, que planteja la teoria de la proporció entre magnituds. Però un punt no té magnitud, segons D I 1.

Això no obstant, podem pensar, com fa Abel Rey, que:

> La translació de la Terra en la seva òrbita «no canvia gens» les aparences relatives de les estrelles fixes respecte d'aquesta. Això permet assimilar-la a un «punt sense grandària» en comparació amb l'esfera de les estrelles fixes perquè aquesta és immensa i, per dir-ho d'alguna manera, incommensurable [seria millor dir *incomparable*, negligible l'una respecte de l'altra] en relació amb l'òrbita terrestre. Es tractaria, doncs, d'una metàfora i no pas d'una asserció matemàtica, que il·lustraria amb precisió un sistema del Món en el qual allò que presentaven Aristòtil i els geocèntrics s'ha ampliat fins a l'infinit. [...]Arquimedes conserva aquesta preciosa glosa d'Aristarc quan es proposa comptar els grans de sorra que omplen tota l'esfera de les estrelles fixes i la fa, així, commensurable (Rey (1948), p. 76).

Però, aleshores, malgrat aquesta descripció metafòrica, l'asserció d'Aristarc no serveix com a hipòtesi vàlida per a una anàlisi geomètrica de l'astronomia. I, per això, Arquimedes li esmena l'enunciat.

1312. Curiosament, restablim el centre de l'Univers dins la Terra, en contra del que s'havia afirmat unes línies més amunt. De fet, és el que trobem en l'obra d'Aristarc que ha perviscut i en la *Sintaxi matemàtica*, llibre I, § 6 de Ptolemeu.

1313. Els fets astronòmics observats, a partir dels quals cal bastir una teoria geomètrica que els expliqui.

[8] Cal que fem les suposicions següents:

En primer lloc, el perímetre de la Terra mesura, com a màxim, tres-centes miríades (τ' $\mu\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}\delta\omega\nu$)[1314] d'estadis ($\sigma\tau\alpha\delta\acute{\iota}\omega\nu$).[1315] D'altres, com saps, han intentat demostrar que és de trenta miríades (λ' $\mu\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}\delta\omega\nu$).[1316]

Però jo vaig molt més lluny i suposo que és deu vegades més gran, és a dir, que fa tres-centes miríades d'estadis ($\lambda\gamma'$ $\mu\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}\delta\omega\nu$) però no pas més.

I, tal com han fet la majoria dels astrònoms que m'han precedit, presumeixo que el diàmetre de la Terra és més gran que el de la Lluna i que el del Sol ho és més que el de la Terra.

[9] Finalment, suposo que el diàmetre del Sol és unes trenta vegades el de la Lluna però no pas més. Entre els astrònoms que hem esmentat, Èudox va establir que el del Sol només era nou vegades el de la Lluna, Fídies, el meu pare,[1317] que ho era, aproximadament, dotze vegades, i Aristarc es va esforçar a demostrar que ho era més de divuit vegades però menys de vint. Per mi, que vaig més enllà per poder demostrar el que afirmo sense donar peu a cap rèplica, suposo que el diàmetre del Sol és igual a unes trenta vegades el diàmetre de la Lluna però no pas més.

[10] Pressuposo que, a més de tot això, el diàmetre del Sol és més gran que el costat d'un polígon [regular] de mil costats inscrit en el cercle màxim de [l'esfera d]el cosmos.[1318] Faig aquesta suposició per

1314. Es compon de $\mu\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}\varsigma$ i $\mathring{\alpha}\delta o\varsigma$.

1315. El valor d'un estadi varia amb el pas del temps. L'àtic té 125 passos geomètrics, que equivalen a 177,7 metres. Per tant, 300 miríades d'estadis venen a ser 533.000.000 metres, una longitud excessivament generosa però que afavoreix el que Arquimedes pretén. El càlcul més acurat és el que s'atribueix a Eratòstenes, d'uns 250.000 estadis, és a dir, entre 44.730 i 48.384 quilòmetres. Vegeu Pla (en premsa *d*), «Eratòstenes».

1316. Es refereix a Dicearc, deixeble d'Aristòtil, segons l'autoritat de Heiberg.

1317. Atenció! Hi ha diverses versions. La que hem agafat nosaltres diu: «Φειδία δὲ τοῦ ἁμυῦ πατρὸς», que és una correcció d'una anterior, «Φειδία δὲ τοῦ ἀκοῦ πατρὸς». Mugler (1971*a*), p. 137; Frajese (1974), p. 30 i 450, nota 5.

1318. Diu: «μείζονα. . . τᾶς τοῦ χιλιανώνου πλευρᾶς. . . » Per *cercle màxim del cosmos* entén el de radi la distància del centre de la Terra al del Sol.

què Aristarc afirma que el Sol se'ns mostra com la set-cents vintena part del cercle que anomenem *zodíac*.

M'he esforçat a determinar, amb els instruments [adequats], l'angle que abraça el Sol i que té el vèrtex a l'ull de l'observador.[1319]

[11] Fer-ho no és fàcil perquè ni l'ull, ni les mans ni els instruments que calen són prou fins per a garantir una observació força precisa. Però queixar-se de la l'imperfecció dels instruments no aporta res i no és cap excusa.

Per als meus objectius, n'hi ha prou de determinar dos angles amb vèrtex a l'ull, l'un que no sigui més gran que el que abraça el Sol i l'altre que no sigui més petit que aquest.[1320]

[12] Per això vaig col·locar un regle llarg en una àrea plana horitzontal situada en un indret elevat des del qual pogués observar la sortida del Sol.[1321] Vaig posar un cilindre perpendicular al regle, vaig adreçar el regle cap al Sol i vaig posar l'ull en un extrem seu.[1322]

El cilindre estava situat entre l'ull i el Sol de manera que el tapés totalment. Aleshores vaig allunyar el cilindre a poc a poc fins que va començar a aparèixer un xic de Sol a l'un costat i l'altre del cilindre.

[13] Després vaig aturar el cilindre. Si l'ull veia des d'un sol punt situat a l'extrem del regle i tiràvem tangents al cilindre, era evident que l'angle determinat per aquestes tangents és més petit que el que té el

1319. La relació dels diàmetres del Sol i la Lluna és $\frac{1}{400}$. El valor del diàmetre aparent del Sol d'Aristarc és $\frac{360^{o}}{720} = 30'$. Per als càlculs d'Aristarc, Pla (2021), p. 135-147. Les observacions d'Arquimedes donen resultats força precisos: $\frac{90^{o}}{200} = 27'$ i $\frac{90^{o}}{164} = 32'35''$. El valor depèn de la distància del Sol a la Terra en el moment de la medició. Si considerem el valor mitjà, el valor exacte és $31'59,21''$. En canvi, la relació dels diàmetres que dona no ho és, d'exacta perquè ofereix una raó entre el de la Terra i el del Sol de 30 vegades quan, de fet, és de $109,15$. Per a una anàlisi de la determinació del diàmetre aparent del Sol, Dijksterhuis (1987), p. 364-366.

1320. Diu: «τάν γωνίαν, εἰς ἅν ὁ ἅλιος ἐναρμόζειν τάν κορυφάς ἔχουσαυ ποτὶ τᾶ ὄψει.»

1321. Només és possible observar-los en el moment precís en què apareixen.

1322. Arquimedes en té prou amb un valor aproximat de l'angle, situant-los entre dos extrems, el superior i l'inferior, és a dir, com veurem més endavant, entre $\frac{1}{200}$ i $\frac{1}{164}$ d'un angle recte. Per a una exposició més detallada de l'execució d'aquesta mesura, vegeu Dijksterhuis (1987), p. 364-366.

vèrtex a l'ull i abraça el Sol, ja que entrellucàvem una mica de l'astre a cada banda del cilindre. Però, com que l'ull no percebia els objectes per un sol punt sinó per una part de l'ull que mirava, d'una certa grandària,[1323] vaig prendre un altre cilindre que no fos més petit que el diàmetre de la part de l'ull que mira, el vaig col·locar a l'extrem del regle on era l'ull i vaig tirar tangents als dos cilindres. És evident que l'angle amb el vèrtex a l'ull obtingut d'aquesta manera és més petit que el que abraça el Sol.

[14] Per trobar un cilindre el diàmetre del qual no sigui més petit que l'amplada de la part de l'ull que mira [els rajos], vaig fer això: vaig agafar dos cilindres del mateix diàmetre petit. L'un era blanc i l'altre negre. Els vaig situar l'un davant de l'altre enfront de l'ull, de manera que el cilindre blanc estigués més lluny que el negre, que tocava la cara. Si els diàmetres dels cilindres són més petits que l'amplada de la part de l'ull que mira, és evident que, abraçant el negre, veus el blanc. Si els diàmetres dels cilindres són molt més petits que l'amplada de la part de l'ull que mira, es veu tot el cilindre blanc, però, si són molt més petits, només se'n veuen algunes parts situades a cada banda del cilindre i més properes a l'ull. I, si els prenc de gruixos suficients, l'un tapa l'altre a causa del gruix però no tapa res més. La magnitud adequada per al gruix dels cilindres que compleixen aquesta condició no ha de ser pas més petita que la de l'ull.[1324]

[15] Per aconseguir un angle que no fos més petit que el que abraça el Sol i que tingués el vèrtex a l'ull, vaig fer això: vaig separar el cilindre i l'ull fins que el primer va tapar totalment el Sol. De l'extrem del regle on tenia l'ull, vaig tirar tangents al cilindre. Es va fer evident que aquell angle era més gran que el que abraça el Sol i tenia el vèrtex a l'ull.

1323. Diu: «ἐπεὶ αἱ ὄψιες οὐκ ἀφ ἐνὸς σαμείον βλέποντι, ἀλλὰ ἀπό τινός μεγέθεος».

La part de l'ull que percep els objectes és la pupil·la, que es dilata o es contreu segons la quantitat de llum del Sol que hi incideix. Atès que el diàmetre de la pupil·la pot no coincidir amb el del cilindre, l'experiència és imprecisa.

1324. És la descripció de la *dioptra* (*διόπτρα*), que, un segle més tard, va inspirar Heró per a fabricar la seva.

[16] Un cop determinats aquests angles, els vaig comparar amb l'angle recte: el més gran —és a dir, el que té el vèrtex en el punt marcat en el regle— era més petit que la cent seixanta-quatrena part d'un angle recte, i el més petit[1325] era més gran que dues-centenes parts d'aquest. És, doncs, evident que l'angle que abraça el Sol és més petit que la cent seixanta-quatrena part d'un angle recte i més gran que dues-centenes parts d'aquest.[1326]

[17] Sent això d'aquesta manera, volem demostrar [el teorema següent]:

[Teorema.] *El diàmetre del Sol és més gran que el costat d'un polígon [regular] de mil costats*[1327] *inscrit en el gran cercle de l'esfera del Món.*

[Demostració.] Considerem el pla que conté els centres de la Terra i el Sol i l'ull de l'observador.[1328] [Exi 2][1329]

I suposem que el Sol està un pèl aixecat respecte de l'horitzó.

Aquest pla talla l'esfera del Món pel cercle $\bigcirc\, ABC$,
la Terra pel $\bigcirc\, DEF$ i el Sol pel $\bigcirc\, ST$.

Siguin els punts H, K i D els centres de la Terra, el Sol i l'ull.

Des del punt D, tirem els segments DL i DO tangents al cercle $\bigcirc\, SG$ pels punts N i T, [Eiii 17]
i des del punt H, els HM i HP tangents al mateix cercle $\bigcirc\, SG$ pels punts W i R, [Eiii 17]
que tallen la circumferència del cercle $\bigcirc\, ABC$ per A i B.[1330]

[18] El segment HK és més gran que el DK
perquè hem suposat que el Sol es troba per damunt de l'horitzó.[1331]

1325. És a dir, l'angle format pels dos [segments] tangents als dos cilindres des de l'ull.

1326. Nota 1319 (pàgina 467).

1327. L'anomenarem *quilògon*.

1328. Pla (2021), pàgina 421, nota 775.

1329. N'és un simple diorisma.

1330. El punt H és dins el cercle limitat per la circumferència $\bigcirc\, ABC$.

1331. Si el centre del Sol és en l'horitzó, el segment DK esdevé tangent a la Terra i, per tant, perpendicular al radi que uneix D i H [Eiii 18]. Conseqüentment, el segment HK és més gran que el DK [Ei 47]. Però, a mesura que el Sol s'aixeca per damunt de l'horitzó, l'angle $\widehat{HDK}$ augmenta i el

D'això es dedueix que l'angle determinat pels segments DL i DO és més gran que el comprès entre els segments HM i HP.[1332]

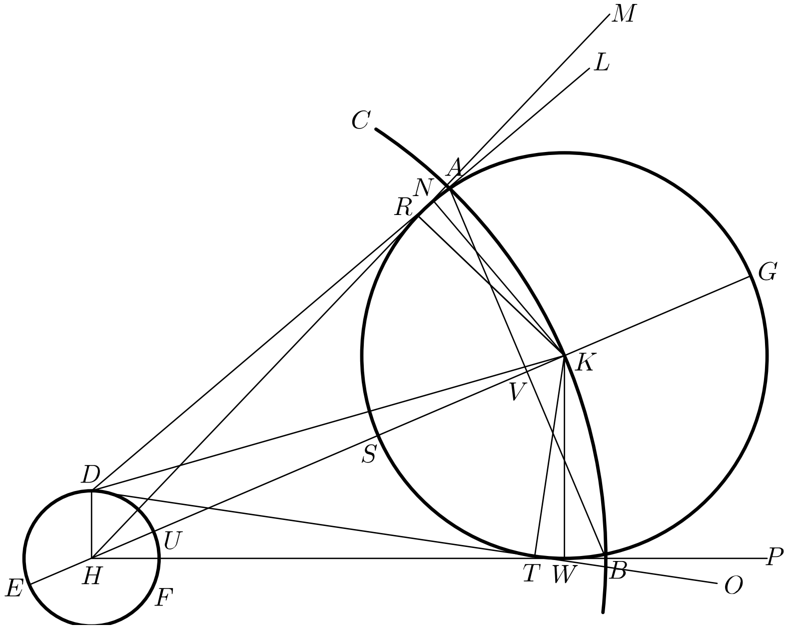


FIGURA Ar 1

Però el limitat pels segments DL i DO, que és el que abraça el Sol i té el vèrtex a l'ull, ho és més que $\frac{1}{200}$ part d'un angle recte i més petit que $\frac{1}{164}$ part.

$\widehat{AHK}$ disminueix. Per tant, quan el Sol es troba allà, el segment HK és encara més gran que el DK [EII 12].

1332. En efecte, els dos triangles $\triangle DNK$ i $\triangle HRK$ tenen un angle recte a N i a R [EIII 18] i el costat KN igual al KR [DI 15]. I, atès que el Sol es troba una mica més amunt de l'horitzó, l'angle $\widehat{TDH}$ es pot considerar recte i, de retruc, el $\widehat{HDR}$ obtús. Per tant, la hipotenusa DK és més petita que la hipotenusa HK. Aleshores, l'angle $\widehat{NDT}$, format per les dues tangents al Sol per D, és més gran que l'angle $\widehat{RHW}$, format per les dues tangents al Sol per H perquè el punt D és més proper al centre del Sol que el H [EIII 15]. De fet, hem establert que el diàmetre aparent del Sol des del punt D és més gran que des del punt H. Apliquem *Òptica*, 24 d'Euclides.

Per tant, l'angle determinat pels segments HM i HP és més petit que una part de l'angle recte dividit en cent seixanta-quatre parts, i la corda AB ho és més que la corda de $\frac{1}{656}$ part de la circumferència del cercle $\bigcirc\, ABC$.[1333]

[19] A més, la raó que hi ha entre el perímetre de la figura poligonal indicada[1334] i el radi de la circumferència $\bigcirc\, ABC$ és més petita que la de 44 i 7,

perquè no ignores que hem demostrat que la circumferència d'un cercle excedeix el triple del diàmetre una quantitat inferior a un setena part [d'aquest] [MC 3]

i que el perímetre d'un polígon inscrit en un cercle és inferior a la circumferència. [ECi 1][1335]

Per tant, la raó que hi ha entre AB i HK és més petita que la que hi ha entre 11 i 1.148.[1336]

[20] I, en conseqüència, el segment AB ho és més que la centèsima part de HK.[1337]

Però el diàmetre del cercle $\bigcirc\, SG$ és igual a BA

perquè el segment VA —que és la seva meitat— [Eiii 3]

és igual a KR, ja que, pels extrems dels segments HK i HA, que són iguals, [Di 15]

hem tirat perpendiculars que subtendeixen el mateix angle. [Ei 26][1338]

1333. Òbviament, $\frac{1}{164}$ part d'un angle recte és $\frac{1}{656}$ part de la circumferència.

1334. És a dir, el polígon regular de 656 costats.

1335. Un porisma immediat de les hipòtesis.

1336. Com que la raó del perímetre del quilògon inscrit en el cercle $\bigcirc\, ABC$ i el segment HK és més petita que $\frac{44}{7}$, la raó entre un dels costats d'aquest polígon i HK també ho és més que $\frac{1}{7} \times \frac{44}{656} = \frac{11}{1.148}$. I ara, com que AB és més petit que aquest costat, *a fortiori*, $\frac{AB}{HK} < \frac{11}{1.148}$.

1337. Òbviament, $\frac{AB}{HK} < \frac{11}{1.148} = \frac{1}{100+\frac{48}{11}} < \frac{1}{100}$.

1338. Usem els dos triangles rectangles $\triangle\, AVH$ i $\triangle\, KRH$ que tenen les hipotenuses iguals, ja que són radis de la circumferència $\bigcirc\, ABC$, i l'angle agut $\widehat{KHV}$ comú. Per tant, els dos triangles són iguals [Ei 8] i, de retruc, $AV = KR$. I $AB = 2\,AV = 2\,KR$, que és el diàmetre del Sol.

Esdevé, doncs, evident que el diàmetre del cercle ◯ SG és més petit que la centèsima part de HK. [per substitució]

Tanmateix, el diàmetre EHU ho és més que el diàmetre del cercle SG perquè el cercle ◯ DEF ho és més que el ◯ SG. [hipòtesi 2]

Aleshores, la suma dels segments HU i KS també és més petita que la centèsima part de HK. [per substitució]

Per tant, la raó d'aquests segments ho és més que la de 100 i 99.[1339]

Ara bé, com que HK no és més petit que HR [Eiii 8]
i SU sí que ho és més que DT,
la raó de HR i DT és més petita que la raó de 100 i 99. [Ev 8]

A més, atès que els catets KR i KT dels triangles rectangles $\triangle HKR$ i $\triangle DKT$ són iguals
i que els costats HR i DT són diferents, sent HR més gran,[1340]
la raó que hi ha entre l'angle de costats DT i DK i el de costats HR i HK és més gran que la que hi ha entre els segments HK i DK,
i més petita que la que hi ha entre els HR i DT
perquè, si dels catets[1341] [corresponents] dels dos triangles rectangles, dos són iguals i els altres dos diferents,
la raó que hi ha entre l'angle més gran adjacent als costats diferents i el [angle] petit és més gran que la de la hipotenusa gran i la petita, i més petita que la del catet gran i el petit.[1342]

[22] Però la raó entre l'angle de costats LD i DO i el de costats PH i HM és més petita que la del segment HR i [el costat] DT.[1343]

1339. Com que el diàmetre del cercle SG és més petit que una centèsima part de HK, i que $HU + SK$ ho és més que aquest, resulta que $HU + SK$ ho és més que la centèsima part de HK. Si suposem el segment HK dividit en cent parts iguals, la recta US és més gran que 99 parts de HK. I, en conseqüència, la raó de HK i US esdevé més petita que la raó de 100 i 99.

1340. Ja que $HK > DK$.

1341. Diu: «γραμμὰ τᾶν περὶ τὰν ᾽χρθὰν γωνιάν», 'recta que està al voltant de l'angle recte'.

1342. Aquí, de fet, Arquimedes estableix una desigualtat trigonomètrica: $\frac{\sin\hat{\alpha}}{\sin\hat{\beta}} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\hat{\alpha}}{\tan\hat{\beta}}$. És una conseqüència d'Evi 33 i de l'*Almagest*, proposició 10. Vegeu el problema 50 (pàgina 172).

1343. És a dir, $\frac{\widehat{KDT}}{\widehat{KHR}} < \frac{HR}{DT}$ i, doblant-los, $\frac{\widehat{LDO}}{\widehat{PHM}} < \frac{HR}{DT} < \frac{100}{99}$.

I aquesta és més petita que la que hi ha entre 100 i 99.

En conseqüència, la raó dels angles de costats LD i DO, i PH i HM és més petita que la que hi ha entre 100 i 99. [per transitivitat]

I, atès que l'angle format pels segments LD i DO ho és més gran que $\frac{1}{200}$ part de l'angle recte,
resulta que l'angle de costats PH i HM ho és més que $\frac{1}{99.020}$ part de l'angle recte
i més que una 203a part de l'angle recte.[1344]

Per tant, el segment AB també ho és més que la corda que subtendeix un angle igual a $\frac{1}{812}$ part de la circumferència del cercle $\bigcirc\, ABC$.

Però el segment AB és el diàmetre del Sol.[1345]

I d'això en resulta que aquest diàmetre és més gran que el costat del quilògon regular.[1346]

B.8.2*c* El càlcul d'algunes grandàries

II [1] Un cop establert aquest resultat, podem establir que el diàmetre del Món és més petit que una miríada de vegades el de la Terra, i també que cent miríades de miríades d'estadis.[1347]

Com que hem suposat que el diàmetre del Sol no supera trenta vegades el de la Lluna [hipòtesi 3]

1344. Això prové del càlcul següent: $\frac{20.000}{203} = 98\,\frac{106}{203} < 99$ i $\widehat{AHR} > \frac{99}{20.000}\,r > \frac{1}{203}\,r$.

1345. És a dir, SG.

1346. En la darrera part, tenim: $\widehat{NDT} > \frac{1}{100}\,r$, on r significa un angle recte. Per tant, $\frac{\frac{1}{200}\,r}{\widehat{AHB}} < \frac{100}{99}$ i $\frac{r}{\widehat{AHB}} < \frac{20.000}{99}$ i, de retruc [EV 4 i EV 8 adaptat, o DV 7], $\frac{\widehat{AHB}}{r} > \frac{99}{20.000}$. O sigui que $\widehat{AHB} > \frac{99}{20.000}\,r > \frac{1}{203}\,r$ [nota 1344] i, per tant, $\widehat{AHB} > \frac{4}{203\times 4}\,r$ [per substitució]. És a dir, $\widehat{AHB} > \frac{1}{812}\,(4\,r) = \frac{1}{812}$ angle de gir. En definitiva, AB és més gran que el costat del polígon regular inscrit de 812 costats i, en conseqüència, de 1.000 costats [ECI, postulat 2].

1347. Diu: «ἡ σταδιων μυριάκις μυριάδες ρ», és a dir, '100 miríades de miríades', o sigui, $100 \times 10.000 \times 10.000 = 10^8$. Aquest nombre, com veurem a [III], és central en el seu sistema de numeració, que usava MM per a designar aquest número. PLA (2016*b*), p. 12.

i que el diàmetre de la Terra és més gran que el de la Lluna,
[hipòtesi 2]
és evident que el diàmetre del Sol és més petit que trenta vegades el diàmetre de la Terra.

[2] I, com que hem demostrat que el diàmetre del Sol és més gran que el costat d'un quilògon [regular] inscrit en el gran cercle de l'esfera del Món,
és evident que el contorn del quilògon del qual acabem de parlar és més petit que mil vegades el diàmetre del Sol.

Però aquest diàmetre ho és més que trenta vegades el de la Terra.

Per tant, el perímetre d'aquest polígon és més petit que tres miríades de vegades el diàmetre de la Terra
i alhora més gran que el triple del diàmetre del Món,
perquè hem establert que el diàmetre d'un cercle és més petit que la tercera part del perímetre de qualsevol polígon [regular] inscrit en aquest
que tingui més de sis costats iguals. [EIV 15, porisma, i MC 3]

Així doncs, el diàmetre del Món és més petit que una miríada de vegades el de la Terra
[3] i que 100 miríades de miríades d'estadis.

Tanmateix, hem suposat que el perímetre de la Terra no sobrepassa 300 miríades d'estadis. [hipòtesi 4]

I és més gran que el triple del seu diàmetre perquè també ho són els perímetres dels cercles. [MC 3]

Esdevé, doncs, evident que el diàmetre de la Terra és més petit que 100 miríades d'estadis.

I el diàmetre del Món més que una miríada de vegades el de la Terra
i, de retruc, més que 100 miríades de miríades d'estadis.[1348]
[EIV 15, porisma]

1348. Hem vist que el diàmetre del Sol és més gran que el costat del quilògon regular inscrit en el cercle del Món. Aleshores, el perímetre del quilògon $<$ 1.000 vegades el diàmetre del Sol. Però hem acceptat que el diàmetre del Sol $<$ 30 vegades el diàmetre de la Terra. Per tant, el perímetre del quilògon $<$ 30.000 diàmetres de la Terra. D'altra banda, hem establert que el perímetre del quilògon $>$ 3 diàmetres del Món. De fet, el

[4] Fins aquí, tot el que havíem de saber sobre la grandària i les distàncies.

Pel que fa als grans de sorra, suposo això:

Si agafem un grapat de sorra que no supera una llavor de rosella, el número de grans que té no és més elevat que 10.000, ja que el diàmetre de la llavor de rosella no és més petit que una quarantena de dit.[1349]

He arribat a aquestes conclusions mitjançant l'anàlisi següent:

Damunt un regle llis he alineat llavors de rosella tocant-se l'una amb l'altra
i he vist que vint-i-cinc llavors ocupen més d'un dit.

Així doncs, el diàmetre d'una llavor de rosella és una quarantena part del dit i no mesura mai menys que això.

I ara ja puc establir sense ambigüitat el que m'havia proposat.

---

perímetre de l'hexàgon regular inscrit en un cercle és sis vegades el radi, o sigui, tres vegades el diàmetre. És a dir, si d i p designen el diàmetre i el perímetre, tenim que:

$$\begin{aligned} d_{\text{cercle del Món}} &= \tfrac{1}{3}\, p_{\text{hexàgon regular}} \\ &< \tfrac{1}{3}\, p_{\text{polígon regular de més de sis costats}}. \end{aligned}$$

Per tant, $d_{\text{cercle del Món}} < \frac{1}{3}\, p_{\text{quilògon regular}}$. O sigui, $3\, d_{\text{diàmetre del Món}} < p_{\text{quilògon}} < 30.000\, d_{\text{diàmetre de la Terra}}$.

D'això en resulta que $d_{\text{Món}} < 10.000\, d_{\text{Terra}}$. Però hem suposat que la circumferència de la Terra fa 3 milions d'estadis. Per tant, $d_{\text{Terra}} <$ 1 milió d'estadis.

Per això, $d_{\text{Món}} <$ 10.000 × (1 milió d'estadis). O sigui, $d_{\text{Món}} < 10^{10}$ estadis < 10 miliard d'estadis. En la nota 1347 (pàgina 473) hem vist de quina manera Arquimedes anomena el nombre 10^{10}.

1349. Un dit —δάκτυλος— equival a $\sim 0,0001$ estadis, és a dir, uns $1,85$ cm. De fet, com a mesura de longitud, s'anomena *polzada*. Pla (2016*b*), p. 13.

B.8.2*d* El sistema numèric d'Arquimedes

p. 121 III [1] Fins aquí, les meves hipòtesis.[1350]

A continuació, considero que he d'exposar les denominacions dels nombres perquè em sembla que, si no ho faig, els que no han llegit el [text *Principis* (*Αρχαί*)] que vaig enviar a Zeuxip es podrien perdre.[1351]

[2] Coneixem el nom dels nombres fins a la *miríada*.

I també els de més enllà d'aquesta fins a la *miríada de miríades*, (*ποτὶ τὰς μυρίας μιριάδας*),[1352] ja que només cal repetir-los.

Els nombres que van [de la unitat] fins a l'octada els anomeno *nombres de primer ordre*.[1353]

L'octada dels nombres de primer ordre és la unitat dels de segon ordre.

Comptem les unitats, les desenes, les centenes, els milers, les desenes de mil fins a l'*octada*.[1354]

Una octada de nombres de segon ordre és la unitat dels de tercer ordre

i, de la unitat, passem a la desena, la centena, el miler i la desena de mil fins a l'octada de nombres de tercer ordre.

[3] L'octada de nombres de tercer ordre és la unitat dels de quart ordre

i l'octada dels de quart ordre, la dels de cinquè.

I seguim així successivament fins a l'octada de nombres de l'ordre de l'octada.[1355]

1350. Diu: «Ἅ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι.»

1351. Per a una exposició més formal, § 5.2.4*c* (pàgines 121-122).

1352. Fins a la miríada, M, equivalent a 10.000, i de la miríada a la miríada de miríades, MM, $100.000.000 = 10^8$. Nota 1347 (pàgina 473). Per tal de simplificar el text, l'anomenarem *octada* (*ὀκταδός*).

1353. Arquimedes els anomena *nombres primers* (*πρῶτοι ἀριθμοί*), el mateix nom que usa Euclides a DVII 11 per a designar els que no tenen altre divisor que la unitat. PLA (2021), p. 89. Per a evitar confusions, hem preferit l'expressió *nombres de primer ordre*.

1354. Nota 1352.

1355. O sigui, $10^{8\times 10^8}$, ja que tenim $10^8, (10^8)^2, \ldots, (10^8)^{10^8}$, successivament.

Un cop coneguts aquests nombres, que són suficients per als nostres propòsits, podem anar més lluny.

[4] Tots els nombres esmentats fins ara són els del «primer període», (*ἀριθμοὶ πρώτας περιόδος*).

El darrer nombre del primer període és la unitat dels nombres de primer ordre del segon període.

I la unitat dels nombres de segon ordre del segon període, l'octada dels primers nombres del segon període.

Anàlogament, el darrer d'aquests nombres és la unitat dels de tercer ordre del segon període

i, successivament, considerem els nombres com a pertanyents al segon període fins a l'octada de nombres d'aquest període.

De bell nou, el darrer nombre és la unitat dels del tercer període.

Avancem fins a l'octada de l'ordre octada del període de l'octada.[1356]

Els nombres descrits fins aquí són suficients per als nostres interessos, però en podem aconseguir més.

[5] Un cop els hem anomenat,

observem que, si estan col·locats els uns després dels altres en proporció contínua des de la unitat[1357]

i el següent és el deu,

els vuit que hi ha, inclosa la unitat, són els que hem anomenat *nombres de primer ordre*, els vuit següents els que hem anomenat *de segon ordre,* i així successivament, d'octada en octada.[1358]

1356. Ja hem indicat que tot això queda aclarit a § 5.2.4*c*. Vegeu també ORTIZ-GARCÍA (2009), nota 21, p. 140. Si usem N_i per a indicar els nombres d'ordre i, podem abreujar-ho així: $10^{(i-1)\times 10^8} \leq N_i < 10^{i\times 10^8}$. Aleshores, els nombres del primer període P_1 són $N_1, N_2, \ldots, N_{10^8}$ i $10^{8\times 10^8}$ és la unitat dels nombres de primer ordre del segon període, $P_2(N_1)$. El seguiran $P_2(N_2), \ldots, P_2(N_{(10^8)10^8}) := P_2(N_{\text{octada}})$, etc., i així fins a l'octada dels nombres de la desena de milers de miríades del període de desenes de milers de miríades, $P_{10^8}(N_{10^8})$, és a dir, «la unitat seguida de 80.000 milions de milions de zeros».

1357. *Elements* d'Euclides, llibre VIII. PLA (2021), p. 135-170.

1358. Aquí Arquimedes introdueix el concepte d'«octada» —*ὀκταδός*. Són $1, 10, \ldots, 10^7; 10^8, \ldots, 10^{15}; \ldots$. Observem que $10^8, 10^{16} \ldots$ són una

Anàlogament als nombres de la primera octada, els altres nombres els anomenem segons la distància[1359] que tinguin respecte de l'octada a la qual pertanyen.

Per aquesta raó, el vuitè nombre de la primera octada és de mil miríades,
i el primer de la segona —que és la unitat dels nombres de segon ordre— és una miríada de miríades,
ja que és deu vegades el precedent.

El vuitè nombre de la segona octada és mil miríades dels nombres de segon ordre
i, en fi, el primer nombre de la tercera octada
—que és la unitat dels nombres de tercer ordre—
és una miríada de miríades dels nombres de segon ordre, ja que és deu vegades el precedent.

I és evident que això és així per a qualsevol octada.

[6] Pot ser útil conèixer el [enunciat] següent.

[Teorema.] *Si una* [*successió*] *de nombres forma una proporció contínua a partir de la unitat i dos termes* [*de la successió*] *són múltiples l'un de l'altre:* a*) el seu producte també és un terme* [*d'aquesta successió*]*,* b*) aquest producte està tan lluny del terme gran com el petit ho està de la unitat i* c*) aquest producte està tan lluny de la unitat tants termes menys un* [*de la successió*][1360] *com els dos factors junts ho estan de la unitat.*[1361]

miríada de miríades de cada ordre. Nosaltres, per a abreujar, els hem anomenat també *octades*.

1359. La posició dins la seva octada.

1360. La progressió és, de fet, il·limitada.

1361. Teorema de la pàgina 123. Arquimedes utilitza aquesta propietat, que és la fonamental dels logaritmes, per a fer els seus càlculs. Considerem la progressió geomètrica $1, a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_n, \ldots,\ a_{n+m}, \ldots,$ en la qual a_i és $r^1, r \in \mathbb{N}$ i $r > 1$. El producte de a_m per a_n és a_{m+n}, és a dir, $r^m \times r^n = r^{n+m}$, que Arquimedes explicita en termes de distància a la unitat. a_i dista $i+1$ llocs de la unitat, i a_j dista $j-i+1$ termes de $a, j > i$. Per tant, a_{m+n} ho fa de a_n tants llocs com a_m de la unitat. I a_{m+n} dista $m+n+1$ termes de la unitat, i a_m i a_n junts ho fan $m+1$ i $n+1$ termes de la unitat, respectivament.

[7] [Demostració.] Siguin $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$ i L [una successió de] nombres en proporció contínua a partir de la unitat A,
i P el producte de D per H.

a) Prenem un terme L de la successió allunyat de H tants termes com D de la unitat.

Volem demostrar que P és igual a L.

Atès que aquests són proporcionals
i que D està tan lluny de A com L de H,
el nombre D és al nombre A com el L al H,
ja que D és igual al producte de A per D, [Dvii 15]
i L ho és de H per D.[1362]

Per tant, L és igual a P.

[8] És evident, doncs, que el producte de D per H és un terme de la successió.

b) De retruc, el terme L està allunyat del factor gran tants termes com el petit ho està de la unitat.

c) A més, és evident que aquest mateix producte està allunyat de la unitat tants termes menys un dels que els factors junts ho estan de la unitat.

El nombre de termes de A, B, C, D, E, F, G i H és igual al nombre de termes que allunyen H de la unitat,
i el nombre de termes de I, K i L ho és una unitat menys,
ja que el seu nombre més H és igual al nombre de termes que l'allunyen de la unitat. ♠

1362. Tenim que, *ex æquali* [Ev 22], $\frac{D}{A} = \frac{L}{H}$. Per tant, $A \times L = H \times D$ [Evii 19]. Però $D = D \times A$ [Dvii 15]. Per tant, $A \times L = H \times D \times A$ [per substitució i Ev 3]. En definitiva, $L = H \times D$ [Evii 17, Evii 18, Ev 6 i Ev 7].

B.8.2*e* El còmput dels grans de sorra de l'Univers

p. 122 [1] Un cop suposades unes coses i demostrades unes altres, fem ara les que ens havíem proposat.[1363]

En efecte, com que hem suposat que el diàmetre d'un gra de rosella no és més petit que la quarantena part d'una polzada,
és evident que una esfera d'un diàmetre d'una polzada no és més gran que el que cal per a contenir seixanta-quatre mil grans de rosella,
ja que aquesta esfera és igual a seixanta-quatre vegades una que té un diàmetre d'una quarantena de polzades,
perquè he demostrat que les esferes són entre si com la raó triple dels seus diàmetres. [EXII 18][1364]

[2] També hem suposat que el nombre dels grans de sorra equivalents a una llavor de rosella no supera una miríada. [II, [4]]

Esdevé, doncs, evident que el nombre de grans de sorra que pot contenir una esfera de diàmetre una polzada no sobrepassa una miríada de vegades seixanta-quatre mil.

Però aquest nombre engloba sis unitats de nombres de segon ordre i quatre mil miríades de nombres de primer ordre.[1365]

En conseqüència, aquest nombre és més petit que deu unitats dels nombres de segon ordre,
i una esfera que té un diàmetre de cent polzades és igual a cent miríades de vegades una esfera d'una polzada de diàmetre,

---

1363. Ara, malgrat la llargada del text, de 19 ítems, és un simple càlcul en el seu sistema de numeració, que hauria estat ben simple si hagués disposat d'una simbologia adequada per a expressar els nombres.

1364. És un porisma d'ECI 34.

1365. Tenim dues esferes $\mathfrak{E}_1$ i $\mathfrak{E}_2$ de diàmetres d_1 d'una polzada i d_2 d'una llavor de rosella. Hem dit que $d_1 \geq \frac{1}{40}\, d_2$. O sigui, $\frac{d_2}{d_1} \geq \frac{1}{40}$. Per tant, $\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{E}_1} \geq \frac{1}{40^3}$. O sigui, $\mathfrak{E}_1 \leq 64.000 \times \mathfrak{E}_2$. En definitiva, una esfera de diàmetre una polzada no sobrepassa 64.000 llavors de rosella. Ara bé, una llavor de rosella no supera 10.000 grans de sorra. Per tant, $\mathfrak{E}_1$ no supera 10.000 vegades 64.000 grans de sorra, és a dir, 640.000.000 grans de sorra. I Arquimedes ho expressa així:

$$\begin{aligned} 640.000.000 &= 60.000.000 + 40.000.000 \\ &= 6 \times 10.000 \times 10.000 + 4 \times 1.000 \times 10.000 \\ &= 6\,\text{miríades de miríades} + 4.000\,\text{miríades}. \end{aligned}$$

perquè les esferes són entre si com la raó triple dels seus diàmetres.
[Exii 18]

Per tant, si tenim una esfera de sorra de diàmetre cent polzades, el nombre de grans de sorra és més petit que el que resulta del producte de deu unitats de nombres de segon ordre per cent miríades.

[3] Però deu unitats de nombres de segon ordre és, a partir de la unitat, el desè terme d'una successió en proporció contínua de raó deu, i cent miríades el setè a partir de la unitat.

Així doncs, el nombre que resulta de multiplicar aquests dos nombres és el terme setze de la progressió a partir de la unitat,
ja que hem demostrat que el producte de dos termes d'una progressió que comença per la unitat dista de la unitat
tants termes menys un dels que disten conjuntament els factors des de la unitat. [III, [6] teorema]

Però entre aquests setze termes,
els vuit primers juntament amb la unitat pertanyen als nombres de primer ordre,
els vuit següents són de segon ordre i el darrer terme és el de mil miríades de nombres de segon ordre.[1366]

En conseqüència, és evident que el nombre de grans de sorra continguts en una esfera de cent polzades de diàmetre és més petit que mil miríades de nombres de segon ordre.

1366. Un cop ha calculat els grans de sorra d'una esfera d'una polzada (< deu unitats de nombres de segon ordre), determina els d'una esfera cent vegades més gran. I, aplicant Exii 18, veu que és més petita que 10^6 vegades deu unitats de nombres de segon ordre ($10^6 \times 10 \times 10^8 = 10^{15}$). Pel que ha vist en el teorema de la pàgina 478, els obté multiplicant 10^9 —deu unitats de nombres de segon ordre— per $10^6 = 10^2 \times 10^4$ —cent miríades. Observa, a més, que, en la progressió

$$1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14}, 10^{15},$$

el terme 10^9 ocupa el desè lloc i el 10^6 el setè. Per tant, 10^{15} ocupa el lloc $10 + 7 - 1$, d'acord amb el teorema de la pàgina 478. És a dir, $10^{15} = 10^3 \times 10^4 \times 10^8$, que són «mil miríades de nombres de segon ordre».

Fixem-nos en la manera com usa les miríades i les miríades de miríades.

Amb aquest aclariment fem palesa la metodologia arquimediana. No caldrà, doncs, que la tornem a explicitar.

[4] Una esfera de diàmetre una miríada de polzades és igual a cent miríades d'esferes de diàmetre cent polzades.

Conseqüentment, és manifest que, si tenim una esfera de sorra de diàmetre una miríada de polzades,
el nombre de grans de sorra equivalent a aquesta és més petit que el que resulta del producte de mil miríades de nombres de segon ordre per cent miríades.

Però aquestes mil miríades constitueixen el setzè nombre de la progressió a partir de la unitat
i cent miríades el terme setè.

Per tant, el terme que resulta del producte d'aquests dos nombres és el vint-i-dosè.

[5] En aquesta progressió de vint-i-dos termes, els vuit primers compresa la unitat pertanyen als nombres que hem anomenat *de primer ordre*,
els vuit següents als *de segon ordre*,
els sis restants als *de tercer ordre*
i, finalment, el darrer terme és deu miríades de nombres de tercer ordre.

Esdevé, doncs, evident que el nombre de grans de sorra que conté una esfera de diàmetre deu mil polzades
no és inferior a més de deu miríades dels nombres de tercer ordre.

Però una esfera que té un diàmetre d'un estadi és més petita que una que té un diàmetre d'una miríada de polzades.[1367]

Per tant, el nombre de grans de sorra equivalents a una esfera de diàmetre un estadi és més petit que deu miríades de nombres de tercer ordre.

[6] I una esfera que té un diàmetre de cent estadis és igual a cent miríades de vegades una esfera que té un diàmetre d'un estadi.

En conseqüència, si disposéssim d'una esfera de sorra tan gran com la que té un diàmetre de cent estadis,
és evident que el nombre de grans de sorra seria més petit que

1367. Recordem que un estadi equival a ~ 192 m i una miríada de polzades (polzada $= \sim\ 1,85\,\mathrm{cm}$) a uns 185 m, és a dir, arrodonint, a 200 m.

el que resulta del producte d'una miríada de miríades de nombres de tercer ordre per cent miríades.

Però deu miríades de tercer ordre constitueixen el vint-i-dosè terme de la progressió a partir de la unitat,
i cent miríades el setè.

D'altra banda, el producte d'aquests dos nombres és el terme vint-i-vuitè d'aquesta progressió.

[7] Però, d'entre aquests vint-i-vuit termes,
els vuit primers comptant la unitat pertanyen als nombres que hem anomenat *de primer ordre*,
els vuit següents *de segon ordre*,
els vuit següents *de tercer ordre*,
els quatre restants *de quart ordre*,
i el darrer és mil unitats de nombres *de quart ordre.*

En conseqüència, el nombre de grans de sorra d'una esfera de cent estadis de diàmetre és més petit que mil unitats de nombres de quart ordre.

[8] Una esfera que té un diàmetre de deu mil estadis ho és a cent miríades de vegades una que té un diàmetre de cent estadis.

Per tant, si disposéssim d'una esfera de sorra de deu mil estadis de diàmetre,
el nombre de grans de sorra seria més petit que el que resulta del producte de mil unitats de nombres de quart ordre per cent miríades.

Però mil unitats de nombres de quart ordre constitueixen el terme vint-i-vuitè de la progressió,
i cent miríades el setè.

Per tant, el producte és el terme quarantè a partir de la unitat.

[9] Tanmateix, d'aquests trenta-quatre termes,
els vuit primers compresa la unitat pertanyen als nombres que hem anomenat *de primer ordre*,
els vuit següents *de segon ordre*,
els vuit següents *de tercer ordre*,
els vuit següents *de quart ordre*,
els dos restants *de cinquè ordre*,
i el darrer és deu unitats de nombres *de cinquè ordre.*

Esdevé, doncs, evident que el nombre de grans de sorra d'una esfera d'una miríada d'estadis de diàmetre és més petit que deu unitats de nombres de cinquè ordre.

[10] Una esfera que té cent miríades d'estadis de diàmetre és igual a cent miríades de vegades una d'una miríada d'estadis de diàmetre.

Per tant, si disposéssim d'una esfera de sorra de cent miríades d'estadis de diàmetre,
el nombre de grans de sorra seria més petit que el producte de deu unitats de nombres de cinquè ordre per cent miríades.

Però deu unitats de nombres de cinquè ordre són el terme trentaquatrè de la progressió,
i cent miríades el setè.

Conseqüentment, el producte d'aquests dos nombres és el terme que ocupa el lloc quaranta de la progressió a partir de la unitat.

[11] Però, d'aquests quaranta termes, els vuit primers compresa la unitat pertanyen als nombres que hem anomenat *de primer ordre*,
els vuit següents *de segon ordre*,
els vuit següents *de tercer ordre*,
els vuit següents *de quart ordre*,
els vuit següents *de cinquè ordre*,
i, finalment, el darrer de tots és mil miríades de nombres *de cinquè ordre.*

Per tant, el nombre de grans de sorra d'una esfera de cent miríades d'estadis de diàmetre és més petit que mil miríades de nombres de cinquè ordre.

[12] Una esfera que té una miríada de miríades d'estadis de diàmetre és igual a cent miríades de vegades una esfera de cent miríades d'estadis de diàmetre.

En conseqüència, si disposéssim d'una esfera de sorra d'una miríada de miríades d'estadis de diàmetre, el nombre de grans de sorra seria més petit que el producte de mil miríades de nombres de cinquè ordre per cent miríades.

Tanmateix, mil miríades de nombres de cinquè ordre són el terme quarantè de la progressió a partir de la unitat,
i cent miríades el setè.

Per tant, el producte d'aquests dos nombres és el terme quaranta-sisè d'aquesta progressió.

[13] Però, d'aquests quaranta-sis termes, tenim que els vuit primers compresa la unitat pertanyen als nombres que hem anomenat *de primer ordre*,
els [següents] *de segon ordre*,
els [tercers] següents *de tercer ordre*,
els [quarts] següents *de quart ordre*,
els [cinquens] següents *de cinquè ordre*,
els sis restants *de sisè ordre*,
i el darrer de tots és deu miríades de nombres *de sisè ordre.*

És, doncs, evident que el nombre de grans de sorra d'una esfera de deu mil miríades d'estadis de diàmetre és més petit que deu miríades de nombres de sisè ordre.

[14] Una esfera que té cent miríades de miríades d'estadis de diàmetre és igual a cent miríades de vegades una esfera d'una miríada de miríades d'estadis de diàmetre.

Per tant, si disposéssim d'una esfera de sorra de cent miríades de miríades de diàmetre,
el nombre de grans de sorra seria més petit que el producte de deu miríades de nombres de sisè ordre per cent miríades.

Però deu miríades de nombres de sisè ordre són el terme quaranta-sisè de la progressió a partir de la unitat,
i cent miríades el setè.

Conseqüentment, el producte d'aquests dos nombres és el terme cinquanta-dos de la progressió a partir de la unitat.

[15] Tanmateix, d'aquests cinquanta-dos termes,
els quaranta-vuit primers compresa la unitat pertanyen als nombres que hem anomenat *de primer ordre*, *de segon ordre*, *de tercer ordre*, *de quart ordre*, *de cinquè ordre* i *de sisè ordre*,
els quatre restants pertanyen als nombres *de setè ordre*,
i el darrer de tots és mil unitats de nombres de setè ordre.

O sigui, el nombre de grans de sorra d'una esfera de cent miríades de miríades d'estadis de diàmetre és més petit que mil unitats de nombres de setè ordre.

[16] I hem fet evident que el diàmetre del Món no és superior a cent miríades de miríades [d'estadis].

Per tant, el nombre de grans de sorra d'una esfera igual a la del Món és més petit que mil unitats de nombres de setè ordre.

Així doncs, hem demostrat que el nombre de grans de sorra d'una esfera igual en magnitud a aquella que la majoria dels astrònoms anomena *Món* és més petit que mil unitats de nombres de setè ordre.

I podem establir també que el nombre de grans de sorra d'una esfera tan gran com la que Aristarc ha suposat per a les estrelles és més petit que mil miríades de nombres de vuitè ordre.

[17] En efecte, atès que hem suposat que la Terra és a l'esfera del Món com l'esfera del Món a l'esfera de les estrelles fixes d'Aristarc,
que els diàmetres de les esferes són proporcionals entre si
i que el diàmetre del Món és més petit que una miríada de vegades el de la Terra,
resulta que el diàmetre de l'esfera de les estrelles fixes és més petit que deu mil vegades el del Món. [Dv 7]

[18] Però les esferes són entre si com la raó triple dels seus diàmetres.

Per tant, el nombre de grans de sorra d'una esfera com la de les estrelles fixes d'Aristarc és més petit que una miríada de miríades de miríades de vegades l'esfera del Món,
ja que hem establert que el nombre de grans de sorra equivalent al volum de [l'esfera d]el Món és més petit que mil unitats de nombres de setè ordre.

Esdevé, doncs, clar que, si considerem una esfera de sorra equivalent a la que Aristarc suposa que és la de les estrelles fixes,
el nombre de grans de sorra és més petit que el producte de mil unitats de nombres setens per una miríada de miríades de miríades.

[19] Però mil unitats de nombres setens és el terme cinquanta-dosè de la progressió a partir de la unitat,
i una miríada de miríades de miríades el tretzè.

Així doncs, el producte és el terme seixanta-quatrè de la progressió.

Però aquest nombre és el vuitè dels nombres d'ordre vuitè, és a dir, és mil miríades de nombres d'ordre vuitè.

Consegüentment, el nombre de grans de sorra d'una esfera com la de les estrelles, tal com l'ha determinat Aristarc, és més petit que mil miríades de nombres d'ordre vuitè.

[20] Crec, oh rei Geló!, que a moltes persones això no els semblarà creïble perquè no estan instruïdes en la ciència de la matemàtica.

Però ho hem demostrat amb claredat per a aquelles que la coneixen i s'han interessat per saber les distàncies i les magnituds de la Terra, el Sol, la Lluna i el Món sencer.

És per això que m'ha semblat que t'interessaria estar al corrent d'aquests resultats.[1368]

B.9 CF: *Sobre els cossos que floten*

Aquesta monografia tracta de la hidrostàtica i és el primer treball conegut sobre aquesta qüestió. Consta de dos llibres força diferents. En el primer, Arquimedes prescindeix de la forma dels cossos immersos però en el segon, no. Això és el que explica que, en el primer, els segments verticals convergeixin al centre de la Terra i, en canvi, en el segon, siguin paral·lels. p. 124

Els textos més interessants els recollim en cinc blocs que contenen: *a*) els dos postulats,[1369] *b*) les dues proposicions relatives a l'esfera, *c*) les dues proposicions que expliciten el principi d'Arquimedes —com ja hem fet abans—, *d*) la resta de proposicions del llibre I per a evitar, així, llacunes demostratives i *e*) les dues primeres proposicions del llibre II.

1368. [κ] *Ταῦτα δὲ, βασιλεῦ Γέλων, τοῖς, μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτικων οὐκ εὔπιστα φανήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσιν καὶ περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθέων τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἁλίου καὶ ταᾶς σελήνας καὶ το ὅλον κόσμου πεφροντικότεσσιν πιστὰ διὰ τὰν ἀπόδειξις ἐσσεῖσθαι . διόπερ ᾠήθην καὶ οὐκ ἀνάρμοστον εἶμεν [ἔτι] ἐπιθεωρῆσαι ταῦτα.* Mugler (1971*a*), p. 156-157.

1369. El text diu: *Ὑποκείσθω. . .*

B.9.1 CFI parcialment

B.9.1*a* Els dos postulats de CFI

Recollim plegades les dues hipòtesis que apareixen separades en el llibre CFI, la primera a l'inici i la segona abans de CFI 8.

B.9.1*a*₁ [Postulat 1] *Suposem que la naturalesa d'un líquid*[1370] *és tal que, de les seves parts igualment col·locades —ἐχ ἴσου κειμένων— de manera contínua,*[1371] *la que està menys pressionada és empesa per la que ho està més. I que cada part seva és pressionada verticalment pel líquid que es troba damunt seu, llevat que estigui dintre* [*d'un recipient*] *i sigui pressionat per alguna altra cosa.*

B.9.1*a*₂ [Postulat 2] *Suposem que cadascuna de les magnituds sòlides que es troben dins d'un líquid són empeses cap amunt seguint la perpendicular —la vertical— que passa pel seu centre de gravetat.*

B.9.1*b* Les dues proposicions de CFI relatives a l'esfera

B.9.1*b*₁ [CFI 1] *Si, quan tallem una superfície per plans que passen per un mateix punt, obtenim sempre un cercle que té aquest punt com a centre, aquesta superfície és una esfera.*[1372]

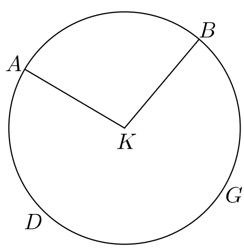


FIGURA CFI 1

Considerem una superfície tallada per qualsevol pla que passa pel punt K.

Suposem que la secció resultant és sempre una circumferència del cercle de centre K.

Afirmo que aquesta superfície és la d'una esfera.

[*Demostració.*] Perquè, si no és esfèrica,[1373] no tots els segments que uneixen el punt K amb [punts d']aquesta són iguals.

1370. El text grec usa el terme ὑγρός, però nosaltres farem servir la paraula *líquid*.

1371. És a dir, el líquid és continu i isòtrop arreu.

1372. Heiberg no recull aquesta proposició ni bona part de la segona; solament se'n conserven les traduccions de Guillem de Moerbeke.

1373. Hipòtesi de l'absurd.

És a dir, hi ha dos punts A i B d'aquesta superfície a causa dels quals els segments AK i KB no són iguals.

Però aquests segments són coplanaris. [Exi 1 i 2]

Considerem el pla que conté els segments AK i KB.

Sigui $DABG$ la línia d'intersecció [del pla i la superfície].

Aquesta línia és una circumferència del cercle de centre el punt K perquè hem suposat que qualsevol secció d'aquesta superfície [per un pla que passa per K] és un cercle.

En conseqüència, els segments rectilinis AK i KB són iguals entre si. [Di 15]

Però[, per la hipòtesi de l'absurd,] són diferents.

I això no pot ser.

És obvi, doncs, que aquesta superfície és esfèrica. ♠

B.9.1*b*₂ [CFi 2] *La superfície de qualsevol líquid que es troba en repòs és esfèrica i té el mateix centre que la Terra.*

Considerem un líquid en repòs.

Suposem que la seva superfície és tallada per un pla que passa pel centre de la Terra.

Siguin el punt K el centre de la Terra
i l'arc $\widehat{ABCD}$ la secció de [el pla amb] aquesta superfície.

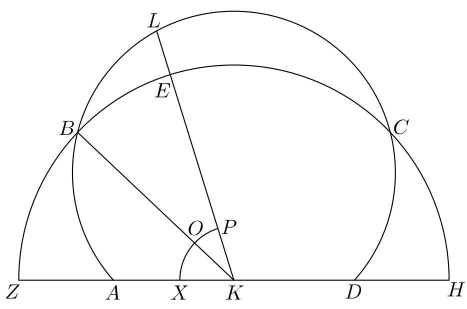


Figura CFi 2

Afirmo que aquest arc de circumferència té el centre a K.

[*Demostració*.] Si no l'hi té,[1374]
no tots els segments tirats pel punt K a la línia $\widehat{ABCD}$ són iguals.

Tenim en compte un segment BK més gran que alguns dels que van del punt K a la línia $\widehat{ABCD}$,
però més petit que alguns altres.[1375]

Pel centre K, tirem un arc de cercle amb radi BK. [P 3]

1374. Hipòtesi de l'absurd.

1375. Sempre existeix. Per exemple, la mitjana proporcional.

Una part d'aquest arc de cercle cau fora de la línia $\widehat{ABCD}$ i una altra dins,
ja que el seu radi és més gran que alguns dels segments tirats des del punt K fins a la línia $\widehat{ABCD}$
i més petit que alguns altres.[1376]

Sigui $\widehat{ZBH}$ aquest arc.

Unim BK. [P 1]

Considerem els segments ZK i KEL que determinen angles iguals amb la línia KB. [EI 23]

Pel centre K, tirem un arc de circumferència $\widehat{XOP}$ del pla i del líquid. [P 3]

Les parts del líquid que es troben situades en l'arc $\widehat{XOP}$ també estan igualment col·locades i de manera contínua les unes amb les altres.

Ara bé, les parts que es troben en l'arc $\widehat{XO}$ són pressionades pel líquid que es troba en la zona $\triangle ABOX$
i les parts que es troben en l'arc $\widehat{OP}$ pel de la zona $\triangle BEPO$.

Així doncs, les parts del líquid que es troben en els arcs $\widehat{XO}$ i $\widehat{OP}$ són pressionades de manera diferent.[1377]

Per tant, la part sotmesa a menys pressió és empesa per la de més pressió i, en conseqüència, el líquid no està en repòs.

Però hem suposat que ho estava.

La línia $\widehat{ABCD}$ ha de ser, per tant, un arc de cercle de centre el punt K.

De manera anàloga, veiem que la secció determinada per un altre pla que passa pel centre de la Terra
determina la circumferència d'un cercle de centre el de la Terra.

En definitiva, és evident que la superfície d'un líquid immòbil té la forma d'una esfera de centre el de la Terra
perquè, si el tallem per qualsevol pla que passa per aquest centre, obtenim una circumferència amb el mateix centre que la Terra.

[CF 1] ♠

1376. Aquí acceptem el principi de continuïtat, que fa que, en un entorn, hi hagi tots els segments més grans i, en un altre, tots els més petits.

1377. Així comença el text de Heiberg.

B.9.1*c* Dos «elements» del principi d'Arquimedes

B.9.1*c*₁ [CFi 3] *Si en un líquid col·loquem un cos que té el mateix pes* [*específic*] *que aquest,*[1378] *el cos s'hi enfonsa fins que no sobresurt però ja no s'hi enfonsa més.*[1379]

En un líquid col·loquem un cos del mateix pes [específic].

Imaginem que una part d'aquest cos s'hi troba submergida i una altra en sobresurt.[1380]

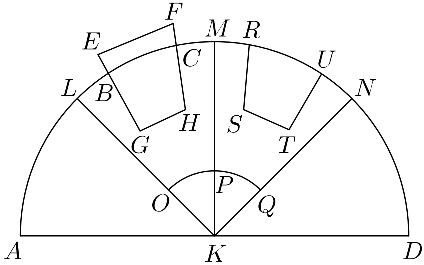


Figura CFi 3

I també que el líquid està en repòs.

Tirem un pla que passa pel centre de la Terra.

Aquest pla talla el líquid i el cos submergit
de manera que la secció de la superfície del líquid és l'arc $\overset{\frown}{ABCD}$
i la del cos, ⌓ $EFGH$.

Sigui K el centre de la Terra,
⌓ $BCHG$ la part del cos que es troba dins del líquid
i ⌓ $BEFC$ la que en sobresurt.

Imaginem la figura sòlida com una piràmide de base un paral·lelogram situat en la superfície del líquid.

Suposem una piràmide que té la base en un paral·lelogram situat en aquesta superfície[1381]
i el vèrtex en el centre de la Terra.[1382]

1378. És a dir, tenen el mateix pes i el mateix volum.

1379. Heiberg recull com a *locus simili* el passatge d'Heró de *Pneumàtica* (*Πνευματικά*), vol. I, p. 24, 1: «A *Sobre els cossos que floten* Arquimedes demostra que els del mateix pes que el líquid ni en sobresurten ni s'hi enfonsen. Per això, no pressionen el líquid que tenen a sota.»

1380. Hipòtesi de l'absurd.

1381. Aquest paral·lelogram no és pla, sinó que correspon a una part de la superfície de l'esfera compresa entre quatre arcs de cercles màxims.

1382. Nota *b* de <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/fluides.htm>.

[*Demostració*.] Siguin KL i KM els segments de les cares de la piràmide que determina el pla en [la figura limitada per] l'arc $\widehat{ABCD}$.

Considerem la superfície d'una altra esfera [⊖ OPQ], de centre el punt K situat en el líquid a sota del cos ⏢ $EFGH$.

La tallem amb l'esmentat pla.

Hi prenem una piràmide igual i semblant a la primera
que és contigua i contínua amb la que abraça el sòlid.

Siguin KM i KN els segments d'intersecció.

En el líquid hi prenem, ara, una certa grandària ⏢ $RSTU$ igual i semblant a la part $BGHC$
immersa en aquest.

Aleshores, la part del líquid que, en la primera piràmide, es troba damunt de la superfície $\widehat{OP}$
i la que, en l'altra piràmide, es troba damunt [la superfície] $\widehat{PQ}$
estan col·locades de manera anàloga i contínua.

Però, en canvi, no estan sotmeses a la mateixa pressió.

De fet, la part del líquid corresponent a la superfície $\widehat{OP}$ rep la pressió de ⏢ $HGEF$
i del líquid que es troba entre les superfícies de les seccions $\widehat{OP}$ i $\widehat{LM}$ i les cares de la piràmide.

En canvi, la part corresponent a $\widehat{OP}$ és pressionada pel líquid que es troba entre les superfícies de les seccions $\widehat{QP}$ i $\widehat{MN}$ i les cares de la piràmide.

Tanmateix, el pes del líquid que correspon a les seccions $\widehat{MN}$ i $\widehat{PQ}$
és més petit que l'anterior —que correspon als arcs $\widehat{OP}$ i $\widehat{LM}$—,
ja que el pes del sòlid ⏢ $RSTU$ ho és més que el del sòlid ⏢ $EFGH$
—igual al de la part ⏢ $GBCH$—,
perquè posseeix el mateix volum que aquest,
hem suposat que el sòlid té el mateix pes [específic que el líquid]
i que la resta del sòlid i del líquid són iguals.

És, doncs, evident que la part relativa a $\widehat{PQ}$ és pressionada per la part [relativa a] $\widehat{PO}$.

I, en conseqüència, el líquid no resta immòbil. [CFɪ 1]

Malgrat això, hem suposat que no es mou.

Per tant, cap part del sòlid no sobrepassa la superfície del líquid ni s'hi submergeix,
ja que totes les parts igualment situades reben la mateixa pressió perquè el sòlid i el líquid comparteixen pes [específic]. ♠

B.9.1 $\boldsymbol{c_2}$ [CFi 4] *Si en un líquid col·loquem un cos que té menys pes* [*específic*] *que aquest,*[1383] *no s'enfonsa del tot, sinó que en sobresurt una part.*

Posem esment en un cos més lleuger que un líquid.

Suposem que, col·locat en el líquid, s'hi submergeix totalment de manera que cap part no es troba per damunt de la superfície[1384]

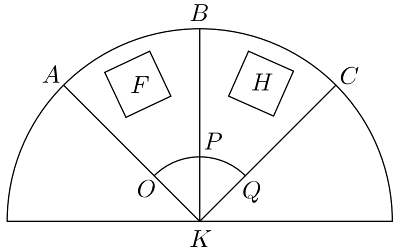


FIGURA CFi 4

i que el líquid està en repòs.

Tirem un pla que passa pel centre de la Terra
i talla el líquid i el cos que s'hi troba submergit.

Siguin $\widehat{ABC}$ l'arc de la secció del pla i la superfície del líquid,
F la secció del pla i el sòlid, i K el centre de la Terra.

Considerem, com hem fet en la proposició anterior,[1385]
una piràmide de vèrtex K que inclou la figura F.

[*Demostració*.] El pla ⏥ ABC hi talla les cares per les arestes AK i KB.

Considerem una altra piràmide igual i semblant a la primera.

El pla ⏥ ABC talla les cares d'aquesta piràmide per les arestes BK i CK.

Ara, en el líquid, per sota del cos submergit,
prenem una superfície esfèrica de centre el punt K.

El pla ⏥ ABC la talla per l'arc $\widehat{OPQ}$.

Finalment, en la segona piràmide, prenem un cos H compost per una quantitat de líquid igual al sòlid F,

1383. És a dir, és més lleuger.
1384. Hipòtesi de l'absurd.
1385. CFi 3.

i la part de líquid que es troba sota de l'arc $\widehat{OP}$ en la primera piràmide i sota l'arc $\widehat{PQ}$ en la segona.

Aquestes dues parts són contigües i estan col·locades de manera anàloga.[1386]

Però estan sotmeses a pressions diferents:
les de la primera piràmide les reben del cos F i el líquid contingut en la piràmide ◬ $ABPO$,
les de la segona, del líquid contingut en la piràmide ◬ $PQCB$.

I el pes del cos F és més petit que el del líquid contingut en [el cos] H,
ja que hem suposat que el sòlid, del mateix volum que el cos, és més lleuger que aquest.

A més, el pes de la part de líquid que envolta el sòlid F és igual al de la que envolta el cos [líquid] H,
ja que les dues piràmides són iguals.

D'això se segueix que la part del líquid que es troba sota la superfície $\widehat{OQ}$ està més comprimida [que l'altra].

Per tant, aquesta part empeny l'altra menys pressionada
i, en conseqüència, el líquid no roman en repòs. [CF 1]

Però hem suposat que el líquid ho està.

Així doncs, el sòlid no resta totalment submergit
i una part queda per damunt de la superfície del líquid. ♠

B.9.1*d* El principi d'Arquimedes

Vegem, ara, les proposicions CFI 6 i CFI 7, que estableixen el principi d'Arquimedes, i la cinquena [CFI 5], que n'és un «element» necessari.

B.9.1*d*$_1$ [CFI 5] *Si en un líquid col·loquem un cos més lleuger, s'enfonsa fins que el volum de líquid desplaçat pesa el mateix que aquest.*
Considerem la mateixa construcció que abans.[1387]

1386. Els objectes geomètrics són *contigus* quan tenen els extrems en un mateix lloc i *continus* quan els seus extrems són una sola i mateixa cosa.

1387. CFI 3.

Suposem que el líquid es troba en repòs
i que el cos ⏢ $EFGH$ és més lleuger que aquest.

Atès que el líquid està en repòs,
les seves parts disposades de manera semblant estan sotmeses a la mateixa pressió. [CFi 1]

Així, els líquids continguts sota les superfícies $\widehat{OP}$ i $\widehat{PQ}$ estan igualment pressionats.

Per tant, els pesos de les parts que els comprimeixen són iguals.

Però el pes del líquid que es troba en la primera piràmide, llevat del cos ⏢ $BGHC$,
és igual al pes del líquid que es troba en la segona piràmide, llevat del líquid ⏢ $RSTU$.

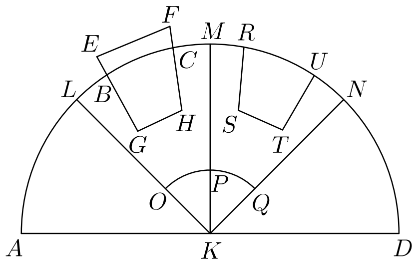


Figura CFi 5

En conseqüència, és evident que el pes del cos ⏢ $EGHF$ és igual al del líquid ⏢ $RSTU$.

I d'això es dedueix que el volum de la part del cos submergida en el líquid té el mateix pes que el cos sencer. ♠

B.9.1d_2 [CFi 6] *Si en un líquid submergim forçadament un cos més lleuger, el cos rep una empenta cap amunt igual al pes del líquid que desplaça.*[1388]

Siguin A un cos més lleuger que el líquid, B el pes de A,[1389]
i B i C junts el pes d'un volum de líquid igual al [volum] de A.

Volem demostrar que el cos A, que submergim forçadament en el líquid, és empès cap amunt amb una força igual al pes C.

[*Demostració*.] Considerem un cos D del mateix pes que [el cos] C.

Aleshores, el cos format per A i D junts és més lleuger que el líquid,
ja que el pes d'aquesta suma és el [pes] de B i C
i el pes del líquid amb el mateix volum que aquesta magnitud
(és a dir, A i D junts) és més gran que el de B i C junts,

1388. El principi d'Arquimedes per als cossos més lleugers que el líquid.
1389. Atenció!, la figura usa dues lletres A amb sentits ben diferents.

ja que el pes d'aquesta suma és el pes del líquid amb el mateix volum que la magnitud A. [per hipòtesi]

Si col·loquem les magnituds A i D juntes en el líquid,
s'enfonsen fins que el volum del líquid igual a la part submergida té un pes igual a la magnitud sencera,
com hem demostrat. [CFI 5]

Considerem l'arc $\widehat{ABCD}$, que és la superfície d'un cert líquid.

Com que el volum d'una part del líquid igual al del cos A té un pes igual a A i D junts,
és clar que la part submergida d'aquesta magnitud [A i D junts] és el cos A
i la part D en sobresurt.

Si fos d'una altra manera, ens contradiríem.[1390] [CFI 5]

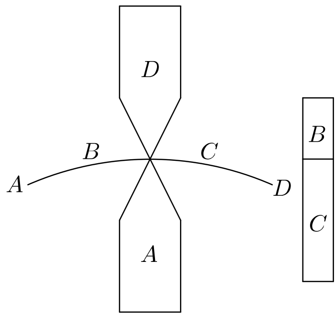


FIGURA CFI 6

És evident, doncs, que el cos A és empès cap amunt amb una força igual a la força amb la qual D, que es troba col·locat al seu damunt,
ho fa cap avall,
ja que una d'aquestes forces no cedeix a l'altra.

Però la quantitat D empeny cap a baix amb un pes igual a la C,
ja que hem suposat que els pesos de D i C són iguals.

Així doncs, [la validesa de] la proposició és evident. ♠

B.9.1d_3 [CFI 7] *Si col·loquem dins d'un líquid, un cos més pesant que aquest, se submergeix fins al fons i desplaça un pes de líquid igual al del seu volum.*[1391]

1390. Aquestes darreres frases mancaven en els manuscrits i han estat afegides per Heiberg.

1391. Principi d'Arquimedes per als cossos més lleugers que el líquid. És, de fet, l'enunciat actual del «principi d'Arquimedes»: «Tot cos submergit en un líquid perd un pes igual al del líquid que desplaça.»

D'això es dedueix la solució del problema de la corona de Hieró que va fer que Arquimedes exclamés: «Eureka!» (pàgina 10).

De fet, la resolució del problema només exigeix conèixer el pes específic dels elements implicats (pàgina 15) —però, com ja hem dit abans, aquest

[*Demostració*.] Si abandonem un cos més pesant que aquest en un líquid,
descendeix fins arribar al fons de tot,
perquè[, per hipòtesi,] les parts del líquid que són sota seu suporten una pressió més gran que les contigües. ♠
Volem demostrar que:

a) El cos és més lleuger.[1392]

b) I ho és de la manera descrita.

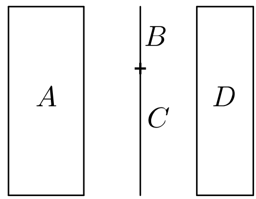


FIGURA CFI 7

Considerem que el pes del cos A,
més pesant que el líquid (del mateix volum),
equival a B i C junts,
i que B és el pes del líquid que té el volum del cos A.

a i *b*) Hem de veure que el cos A, submergit en el líquid,
té un pes igual al de C.

Per veure-ho, prenem un altre cos D del mateix volum que B i més lleuger que el líquid,
de manera que el pes del líquid del mateix volum que D és igual al de B i C junts.

Aleshores, tenim que el pes de la magnitud composta d'aquests dos valors, A i D junts, és el mateix que el del líquid
(contingut en un volum igual als volums de A i D junts)
ja que el pes de la suma d'aquestes dues magnituds és igual a la suma dels pesos de B i C junts més el de B.

D'altra banda, el pes d'una part de líquid amb un volum igual a la suma dels dos volums A i D
és igual a la suma dels pesos corresponents B i C junts més B.

Per tant, si col·loquem aquestes magnituds en el líquid,
no es mouen ni cap amunt ni cap avall,
ja que la magnitud A, que és més pesant que aquest, és empesa per

és un concepte que Arquimedes no introdueix—, ja que, si $P_{\mathrm{c}}, P_{\mathrm{o}}$ i P_{p} designen els pesos de la corona i de les seves parts d'or i de plom, i $V_{\mathrm{c}}, V_{\mathrm{o}}$ i V_{p}, els volums d'aigua desplaçada, aquests pesos són els mateixos i, un cop constatat que $V_{\mathrm{o}} < V_{\mathrm{p}} < V_{\mathrm{c}}$, tenim les igualtats següents: $\frac{P_{\mathrm{o}}}{V_{\mathrm{c}}-V_{\mathrm{p}}} = \frac{P_{\mathrm{p}}}{V_{\mathrm{c}}-V_{\mathrm{o}}} = \frac{P_{\mathrm{c}}}{V_{\mathrm{p}}-V_{\mathrm{o}}}$.

1392. En el sentit que són empesos cap amunt.

la magnitud D cap avall i, alhora, cap amunt amb la mateixa força.

Però la magnitud D, més lleugera que el líquid, és empesa cap amunt amb una força igual a C

perquè hem establert que un cos més lleuger que el líquid és impel·lit cap amunt amb una força igual al pes del líquid que desplaça. [CFI 6]

I una part de líquid amb un volum igual al de D pesa més que D i l'excés de pes és C.

Per tant, el cos A és pressionat cap avall amb un pes igual a C.

♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.9.1*e* Dos «elements» de CFII

Després d'enunciar el postulat 2 (pàgina 488), Arquimedes estableix dues proposicions que són elements de CFII.

B.9.1*e*$_1$ [CFI 8] *Si posem un cos que té la forma d'un segment esfèric en un líquid més lleuger que aquest sense que toqui la base, s'hi colloca dret amb l'eix en posició vertical. I, si alguna causa l'inclina i fa que la toqui, no es manté en aquesta posició, sinó que es balanceja i el seu eix retorna a la verticalitat.*

Considerem una magnitud com la que acabem de descriure dipositada en un líquid.

Tirem el pla que passa per l'eix del segment i pel centre de la Terra.

Siguin $\widehat{ABCD}$ la secció de la superfície del líquid,

$\widehat{EFCH}$ la de la superfície del segment esfèric

i FH l'eix d'aquest segment.

El centre de l'esfera es troba en el segment esfèric.

a) Suposem que el segment esfèric és més gran que mitja esfera,

que el centre és el punt K

i que una força o aquest mateix fa inclinar l'eix.

Volem demostrar que el segment no roman en aquesta posició[1393] i que el seu eix FT retorna a la vertical.[1394]

1393. És a dir, es queda quiet.

1394. Hipòtesi de l'absurd.

[*Demostració.*][1395] Si el segment esfèric està inclinat,
els punts F i T no es troben en la mateixa vertical.

Considerem el segment KL, sent L el centre de la Terra.[1396] [P 1]

La figura tallada per la superfície del líquid
té l'eix en el segment KL
perquè, quan dues superfícies esfèriques es tallen,
la secció resultant és un cercle perpendicular al segment que uneix els centres.[1397]

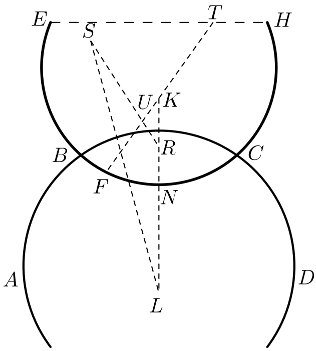


FIGURA CFI 8

D'això en resulta que el centre de gravetat de la figura, tallada per l'arc $\widehat{BNC}$, es troba en el segment KL.

Sigui R aquest centre.

I suposem que el centre de gravetat de tot el segment esfèric $\widehat{THFE}$ es troba en el segment TF.

Sigui U aquest altre centre.

El centre de gravetat de la figura que està fora de la superfície del líquid es troba en el segment PU,
prolongat i tallat pel SU.

Per tant, la raó d'aquest segment i UR és la mateixa que la dels pesos del segment esfèric d'arc $\widehat{BNC}$
i el segment exterior al líquid, com hem establert. [EPI 8]

Sigui S el centre de gravetat d'aquesta figura.

Com que el pes de la figura situada fora del líquid és empès cap avall [pel seu pes] seguint el segment LS
i la situada dins el líquid és empesa cap amunt seguint el segment RK, [CFI, postulat 2]

1395. Aquesta demostració és de Commandino. La d'Arquimedes no ens ha arribat.

1396. És a dir, KL és la vertical que passa pel punt K.

1397. Arquimedes ho accepta sense demostració. La demostració, basada en els *Elements* d'Euclides, ha de recórrer a EI 8, 4 i 13, EII 9 i EXI 14. Problema 67 (pàgina 176).

Tampoc no la trobem en *Esfèriques* de Teodosi de Trípoli [PLA (en premsa e)].

és evident que la figura no es manté immòbil,
sinó que les parts situades a la banda del punt E són empeses cap avall
i les situades a la banda del H cap amunt.

I ho són contínuament fins que el segment TF no es troba damunt la vertical.

Aleshores, un cop hi és,
el centre de gravetat de la part situada en el líquid i el de l'exterior [al líquid] es troben en la mateixa vertical,
ja que són en el segment TF.

Per tant, els pesos actuen l'un en l'altre de manera oposada seguint la mateixa vertical,
l'un cap amunt i l'altre cap avall.

La figura resta, doncs, immòbil
perquè cap pes no la desplaça. ♠

b) I el mateix s'esdevé tant si el segment esfèric és una semiesfera com si és més petit que mitja esfera. ♠

B.9.1*e*$_2$ [CFI 9] *Si en un líquid col·loquem un segment esfèric més lleuger que aquest amb la base en el líquid, aquest segment es col·loca amb l'eix en posició vertical.*

Col·loquem un cos com el que hem esmentat[1398] en un líquid.

Considerem el pla que passa per l'eix del segment esfèric i pel centre de la Terra.

Siguin les seccions de la superfície del líquid i de la superfície del segment esfèric els arcs $\widehat{ABCD}$ i $\widehat{EFH}$,
un segment EH la secció de la figura i FT l'eix del segment.

Suposem que FT no té la posició vertical.[1399]

Volem mostrar que el segment no romandrà en repòs
i que el seu eix retornarà a aquesta posició vertical.

[*Demostració*.][1400] El centre de gravetat del segment esfèric és en el segment FT.

1398. En la proposició CFI 8.

1399. Hipòtesi de l'absurd.

1400. Aquesta demostració és de Commandino. La d'Arquimedes no ens ha arribat.

Suposem que aquest segment esfèric és més gran que mitja esfera.

Sigui K el seu centre.

Tirem el segment que uneix el punt KL i el centre de la Terra, L. [P 1][1401]

La figura exterior tallada per la superfície té l'eix en el segment que passa pel punt K[1402]

i, per les mateixes raons que abans, [CFI 8]

el seu centre de gravetat es troba en el segment NK.

Sigui R el seu centre.

El centre de gravetat del segment sencer està situat en el segment FT, entre els punts K i F.

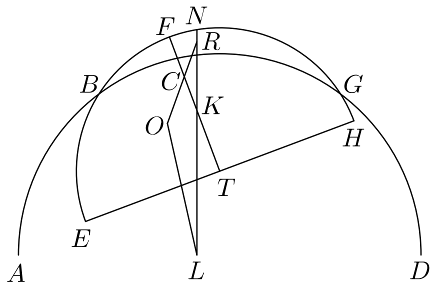


FIGURA CFI 9

Sigui C aquest centre.

Per tant, el centre de gravetat de la figura que resta submergida en el líquid

es troba en la prolongació del segment CR

tallat per un segment que és a CR com el pes del segment situat fora del líquid al del segment situat dins. [EPI 8]

Sigui O el centre de la figura que acabem d'esmentar

i OL el segment vertical que passa per O.

Aleshores, el pes del segment que sobresurt del líquid és empès cap avall seguint el segment RL,

mentre que el de la figura submergida ho és cap amunt seguint el segment OL. [CFI, postulat 2]

Per conseqüent, la figura es mou

i les seves parts de la banda de H es desplacen cap avall,

mentre que les situades al costat de E ho fan cap amunt.

I això és així fins que el segment TF es col·loca en situació vertical.

♠

1401. És la vertical que passa pel punt K.

1402. De fet, el té en la vertical pel punt K.

B.9.2 Tres proposicions de CFII

El llibre CFII, que té com a objectiu diverses situacions d'equilibri d'un paraboloide submergit en un líquid, consta de deu proposicions. Vegem-ne un tast.

B.9.2*a* Un «element» de les nou proposicions de CFII

[CFII 1] *Si en un líquid col·loquem un cos més lleuger que aquest, la raó* [*en pes*] *del cos i del líquid*[1403] *és la mateixa* [*en volum*] *que la de la part submergida i el cos.*

En el líquid col·loquem un cos sòlid qualsevol FA més lleuger que aquest.

Siguin A la part submergida i F la que sobresurt.

Volem demostrar que el pes del cos FA és al del líquid [d'igual volum] com A a FA [en volum].

[*Demostració.*] Considerem un volum NI de líquid igual al de FA,

de manera que el de N ho sigui al de F i el de I al de A.

D'altra banda, siguin

B el pes de FA, RO el de NI i R el de I.

Aleshores, FA és a NI com B a RO. [EV 11]

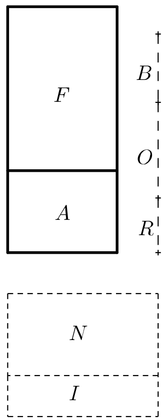


FIGURA CFII 1

Però, atès que el cos FA, col·locat en el líquid, és més lleuger que aquest,

és clar que el volum de la part submergida del cos pesa el mateix que FA, com ja hem vist. [CFI 5]

Per tant, els pesos B i R són equivalents,

ja que el primer és el del cos FA i el segon el del líquid I.

I el volum l'hem agafat equivalent al de la part submergida A.

Així doncs, el pes del cos FA és al de NI com R a RO.

Per tant, les raons que hi ha entre I i NI i entre A i FA

són iguals a la que hi ha entre R i RO.

1403. El text diu solament ποτὶ τὸ ὑγρόν, és a dir, 'la raó amb el líquid'. Cal entendre «la raó amb un volum igual de líquid».

I això és el que volíem demostrar.[1404] ♠

B.9.2*b* Les proposicions CFII 2 i 8

La primera de les nou proposicions d'equilibri del paraboloide [CFII 2] explicita condicions suficients per tal que es redreci; la setena, en canvi, perquè es mantingui inclinat [CFII 8].

B.9.2*b*$_1$ [CFII 2] *Si en un líquid col·loquem, inclinat, un segment de paraboloide recte*[1405] *i rectangle,*[1406] *amb un eix que no supera la meitat del paràmetre*[1407] *i una densitat arbitrària respecte a la del líquid,*[1408] *no es manté inclinat, sinó que es redreça. I, a més, afirmo que el segment parabòlic es posa dret quan el pla que el determina és paral·lel a la superfície del líquid.*

Considerem un segment de paraboloide recte com el que acabem d'esmentar.

Suposem que està inclinat.

Volem demostrar que no es manté així, sinó que es col·loca vertical.

[*Demostració.*] Tirem un pla perpendicular a la superfície del líquid.[1409] [EXI 18]

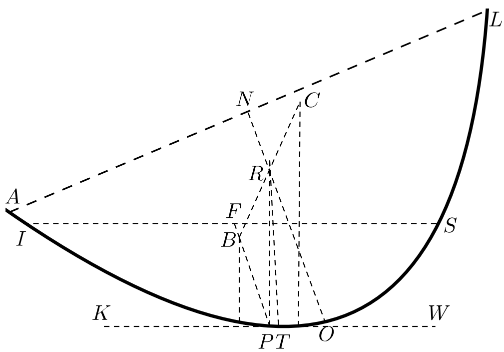


FIGURA CFII 2

1404. Ras i curt, de les dades, en resulta que $\frac{AF}{NI} = \frac{B}{RO}$. I, de CFI 5, que $B = R$. Per tant, $\frac{AF}{NI} = \frac{R}{RO}$. O sigui, tenim també que $\frac{A}{AF} = \frac{I}{NI}$ i $\frac{I}{NI} = \frac{R}{RO}$. En definitiva, $\frac{AF}{NI} = \frac{A}{FA}$.

1405. La base és perpendicular a l'eix.

1406. Diu: τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος. És a dir, 'l'obtenim tallant un con rectangle'. Vegeu la introducció de CE.

1407. En grec: *τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος*.

1408. Malgrat la generalitat de l'enunciat, la demostració es limita al cas en el qual el sòlid és més lleuger que el líquid.

1409. Recordem que, en aquest llibre, a diferència de l'anterior, la superfície del líquid és plana.

El pla talla el segment de paraboloide segons la paràbola $\smile APOL$. [CE 11]

Siguin ON l'eix del segment i el diàmetre de la paràbola,
i IS la secció de la superfície del líquid.

Aleshores, atès que el segment de paraboloide no és vertical,
els segments AL i IS no són paral·lels.

Per tant, NP no és perpendicular al segment IS. [Exi 8]

Tracem un segment KW paral·lel a IS
i tangent a la paràbola pel punt P. [QP 1 i Ei 31]

Per aquest punt, tirem el segment PF paral·lel a NO.[1410]

El segment PF divideix el IS en dues parts iguals. [QP 1]

Dividim PF de manera que PB és el doble de BF, [Evi 10]
i NO pel punt R, de manera que OR és el doble de RN. [Evi 10]

Aleshores, el punt R és el centre de gravetat del segment més gran del sòlid
i B el del segment determinat per l'arc $\widehat{IPOS}$
ja que en *Sobre l'equilibri de les figures planes* hem vist que qualsevol centre de gravetat de qualsevol segment parabòlic es troba en l'eix
i el divideix de manera que el segment de l'eix del costat del vèrtex és doble que l'altra part.[1411]

Si sostraiem el segment paraboloide que correspon a l'arc $\widehat{IPOS}$ del segment de paraboloide sencer,
el centre de gravetat del romanent es troba en el segment BC
perquè en *Elements de mecànica* hem vist que, si d'una magnitud en sostraiem una altra amb un centre de gravetat diferent,
el centre de gravetat de la magnitud romanent es troba en [la prolongació d]el segment que uneix els centres de gravetat de la magnitud sencera i de l'extreta
i en el costat que té el centre de gravetat de la magnitud sencera.

[De fet, Arquimedes es refereix a EPi 8]

Prolonguem, doncs, BR cap a C.

1410. A partir d'aquest moment, només disposem de la versió de Commandino.

1411. Però, en aquesta monografia, no es diu res del centre de gravetat dels paraboloides de revolució. Eecke (1960), vol. ii, nota 1, p. 424.

Sigui C el centre de gravetat de la magnitud romanent.

Aleshores, NO val una vegada i mitja OR
i no sobrepassa el paràmetre.[1412]

De tot això es dedueix que PR forma angles diferents amb el segment KW
i que l'angle que formen RP i PW és agut.[1413]

Per tant, el segment perpendicular a PW per R cau entre P i W.

Sigui PT aquest segment.

Aleshores, el segment RT és perpendicular al pla[1414]
en el qual es troba el segment SI situat en la superfície del líquid.

Ara, pels punts B i C, tirem segments paral·lels a RT. [EI 31]

D'una banda, la part de la magnitud situada fora del líquid és empesa cap avall segons la vertical que passa per C,
ja que hem suposat que tots els pesos són pressionats cap avall segons la vertical que passa pel centre. [CFI, postulat 2]

D'altra banda, la magnitud situada en el líquid,
com que és menys densa que aquest,
és empesa cap amunt segons la vertical que passa pel punt B.

Per consegüent, atès que aquestes magnituds no es pressionen entre si en sentit contrari segons la mateixa vertical,
la figura no es troba en equilibri,
sinó que les seves parts situades a la banda de A són empeses cap amunt
i les de la banda de L cap avall.

I això és així de manera contínua fins que s'arrengleren. ♠

B.9.2b_2 [CFII 8] *Considerem un segment de paraboloide en un líquid amb una base que no el toca. Suposem que té l'eix més gran que tres vegades la meitat del paràmetre però més petit del que hauria de ser*

1412. En un segment de paraboloide, el centre de gravetat R està situat de manera que $NO = \frac{3}{2}\,OR$. I, per hipòtesi, $NO \leq \frac{3}{2}\,p$. Per tant, $OR \leq p$.

1413. Si tirem la normal pel punt P, la subnormal és constant i igual a p. Però OR no supera el paràmetre. Per tant, la normal per P talla ON en un punt entre R i N i el segment PR —més petit que la normal— determina amb el segment PW un angle més petit que el que formen la normal i PW. En definitiva, l'angle $\widehat{RPW}$ és agut.

1414. El text és fosc.

per tenir amb el paràmetre la raó de quinze a quatre. I que la raó del pes del segment i d'un volum igual al líquid és més petita que la que hi ha entre el quadrat de l'excés de l'eix sobre tres vegades la meitat del paràmetre i el quadrat de l'eix. Aleshores, no es redreça fins a la vertical, sinó que es manté inclinat en la posició en la qual l'eix forma amb la superfície del líquid un angle igual al que explicitem tot seguit.[1415]

Examinem un segment com el que acabem de descriure.

[*Construcció.*][1417]

Siguin BD i KR segments iguals a l'eix i al paràmetre, respectivament. [Ei 2 o Ei 3][1418]

Determinem el punt K de manera que BK és el doble de KD [Evi 10][1419] i [el punt T de manera que] TB és tres vegades la meitat de BR. [Evi 10][1420]

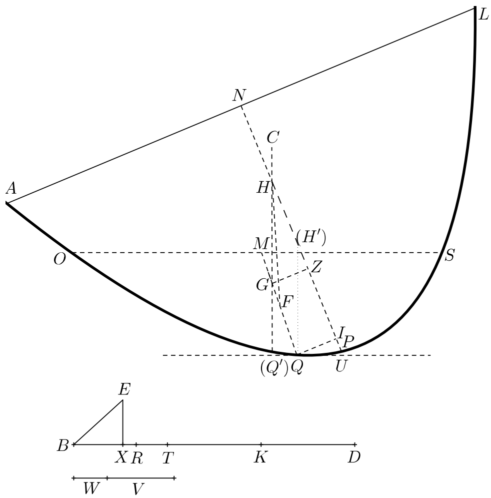


Figura CFii 8a[1416]

1415. Val la pena observar la capacitat analítica i sintètica d'Arquimedes. Hem intentat posar-la de manifest en les notes.

L'anàlisi la trobem en les hipòtesis de la proposició. Si e i p designen l'eix i el paràmetre, imposa: $a)$ $e > \frac{3}{2}\,p$, $b)$ $\frac{e}{p} < \frac{15}{4}$ i $c)$ $\frac{p_2}{p_1} < \frac{\left(e-\frac{3}{2}\,p\right)^2}{e^2}$, en què p_2 és el pes del segment de paraboloide i p_1 el del mateix volum de líquid.

1416. Hem afegit el punt (H') i el segment $Q(H')$ perpendicular a QU. Serà útil en la nota 1448 (pàgina 510). Aleshores $H'Q$, que és la subnormal, és igual a p i, per tant, a HZ.

1417. Ara construïm l'angle.

1418. Fem $BD = e$ i $KR = p$. Per tant, per la hipòtesi 1, $BD > \frac{3}{2}\,RK$.

1419. $BK = 2\,KD$. O sigui, $e = 3\,KD$ i $KD = \frac{1}{3}\,e$. Però $KR = p < \frac{2}{3}\,BD = \frac{2}{3}\,e$.

1420. O sigui, $TB = \frac{3}{2}\,BR$.

Aleshores, TD ho és de KR.[1421] ♣

Suposem que la raó que hi ha entre el pes del segment de paraboloide i el del mateix volum de líquid és la que hi ha entre el quadrat dels segments V i W junts i el quadrat de[l segment] DB,
en què hem agafat V doble de W. [P 3 o Evi 10][1422]

Per tant, la raó que hi ha entre V i W junts i DB és més petita que la que hi ha entre TB i BD.[1423]

Però TB és l'excés de l'eix sobre una vegada i mitja el paràmetre.[1424]

En conseqüència, V i W junts són més curts que BT.[1425]

I, de retruc, V ho és més que BR.[1426]

Considerem el segment RX igual a V. [Ei 2 o 3][1427] ♣

Ara tirem XE perpendicular a BD, [Ei 12]
sent el quadrat de costat XE equivalent a la meitat del rectangle de costats KR i BX.[1428] [Evi 17]

Unim BE.[1429] [P 1] ♣

1421. Això és així perquè $TD = BB - TB = BK + KD - TB = BK + \frac{1}{2}\,BK - \left(BR + \frac{1}{2}\,BR\right) = BK - BR + \frac{1}{2}\,(BK - BR) = KR + \frac{1}{2}\,KR = \frac{3}{2}\,KR = \frac{3}{2}\,p$.

1422. Considerem dos segments V i W, amb $V = 2\,W$, de manera que $\frac{p_2}{p_1} = \frac{(V+W)^2}{DB^2}$.

1423. En efecte, per la hipòtesi 3 i la nota 1421, $\frac{p_2}{p_1} < \frac{\left(BD - \frac{3}{2}\,KR\right)^2}{BD^2} = \frac{(BD-TD)^2}{BD^2} = \frac{TD^2}{BD^2}$. Però, per la nota 1422, $\frac{p_2}{p_1} = \frac{(V+W)^2}{DB^2}$. I, per substitució d'iguals, $\frac{(V+W)^2}{BD^2} < \frac{TB^2}{BD^2}$. I, per Ev 8, $(V + W)^2 < TB^2$. Per això, $W + V < TB$. Pla (2018), problema 52, f_3, p. 67.

Hem lligat TB amb $V + W$, construït de manera aparentment independent.

1424. Segons la nota 1421, $TD = DB - TB = \frac{3}{2}\,RK$. O sigui, $TB = DB - \frac{3}{2}\,RK$ i, per tant [nota 1418], $TB = e - \frac{3}{2}\,p$.

1425. Efectivament, $\frac{3}{2}\,V = 3\,W = V + W < TB = \frac{3}{2}\,BR$ [nota 1423].

1426. És immediat.

1427. El punt X cau dins el segment BT (nota 1426).

1428. O sigui, $XE^2 = \frac{1}{2}\,KR \times BX = \frac{1}{2}\,e \times BX$.

1429. Hem construït l'angle que busquem, $\widehat{EBX}$. És un angle agut del triangle rectangle $\triangle\,EBX$.

Hem trobat l'angle $\hat{\theta}$ que resol l'equació trigonomètrica: $\frac{1}{2}\,p\,\cot\theta = \frac{2}{3}\,e - (p + V)$. En efecte, $\cot^2\theta = \frac{BX^2}{EX^2} = \frac{BX^2}{\frac{1}{2}\,KR \times BX} = 2\,\frac{BX}{KR} = 2\,\frac{BR-RX}{KR}$

Volem demostrar que, si abandonem un segment de paraboloide en un líquid en les condicions descrites,
s'inclina fins que l'eix forma amb el líquid un angle igual al $\widehat{EBX}$.
[*Demostració.*] Abandonem el segment de paraboloide en el líquid sense que la base en toqui la superfície.

Suposem que l'eix no forma amb la superfície del líquid[1430]
l'angle de vèrtex B que hem descrit més amunt.[1431]

Tallem el segment de paraboloide amb un pla que passa per l'eix i és perpendicular a la superfície del líquid. [Exi 8]

Siguin $\smile AQPL$ [la paràbola], [CE 11]
[el segment] OS la secció que [el pla] determina en el segment de paraboloide i en la superfície del líquid,
i NP l'eix del segment de paraboloide i el diàmetre de la paràbola.

Tirem [el segment] QU, paral·lel a OS i tangent a aquesta. [Ei 31 i QP 1]

Aquest segment toca la paràbola pel [punt] Q.

Per aquest punt, tirem QM paral·lel a NP, [Ei 31]
i QI perpendicular a NP. [Ei 12]

Considerem els segments PZ i ZH iguals a BR i RK, respectivament.[1432] [Ei 2 o Ei 3]

Finalment, pel punt Z, tracem ZG perpendicular a l'eix NP. [Ei 12]
Suposem que l'eix forma amb la superfície del líquid un angle més gran que l'angle de vèrtex [el punt] B.[1433]

És evident que l'angle de vèrtex U del triangle $\triangle QIU$ és més gran que el de vèrtex B.[1434]

Per tant, la raó que hi ha entre el quadrat de QI i el de IU

$= 2\,\frac{BR-V}{KR} = 2\,\frac{BR-V}{p} = 2\,\frac{\frac{2}{3}TB-V}{p}$. O sigui, $\frac{1}{2}\,p\cot^2\theta = \frac{2}{3}\,TB - V = \frac{2}{3}\,(BD - TD) - V = \frac{2}{3}\left(BD - \frac{3}{2}\,RK\right) = \frac{2}{3}\,e - p - V$.

1430. Recordem que, en aquest llibre, la superfície del líquid és plana i no esfèrica.

1431. Hipòtesi de l'absurd.

1432. Recordem que RK és igual al paràmetre p.

1433. Disjunció de casos.

1434. Siguin $\theta := \widehat{EBX}$ l'angle de vèrtex B, α l'angle que l'eix NP forma amb la superfície OS del líquid i $\beta = \widehat{IUQ}$. Aleshores, [Ei 29] $\alpha = \beta$ i $\alpha > \theta$. Per tant, $\beta > \theta$.

és més gran que la que hi ha entre el quadrat de EX i el de XB.[1435]

Però el quadrat de QI és al de IU com [el segment] KR a [el] UI. [EVI 4 i CI 11][1436]

Així doncs, el quadrat de QI al de IU com KR a UI,
i el de EX és al de XB com la meitat de KR a XB.[1437]

I, en conseqüència, la raó que hi ha entre KR i UI és més gran que la meitat de la de KR i BX[1438]
i, de retruc, UI és més petit que dues vegades XB. [DV 7 i EV 15][1439]

Però dues vegades IP és IU. [QP 2]

Per tant, PI és més petit que XB.[1440]

I d'això en resulta que IZ és més gran que XR.[1441]

Però MR és igual a V.

Per tant, IZ és més gran que V. [per substitució]

I, com que hem suposat que el segment del paraboloide és al [mateix volum de] líquid com el quadrat de W i V junts al de BD,
aquest segment és al líquid com la part immersa en aquest a tot el segment. [CFII 1][1442]

D'altra banda, la part immersa és a tot el cos com el quadrat de QM al de PN,
i el quadrat de W i V junts és al de BD com el de MQ al de PN.

1435. Aquí Arquimedes usa la desigualtat trigonomètrica, «si $\theta < \alpha < \frac{\pi}{2}, \tan^2\theta < \tan^2\alpha$». I $\tan\theta = \frac{EX}{XB}$, $\tan\beta = \frac{QI}{IU}$ i $\alpha = \beta$ impliquen $\tan\alpha = \tan\beta$. I, de retruc, $\frac{EX^2}{XB^2} < \frac{QI^2}{IU^2}$.

1436. Tenim, òbviament, que $\frac{QI}{IU} = \frac{HZ}{QI}$, ja que els triangles $\triangle HGZ$ i $\triangle IUP$ són semblants [EVI 4]. Per tant, [EVI 17] $QI \times QI = IU \times HZ$. De retruc, $\frac{QI^2}{IU^2} = \frac{IU \times HZ}{IU \times IU}$. O sigui, [EVI 1] $\frac{QI^2}{IU^2} = \frac{HZ}{IU} = \frac{KR}{IU}$ [per EV 7], ja que $HZ = KR$.

1437. Vegeu la nota 1428 i el raonament de la 1436: $XE^2 = \frac{1}{2}KR \times BX$. D'on se segueix que: $\frac{XE^2}{BX^2} = \frac{\frac{1}{2}KR \times BX}{BX^2} = \frac{\frac{1}{2}KR}{BX}$.

1438. Ja que $\frac{KR}{BX} = \frac{QI^2}{IU^2} > \frac{EX^2}{BX^2} = \frac{1}{2}\frac{KR}{BX} = \frac{KR}{\frac{1}{2}XB}$.

1439. O sigui, $IU < 2\,XB$.

1440. És immediat. Per la nota 1439, $IU < 2\,XB$. I $IU = 2\,PI$. Per tant, $2\,PI < 2\,XB$, cosa que implica que $PI < XB$ [EV 15].

1441. Per la nota 1440, $PI < XB$. I sabem que $PZ = BR$; per tant, $PZ - PI > BR - XB$. O sigui, $IZ > XR (= V)$ [per construcció].

1442. $\frac{p_2}{p_1} = \frac{(W+v)^2}{BD^2} = \frac{p_{\text{part immersa del segment}}}{p_2}$.

En definitiva, V i W junts són iguals a QM.[1443]

Però hem vist que QG és més gran que V.[1444]

Per tant, QM és més petit que una vegada i mitja QG.[1445]

Fem QF igual a dues vegades GM. [EI 2 o EI 3]

Aleshores, H és el centre de gravetat del sòlid,
mentre que F ho és de la part submergida.

Per conseqüent, el centre de gravetat de la part residual del segment de paraboloide[1446]
es troba en la prolongació del segment que uneix F i H. [EPI 8]

Sigui C aquest segment.

De manera anàloga a l'anterior,[1447] demostrem que
el segment HG és perpendicular a la superfície del líquid,[1448]
la part submergida del segment de paraboloide és empesa cap amunt en la direcció de la perpendicular pel punt F a la superfície del líquid i la que es troba fora del líquid ho és cap avall en la direcció de la perpendicular [a la superfície del líquid] pel punt C.

Per tant, el segment de paraboloide no roman en equilibri quan l'eix està inclinat un angle com el que hem suposat [en la hipòtesi de l'absurd].[1449] ♠

Però tampoc no es redreça.

Això és clar per les raons següents:

1443. Veiem que $\frac{(W+V)^2}{BD^2} \underset{\text{Ev 7}}{=} \frac{QM^2}{PN^2} = \frac{QM^2}{BD^2}$, ja que BD és igual a l'eix PN i, en conseqüència, els seus quadrats. Nota 1423, pàgina 507. Per tant, [Ev 7] $(V+W)^2 = QM^2$ i[, novament, per l'exercici esmentat en la nota 1423 i Nc 2,] $\frac{3}{2}V = V + W = QM$.

1444. Per la nota 1441, sabem que $QG(=IZ) > V$ [EI 33].

1445. Tenim $QM = \frac{3}{2}V$ i $QG > V$. Per tant, $QM < \frac{3}{2}QG$. O sigui, $2\,QM < 3\,QG$ i, de retruc, $2\,GM = 2\,(QM - QG) < 3\,QG - 2\,QG = QG$.

1446. És a dir, que emergeix per damunt del líquid.

1447. Fa referència a un pas de la demostració de CFII 4.

1448. Per Q, tirem la perpendicular $Q(H')$ a QU. Aleshores, $Q(H')$ és el paràmetre p [nota 1416]. Per conseqüent, els triangles $\triangle\, QH'I$ i $\triangle\, GHZ$ són iguals. Tots dos són rectangles i tenen els catets iguals [nota 1416 i EI 4]. Per tant, els segments $(H')Q$ i HG són paral·lels [EI 29], els angles $\widehat{(H')Q}U$ i $H\widehat{(Q')}U$ iguals i el segment CG, perpendicular a la tangent QU.

1449. EECKE (1960), vol. II, notes, p. 439.

De les perpendiculars a la superfície del líquid per F i C,
la que passa per F cau a la banda del punt L del segment FC,
i la que passa per C ho fa a la banda de A,
mentre que la que passa per C ho fa a la banda de A.

I, pel que hem vist abans, [CFI, postulat 2]
el centre F és empès cap amunt i el C cap avall.

De manera que la part del segment de paraboloide sencer que es troba a la banda de A és desplaçat cap avall.

I això és útil per a la demostració. ♠

Ara suposem que l'angle que forma l'eix amb la superfície del líquid és més petit que l'angle de vèrtex B.[1450]

Aleshores, la raó que hi ha entre el quadrat de QI i el de IU és més petita que la dels quadrats de EX i de XB.[1451]

I sabem que la raó que hi ha entre KR i IU també ho és més que una meitat de la de KR i XB.[1452]

I ZI és més petit que XR.[1453]

Per tant, QG ho és més que V.[1454]

Però, com hem vist, MQ és igual a W i V junts.[1455]

Conseqüentment, MQ és més gran que una vegada i mitja QG[1456]
i QG és més petit que el doble de GM.[1457]

Fem QF igual al doble de FM. [EI 2 o EI 3]

Novament, H és el centre de gravetat de tot el segment de paraboloide
i F el de la part submergida.

Unim HF [P 1]
i el prolonguem. [P 2]

1450. Hipòtesi de l'absurd. El raonament que segueix, *mutatis mutandis*, és el que hem fet en l'ítem *a*. Per tant, el lector pot refer els passos seguint les indicacions de les notes corresponents. Les hi indiquem a continuació.

1451. Això és degut al fet que els angles $\widehat{NH'M}$ i $\widehat{NUQ}$ són iguals [EI 29] i a la desigualtat trigonomètrica [nota 1435, pàgina 509].

1452. Notes 1438 i 1439, pàgina 509.

1453. Nota 1441, pàgina 509.

1454. Nota 1444, pàgina 510.

1455. Nota 1443, pàgina 510.

1456. Nota 1445, pàgina 510.

1457. Nota 1445, pàgina 510.

Sabem que el centre de gravetat de la part que sobresurt es troba en aquesta prolongació. [EPi 8]

Sigui C aquest centre de gravetat.

Pels punts F i C, tirem segments paral·lels a GH [Ei 31]
perpendiculars a la superfície del líquid.

És clar que el segment de paraboloide no es manté en equilibri, sinó que gira de manera que l'eix forma amb la superfície del líquid un angle més gran que el que ara té [segons la hipòtesi de l'absurd].

♠

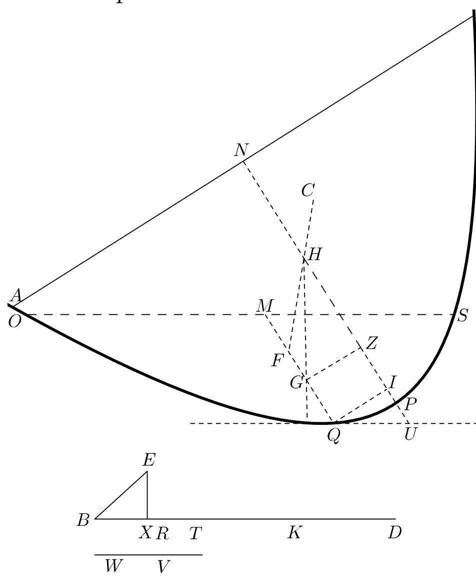


FIGURA CFii 8*b*.

Atès que el segment de paraboloide no s'equilibra
ni quan l'angle que formen l'eix i la superfície del líquid és més gran que l'angle de vèrtex B
ni quan és més petit,
ho fa, necessàriament, quan aquests dos angles coincideixen. ♠

De fet, IP és igual a XB,
ZI a XR,
i QG és el doble de GM.

Per tant, el punt G és el centre de gravetat de la part submergida en el líquid,
que és aixecada segons la vertical.

I, en canvi, la que emergeix és abaixada.

De fet, les dues parts s'oposen
i, per això, el segment de paraboloide es manté en la posició d'equilibri. ♠

B.10 Me: *Mètode*

Aquí recollim la introducció, els lemes i les proposicions 1, 2, 4, 5, 12, 13, 14, 15 i 16 de *Mètode*.[1458]

B.10*a* La introducció de Me

La introducció d'aquesta monografia explica la naturalesa i la utilitat del mètode heurístic i n'elogia les virtuts. A més, Arquimedes hi deixa ben clar que espera que aquesta manera de procedir sigui fructífera per als geòmetres del futur.[1459]

B.10*a*$_1$ [**Introducció**]

Eratòstenes, Arquimedes et saluda!

Temps enrere et vaig enviar els enunciats d'alguns teoremes que havia descobert,
i et vaig convidar a trobar les demostracions dels que no t'havia fet partícip.

Els enunciats d'aquests segons són:[1460]

[1] En un prisma recte que té com a base un paral·lelogram[1461] hi inscrivim un cilindre amb les bases als dos paral·lelograms [oposats] i els costats als altres.[1462]

Tirem un pla que passi pel centre de la base del cilindre
i per un dels costats del quadrat de la cara oposada.

1458. Consulteu-ne l'excel·lent traducció catalana de González Urbaneja i Vaqué (1997) ja esmentada.

1459. Dissortadament, aquesta influència no es va donar. L'opuscle va restar perdut durant segles. Caldrà esperar al segle XVII i l'escola galileana, formada pel mateix Galileu, Bonaventura Cavalieri i Evangelista Torricelli, entre d'altres, que, malgrat les fortes crítiques rebudes en la seva època, va donar un impuls enorme al desenvolupament del càlcul de quadratures. No és estrany que fos així perquè l'escola galileana era atomista. Tanmateix, segur que la influència arquimediana no va ser explícita.

1460. Els dos primers sòlids que descriu són originals i «cubicables».

1461. Diu: παραλληλόγραμμον, però, en aquest cas, es tracta d'un quadrat.

1462. Les quatre cares. De fet, el cilindre és tangent a les altres quatre cares del prisma.

Aquest pla talla un segment del cilindre limitat per la superfície del cilindre i dos plans:
el que hem dibuixat
i el que es troba en la base del cilindre.[1463]

La superfície cilíndrica limitada per aquests dos plans
i pel segment del cilindre que hem tallat
equival a la sisena part del prisma sencer.[1464]

[2] En un cub, hi inscrivim un cilindre amb les bases situades en els paral·lelograms oposats
i amb la superfície tangent als altres quatre plans.

Ara hi inscrivim un altre cilindre amb les bases situades en els altres paral·lelograms
i amb la superfície tangent als altres quatre plans.[1465]

Aquest sòlid —inserit en tots dos [cilindres]—[1466] equival a dues terceres parts del cub.[1467]

Aquests dos teoremes difereixen d'altres que havia descobert abans.

En aquells comparava els volums de les figures
—conoides i esferoides [de revolució],[1468] i els seus segments—[1469]
amb cons i cilindres.[1470]

Cap no equival a un sòlid limitat per cares planes.[1471]

1463. Arquimedes descriu el cos que actualment es coneix amb el nom d'*ungla cilíndrica*. Vegeu, en línia, <http://www.sbpm.be/wp-content/uploads/2014/05/Rencontre-de-cylindres.pdf> o <http://www.ams.org/notices/201509/rnoti-p1036.pdf>.

1464. Aquí estableix la cubicatura de l'ungla cilíndrica.

1465. Tenim dos cilindres que formen, inscrits en un cub, una creu. És la *volta cilíndrica*.

1466. El text diu: *δίμοιρον*.

1467. Arquimedes estableix la cubicatura de la volta cilíndrica.

1468. Els conoides els obtenim en fer giravoltar una paràbola o una hipèrbola. I els esferoides, una el·lipse. (CE, introducció, pàgines 100 i 418-423).

1469. Els aconseguim tallant els conoides i esferoides per un pla.

1470. Arquimedes fa referència als resultats del manuscrit CE enviat a Dositeu.

1471. No són cubicables.

En canvi, cada un d'aquests dos sòlids limitats per plans i superfícies cilíndrics equival a un sòlid limitat per cares planes.[1472]

Bé, doncs, t'envio les demostracions d'aquests teoremes.

Reconeixent, com dic sempre, el teu zel i el teu domini excel·lent de la filosofia,
i també que saps apreciar, quan cal, la investigació de les qüestions matemàtiques,
m'ha semblat oportú confiar-te per escrit i alhora explicar en aquest, les característiques pròpies d'un mètode amb el qual podràs abordar la investigació de certes qüestions matemàtiques mitjançant la mecànica.[1473]

Estic ben convençut de la seva utilitat en les demostracions d'aquests teoremes,
perquè alguns dels que se'm van acudir d'antuvi usant la mecànica, els vaig poder demostrar després mitjançant la geometria.

De fet, la investigació duta a terme amb aquest mètode queda lluny del que és, pròpiament, una demostració.[1474]

És més fàcil construir una demostració després d'haver adquirit un cert coneixement de l'objecte de la recerca gràcies a aquest mètode que no pas buscar-la sense tenir-ne cap domini previ.[1475]

Per això, fins i tot en el cas dels teoremes referents al con i a la piràmide,
demostrats per Èudox
—a saber, que el con és la tercera part del cilindre amb la mateixa base i altura
i la piràmide, la tercera del prisma amb la mateixa base i altura—,

1472. Són cubicables, és a dir, reduïbles a cubs.

1473. Aquí lliga amb els seus manuscrits sobre l'equilibri de figures planes i amb la primera demostració de QP.

1474. Queda ben palès que, per Arquimedes, el mètode és heurístic, és a dir, serveix per a intuir els resultats. Però no té valor apodíctic en el sentit que li dona el DIEC (1995): «Que expressa o enclou una veritat necessària.» Hi cal una demostració geomètrica, tal com ja hem vist, per exemple, en l'anàlisi de QP (pàgines 60-69).

1475. Recordem que, per a poder fer la demostració, cal conèixer la igualtat de les raons. I que, per a conèixer aquesta igualtat, primer cal intuir-la.

cal atribuir-ne un bona part del mèrit a Demòcrit, el primer que els va enunciar sense demostrar-los.[1476]

Bé, doncs, s'ha esdevingut que el descobriment dels teoremes que ara et dono a conèixer ha tingut lloc d'una manera semblant.[1477]

I he decidit redactar i fer públic aquest mètode per dues raons.

En primer lloc, perquè, havent-m'hi referit abans, no sembli que parlava per parlar.[1478]

I, en segon lloc perquè estic fermament convençut que pot convertir-se en una contribució no gens menyspreable a la investigació matemàtica.

M'atreveixo a suposar que, usant el mètode que els ofereixo ara, alguns dels meus contemporanis o successors trobaran altres teoremes que a mi encara no se m'han acudit.[1479]

Així, doncs, en primer lloc, exposo el resultat que se'm va manifestar mitjançant la mecànica. És a dir: tot segment de paràbola[1480] equival a quatre terceres parts[1481] del triangle de la mateixa base i la mateixa alçada.

Seguidament, exposo els altres resultats obtinguts amb aquest procediment.

Al final del llibre estableixo les demostracions geomètriques dels teoremes que tenen els enunciats que ja et vaig trametre fa temps.

B.10*b* Els onze lemes de Me

Seguidament, en aquest text Arquimedes proporciona onze lemes (*προλαμβανομενα*), que fan el paper d'«elements» en el sen-

---

1476. Arquimedes proporciona unes dades històriques importants en relació amb el volum del con i de la piràmide en el món grec.

1477. En clara referència a [1] i [2] (pàgines 513-514) i també a Me 1 (pàgines 518-521). Ja hem esmentat l'analogia que tenen: el darrer és quadrable i els dos primers cubicables.

1478. Al·ludeix a la introducció de la quadratura de la paràbola (text B.2a_1, pàgina 226).

1479. Nota 1459 (pàgina 513).

1480. Recordem que Arquimedes l'esmenta com «una secció d'un con rectangle» (*ὀρθογωνίου κώνου τομά*).

1481. Diu: *ἐπίτριτον*, 'una vegada i un terç'.

tit eulidià, de les proposicions que exposa. Aquí són una mena de postulats, si bé molts ja han estat demostrats a EP.

B.10*b*$_1$ [**Lemes**]

1. Si sostraiem una magnitud d'una altra i la magnitud sencera i la sostreta tenen el mateix centre de gravetat, el centre de gravetat de la [magnitud] restant també és el mateix.

2. Si sostraiem una magnitud d'una altra i la magnitud sencera i la sostreta no tenen el mateix centre de gravetat,
el centre de gravetat de la [magnitud] restant es troba en la prolongació del segment que uneix els centres de gravetat [de totes dues], i ho fa a una distància la raó de la qual amb la del segment que uneix els centres de gravetat és igual a la del pes de la magnitud treta i el de la magnitud restant.[1482]

3. Si els centres de gravetat d'un nombre qualsevol de magnituds estan alineats, el centre de gravetat de la magnitud composta també ho està.[1483]

4. El centre de gravetat d'un segment és el seu punt mitjà.[1484]

5. El centre de gravetat d'un triangle és el punt en què es tallen els segments que uneixen els vèrtexs amb els punts mitjans dels costats oposats.[1485]

6. El centre de gravetat d'un paral·lelogram és el punt en el qual es tallen les diagonals.[1486]

7. El centre de gravetat d'un cercle és el seu centre.

8. El centre de gravetat d'un cilindre és el punt mitjà del seu eix.

9. El centre de gravetat d'un prisma és el punt mitjà del seu eix.[1487]

10. El centre de gravetat d'un con es troba en l'eix [del con], en un punt que el divideix en dues parts, i la part de la banda del vèrtex és

1482. Aquest lema —que trobem a EPɪ 8— és un porisma de la llei de la balança [EPɪ 6 i 7].

1483. EPɪ 5, porisma.

1484. EPɪ 4.

1485. EPɪ 13 i 14.

1486. EPɪ 10.

1487. Aquí s'entén que l'eix és el segment que uneix els centres de gravetat de les bases.

tres vegades l'altra.[1488]

11. Usaré, finalment, la proposició [de *Sobre els conoides i els esferoides* (*Ἐν τςῶ προγεγραμμένς ω*)][1489] següent: disposem de dues sèries de magnituds amb el mateix nombre de termes. Suposem que la raó de les raons dels termes de la primera, presos de dos en dos, és la mateixa que la de les raons de la segona, presos de dos en dos. I que, a més, la raó entre alguna o algunes magnituds de la primera sèrie i unes altres magnituds és la mateixa que la que hi ha entre les magnituds de la segona sèrie i unes altres magnituds. Aleshores, la raó de la suma de les primeres i la suma de les que hem indicat és igual a la de la suma de les segones amb les seves corresponents.[1490]

B.10*c* Les proposicions Me 1, 2, 4 i 5

D'antuvi, presentem quatre proposicions que posen de manifest el mètode arquimedià amb claredat. Són Me 1, 2, 4 i 5.

B.10c_1 [Me 1. L'àrea d'un segment de paràbola] *Considerem el segment [parabòlic] ABC limitat pel segment AC i per l'arc de paràbola AC.*[1491] *Dimidiem el segment AC pel punt D. Tirem el segment DEB paral·lel al diàmetre. Unim AB i BC. Afirmo que el segment [de paràbola] ABC equival a quatre terceres parts del triangle $\triangle ABC$.*[1492]

1488. No esmenta el centre de gravetat d'una piràmide. La demostració dels lemes 7, 8, 9 i 10 no és en cap de les monografies d'Arquimedes que han perviscut. Això avala la suposició que podria haver escrit un altre tractat sobre aquesta qüestió.

1489. CE 1.

1490. És un text de lectura difícil. Formalment, diu: considerem dues sèries $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}, \mathfrak{A}_n; \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}, \mathfrak{B}_n$ amb $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}_{i+1}} = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{B}_{i+1}}, i = 1, 2, \ldots, n-1$. I posem esment en, per exemple, les parelles de sèries: $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n; \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$ i $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n; \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n$, de manera que $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2} = \cdots = \frac{\mathfrak{A}_n}{\mathfrak{C}_n} = m$ i $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{D}_2} = \cdots = \frac{\mathfrak{B}_n}{\mathfrak{D}_n} = m$. Aleshores, $\frac{\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_n}{\mathfrak{C}_1 + \cdots + \mathfrak{C}_n} = \frac{\mathfrak{B}_1 + \cdots + \mathfrak{B}_n}{\mathfrak{D}_1 + \cdots + \mathfrak{D}_n}$.

1491. Recordem que Arquimedes s'hi refereix com: «la secció d'un con rectangle».

1492. Com ja hem esmentat abans, demostra que qualsevol segment de paràbola és quadrable.

[*Construcció.*] Pels punts A i C, tirem el segment AF paral·lel a DE, [EI 31]
i el CF tangent al segment [parabòlic]. [QP 2][1493]

Prolonguem el segment CB fins al punt K [P 2]
i agafem KH igual a CK. [EI 2 o EI 3]

Imaginem la balança CH amb el fulcre en el punt mitjà K.

Prenem el segment MO paral·lel al ED. ♣

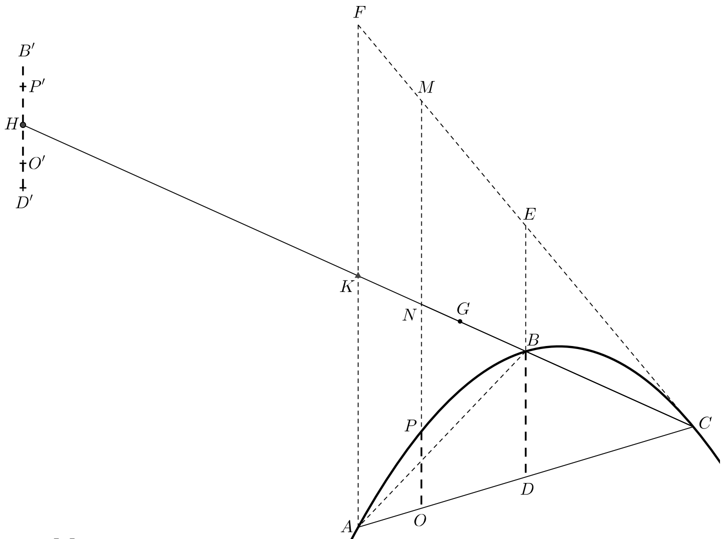


FIGURA Me 1

[*Demostració.*] Atès que $\smile ABC$ és una paràbola (*παραβολή*)[1494]
i CF la tangent [pel vèrtex B], EB i BD són iguals.

Això ja s'havia establert en els *Elements*. [QP 2][1495]

I, com que FA i MO són [segments] paral·lels a ED,
els segments MN i NO són iguals i els FK i KA, també. [EVI 4]

1493. De fet, s'ha d'usar el recíproc del que s'hi diu.

1494. Un terme interposat.

1495. En referir-se als *Elements*, pensa en una obra d'elements de les còniques, com podrien ser les d'Aristeu el Vell o d'Euclides, que Pappos ressenya en el «Tresor de la matemàtica», capítol setè de la *Col·lecció matemàtica*. Vegeu el capítol tercer de LORIA (1893-1985). La demostració la trobem, tanmateix, a CII 2 de les *Còniques* d'Apol·loni. Recordem que així és com ens referim a les proposicions d'aquesta obra magna.

I, ja que CA és a AO com MO a OP [QP 5]
i com CKO a KN. [EVI 4][1496]

A més, CK i KH són iguals, [per construcció]
resulta que HK és a KN com MO a OP.

Ara bé, el punt N és el centre de gravetat del segment MO,
ja que MN i NO són iguals. [lema 4]

Per tant, si col·loquem $O'P'$, igual a OP, en el punt H
de manera que en sigui el centre de gravetat,
és a dir, de manera que $O'H$ i $P'H$ siguin iguals,[1497]
aleshores els segments $O'HP'$ i OP s'equilibren
perquè el HN està dividit [pel punt K] en braços inversament proporcionals als pesos $O'P'$ i MO. [EPI 6 i 7]

En conseqüència, el punt K és el centre de gravetat del sistema format pels dos pesos. [lema 3]

De manera anàloga, si tirem el segment paral·lel al ED del triangle $\triangle FAC$,
tindrem una situació d'equilibri
sempre que mantinguem [el segment DE] al seu lloc
i transportem [la part d]el segment que és dins del segment parabòlic al punt H.

I, aleshores, el punt K és el centre de gravetat del sistema.[1498]

Ara bé, el triangle $\triangle FAC$ consta dels segments que hi hem anat considerant
i el segment parabòlic ◁ ABC dels segments anàlegs al OP.

Però tot el triangle $\triangle FAC$, situat al seu lloc, s'ha d'equilibrar, amb fulcre en el punt K
i el segment de paràbola situat en el centre de gravetat H,
de manera que el centre de gravetat del sistema format per les dues magnituds sigui el punt K.

Ara, en el segment CK hi considerem el punt G, sent CK tres vegades KG. [EVI 9]

1496. Els triangles $\triangle ACK$ i $\triangle OCN$ són semblants.

1497. El col·loquem paral·lel a OP.

1498. En aquests dos casos, Arquimedes posa de manifest la relació necessària per a poder aplicar el mètode: $O'P' \times GK = OM \times NK$, és a dir, la identitat del mètode.

Veiem que el punt G és el centre de gravetat del triangle $\triangle FAC$, tal com hem establert a *Sobre l'equilibri de les figures planes.*[1499]

Per tant, el triangle $\triangle FAC$, col·locat en el seu centre de gravetat G,
equilibra el segment parabòlic ⌓ ABC, col·locat en el punt H,
si considerem que el punt K n'és el fulcre.

Però el punt G, com dèiem, és el centre de gravetat del triangle $\triangle FAC$.

Per conseqüent, aquest triangle [considerat tot aquest en el punt G] equilibra el segment parabòlic en el punt H.

És a dir, el triangle $\triangle FAC$ és al segment parabòlic ⌓ ABC com HK a KG. [EPI 6 i 7]

Per tant, el triangle $\triangle FAC$ equival a tres vegades aquest segment.

Ara bé, aquest triangle equival també a quatre vegades el $\triangle ABC$, ja que els segments FK i KA són iguals i els AD i DC, també. [EVI 1][1500]

En definitiva, el segment parabòlic ⌓ ABC equival a quatre terceres parts del triangle $\triangle FAC$. ♠

De fet, amb el que acabem d'exposar, no hem pas demostrat la proposició però hem ofert una idea sobre la validesa del resultat.[1501] En definitiva, com que no està ben demostrada però sabem que és vertadera, presentarem la demostració geomètrica que vam trobar i vam publicar.[1502]

B.10c_2 [Me 2. El volum de l'esfera] a) *[El volum d']una esfera equival a quatre vegades el del con de base el seu cercle màxim i altura el seu radi.* b) *Un cilindre de base el cercle màxim de l'esfera i altura el seu diàmetre equival a una vegada i mitja aquesta. Això es demostra de la manera següent.*

[*Construcció.*] Considerem l'esfera de cercle màxim $\bigcirc ABCD$ [DXI 14] i els diàmetres perpendiculars AC i BD, [EI 11]

1499. EPI 14 i lema 5. El text grecc diu: «δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς».

1500. I els triangles $\triangle ACK$ i $\triangle DBC$ són semblants.

1501. Ara podem fer una conjectura.

1502. En clara referència a la monografia QP.

i el cercle de l'esfera de diàmetre BD situat en el pla perpendicular al pla del cercle $\bigcirc ABCD$. [Exi 18 i P 3]

Tenim en compte, a més, un con de base el cercle perpendicular i vèrtex el punt A. [Dxi 18, 19 i 20]

Així obtenim un cercle de diàmetre EF situat en un pla perpendicular a AC.

Ara considerem un cilindre de base aquest cercle, altura AC i arestes EL i FG. [Di 21, 22 i 23] ♣

[*Demostració.*] Prolonguem el segment CA [P 2]
i fem AH igual a CA. [Ei 2 o Ei 3]

Imaginem que CH és una balança amb el fulcre en el punt A.

Tirem el segment MN paral·lel al BD [per un punt S del segment AC]. [Ei 31]

Veiem que talla el cercle $\bigcirc ABCD$ pels punts O i P,
i el diàmetre AC i els segments AE i AF pels punts S, Q i R, respectivament.

Pel segment MN, tracem un pla perpendicular a AC. [Exi 18]

Ens adonem que determina un cercle de diàmetre MN, en el cilindre, [Di 21, 22 i 23]
i un cercle de diàmetre QR en el con AEF. [Dxi 18, 19 i 20]

El rectangle de costats AC i AS és igual al de costats MS i SQ perquè els segments de les parelles AC i SM, i AS i SQ són iguals. [Evi 4]

El rectangle de costats AC i AS equival al quadrat de costat AO [Evi 8]
i aquest quadrat és igual als quadrats de costats OS i SQ junts.[1503] [Ei 47]

Per tant, el rectangle de costats MS i SQ equival als quadrats de costats OS i SQ junts. [Nc 1][1504]

Atès que AC és a AS com MS a SQ [Evi 2]
i que AC i AH són iguals, [per construcció]

1503. Ja que $SQ = SA$.

1504. Apliquem Evi 1, i Ev 9 i 5 iterats.

resulta que AH és a AS com MS a SQ, [Ev 9]
és a dir, com el quadrat de MS al rectangle de costats MS i SQ. [Evi 1]

I, de retruc, com que el rectangle de costats MS i SQ equival als quadrats de costats MS i SQ junts,
tenim que AH és a AS com el quadrat de costat MS als quadrats de costats MS i SQ junts. [Ev 9]

I el quadrat de costat MS és als de costats OS i SQ junts com el quadrat de costat MN als de costats OP i QR junts. [Ev 11 iterat]

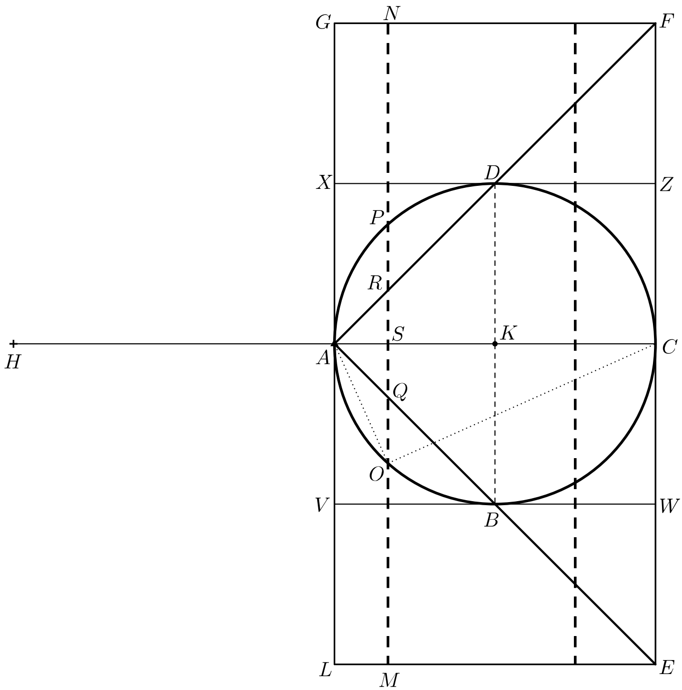


Figura Me 2

Així doncs, aquesta és la raó que hi ha entre el cercle del cilindre de diàmetre MN i la suma dels cercles
i entre el [cercle] del con de diàmetre QR i el de l'esfera de diàmetre OP. [Exii 2][1505]

1505. Aquí obtenim la identitat bàsica del mètode.

En definitiva, AH és a AS com la raó del cercle del cilindre als cercles del con i l'esfera junts.

Bé, doncs, com que AH és a AS com el cercle del cilindre, situat en el seu lloc,
als cercles de diàmetres QR i OP, traslladats al punt H,
de manera que el centre de gravetat de cadascun és, precisament, H, tots s'equilibren amb fulcre en el punt A.

De manera semblant, veiem que, si tirem una altre segment paral·lel a EF dins del cilindre LF,
i al seu damunt considerem un pla perpendicular al segment AC,
el cercle determinat en el cilindre, situat en el seu lloc, equilibra, amb fulcre en el punt A,
els dos cercles determinats pel con i l'esfera, traslladats i situats de manera que el punt H en sigui el centre de gravetat.[1506]

Per tant, si considerem el cilindre, el con i l'esfera constituïts —*συμπληρωθέντος*— per aquests cercles,
tenim que el cilindre situat en el seu lloc i amb fulcre en el punt A equilibra el con i l'esfera situats en el punt H, de manera que H n'és el centre de gravetat.

Si això és així,[1507]
AH és a AK com el cilindre al con i l'esfera junts. [EPi 6 i 7]

Ara bé,[1508] AH és el doble de AK.

Per tant, el cilindre equival a dues vegades el con i l'esfera junts.

I, com que el cilindre equival a tres cons com l'anterior, [Exii 10]
tres cons equivalen a dos cons i dues esferes.

A continuació, hi sostraiem dos cons comuns. [Nc 3]

El con que té el triangle $\triangle\, AEF$ com a secció d'un pla per l'eix equival a les dues esferes esmentades.

Però aquest també equival a vuit cons que tenen com a secció l'eix del triangle $\triangle\, ABD$
perquè el segment EF és el doble del BD. [Exii 12]

1506. Aquí Arquimedes mostra que el resultat és independent del segment MN perpendicular a AC sempre que s'hi mantingui dins.

1507. Repeteix la frase anterior.

1508. En aquest moment comencen els càlculs.

Els vuit cons equivalen, doncs, a dues esferes.

En conseqüència, l'esfera de cercle màxim $\bigcirc ABD$ ho fa a quatre vegades el con de vèrtex el punt A
i base el cercle de diàmetre BD perpendicular a AC.

Tirem el paral·lelogram $\varparallelogram LF$ pels punts B i D,
i els segments VBW i XDZ paral·lels a AC. [P 5]

Considerem el cilindre de bases els cercles de diàmetres VX i WZ
i eix el segment AC.

Doncs bé, atès que el cilindre que té com a secció per l'eix el paral·lelogram $\varparallelogram VZ$ és el doble del cilindre del que té com a secció per l'eix el paral·lelogram $\varparallelogram VD$, [EXII 14]
i essent aquest últim cilindre, segons els *Elements*, [EXII 10][1509]
el triple del con que té com a secció a través de l'eix del triangle $\triangle ABD$,
tenim que el cilindre és el sèxtuple d'aquest con.

I, havent establert que l'esfera de cercle màxim $\bigcirc ABCD$ és quatre vegades el con, [ECI 1]
el cilindre és igual a una esfera i mitja,
que és el que volíem demostrar. ♠

Tan bon punt vaig veure que l'esfera equival a quatre vegades el con de base el cercle màxim del cercle i que l'eix del con és igual al radi de l'esfera,
se'm va acudir que la superfície de l'esfera és quatre vegades el cercle màxim [ECI 33]
perquè intuïa que, com que el cercle equival al triangle de base la circumferència i altura el radi, [QP 1]
l'esfera ho fa al con de base la superfície de l'esfera i altura aquest radi.[1510]

1509. Heiberg considera que aquesta referència a Euclides és una interpolació. Tanmateix, n'hi ha unes altres dues a EC: en concret, EI 2 i EXII 2.

1510. Els raonaments per analogia —molt útils— són, de vegades, falsos. Demanen una gran intuïció.

B.10*c*₃ [Me 4. El volum d'un segment de paraboloide de revolució] *Tot segment de paraboloide,*[1511] *determinat pel tall d'un pla perpendicular a l'eix, equival a una vegada i mitja el con que té la mateixa base i el mateix eix que aquest.*[1512] *Això es veu amb el mètode, tal com expliquem a continuació.*

Considerem un paraboloide.

El tallem per l'eix amb un pla.

Determina un segment de paràbola ABC.

Ara el tallem amb un pla perpendicular a l'eix.

[*Construcció.*] Sigui BC el segment d'intersecció dels dos plans [Exi 3]
i AD l'eix del segment parabòlic.

Prolonguem el segment DA fins al punt H. [P 2]

La prolongació AH és igual a AD. [Ei 2 o Ei 3]

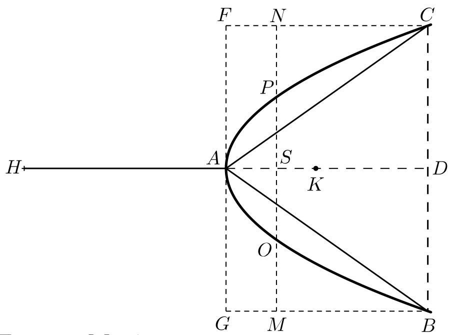


Figura Me 4

Considerem la balança DH amb el fulcre en el punt mitjà A.

La base del segment parabòlic és el cercle de diàmetre BC que obtenim quan el tallem amb un pla perpendicular a l'eix AD.[1513]

Considerem el con de base el cercle de diàmetre BC i vèrtex A,
[Dxi 18, 19 i 20]
i el cilindre de base el cercle de diàmetre BC i eix AD.
[Dxi 21, 22 i 23] ♣

[*Demostració.*] En el paral·lelogram tracem el segment MN paral·lel al BC [Ei 31]
i, pel segment MN, un pla perpendicular al segment AD. [Exi 18]

1511. Arquimedes diu: «conoide rectangle», ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς.

1512. Aquest resultat el trobem a CE 21.

1513. El segment parabòlic és un segment de revolució, és a dir, l'obtenim fent girar el segment de paràbola al voltant de l'eix i seguint la generació del cilindre, el con i l'esfera del llibre xi dels *Elements*.

Aquest pla determina, en el cilindre, un cercle de diàmetre MN i, en el segment parabòlic, un de diàmetre OP.

Atès que la secció del con [recte] de base el cercle de diàmetre AD és [el triangle $\triangle BAC$]
i que les ordenades[1514] són els segments OS i BD,
tenim que el quadrat de costat BD és al de costat OS com DA a AS.[1515]

Però DA és igual a AH. [per construcció]

Per tant, la raó entre els quadrats de costats MS i SO és la de HA i AS.

Ara bé, el cercle de diàmetre MN, element del cilindre,[1516]
és al cercle de diàmetre OP, element del paraboloide,
com el quadrat de costat MS al de costat SO. [Ex II 2]

Consegüentment, els cercles de diàmetres MN i SO són entre si com HA i AS. [Nc 1 o Ev 11]

Resulta, doncs, que el cercle de diàmetre MN, situat en el cilindre i mantenint-se al seu lloc,
equilibra, respecte del fulcre A, el cercle del diàmetre OP
col·locat en el punt H de la balança, de manera que n'és el centre de gravetat.

D'altra banda, el punt S és el centre de gravetat del cercle de diàmetre MN, [lema 7]
mentre que el punt H ho és del cercle de diàmetre OP,
que s'ha desplaçat [al punt H].

I la raó que hi ha entre HA i AS és inversa[1517]
a l'existent entre els cercles de diàmetres MN i OP.

De manera semblant, si considerem un altre segment paral·lel a BC dins el paral·lelogram,
i damunt seu aixequem un pla perpendicular a AT, [Ex I 18]
el cercle determinat en el cilindre, situat en el seu lloc,

1514. El text diu: «τεταγμήνως κατηγμέναι».

1515. Vegeu QP 3. Apol·loni la demostra a C I 20.

1516. El terme *element* l'usem, ara, en el sentit d'«element constituent», és a dir, atòmic, i no pas en el sentit amb el qual l'hem usat fins ara.

1517. Diu: «ἀντιπεπονθότως», de manera oposada, que cal entendre en proporció inversa>.

equilibra, respecte del fulcre A, el cercle determinat en el segment parabòlic
i col·locat en el punt H de la balança, de manera que n'és el centre de gravetat.

Per tant, un cop hem omplert el cilindre i el segment parabòlic,[1518] el cilindre situat en el seu lloc equilibra, amb fulcre en el punt A
i el segment parabòlic situat en el punt H, de manera que n'és el centre de gravetat.

Ara bé, les magnituds esmentades estan en equilibri respecte del fulcre A.

I el centre de gravetat del cilindre és el punt K,
que divideix el segment AD en dues parts iguals, [lema 8]
i el centre de gravetat del segment parabòlic, traslladat [element a element] en el punt H, és aquest punt H.

Per tant, la raó entre HA i AK és la inversa de la que hi ha entre el cilindre i el segment parabòlic.

Però HA és el doble de AK.

Per consegüent, el cilindre equival al doble del segment [parabòlic] i a tres vegades el con que té com a base el cercle de diàmetre BC i com a vèrtex el punt A. [Exii 10]

Així doncs, és evident que el segment parabòlic equival a una vegada i mitja el con. ♠

B.10*c*₄ [Me 5. El centre de gravetat d'un segment de paraboloide de revolució] *El centre de gravetat d'un segment parabòlic de revolució determinat pel tall d'un pla perpendicular a l'eix està situat damunt de l'eix i el divideix de manera que la part del vèrtex és el doble de l'altra.*

Podem examinar aquesta proposició mitjançant el mètode, tal com expliquem a continuació.[1519]

[*Construcció.*] Considerem un paraboloide.

1518. Tots els elements atòmics junts omplen els sòlids.

1519. No ens ha arribat cap altra determinació del centre de gravetat del segment de paraboloide de revolució, si bé l'esmenta reiteradament a CF. En concret, a CF 2, diu que l'ha demostrat [geomètricament] en el llibre *Sobre els equilibris*, una obra perduda que completava EP.

El tallem amb un pla perpendicular a l'eix
i amb un per l'eix que determina el segment de paràbola ABC en la seva superfície. [CE 11]

Siguin BC el segment comú als dos plans [Exi 3]
i AD l'eix del segment parabòlic i el diàmetre del segment de paràbola ABC.

Prolonguem el segment DA fins al punt H [P 2]
amb un segment AH igual a AD. [Ei 2 o Ei 3]

Observem la balança DH, amb el fulcre en el punt mitjà A.

La base del segment parabòlic és el cercle de diàmetre BC
que obtenim quan el tallem amb un pla perpendicular a l'eix AD.

Considerem el con inscrit en el paraboloide de generatrius BA i AC. [Exi 18, 19 i 20][1520]

En la secció del con recte, tirem el segment OP paral·lel a BC. [Ei 31]

La secció talla el segment de paràbola pels punts O i P,
i les generatrius del con pels Q i R. [P 5] ♣

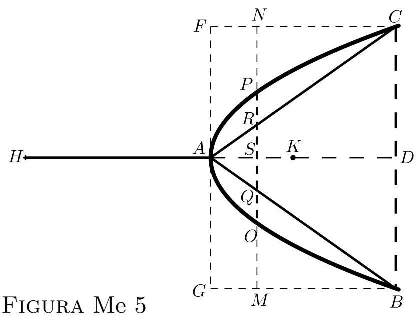


Figura Me 5

[*Demostració.*] Com que, en la secció del segment de paràbola,
hem tirat els segments OS i BD perpendiculars al diàmetre,
tenim que DA és a AS com el quadrat de costat BD al de costat OS. [QP 3]

Però DA és a AS com BD a QS [Evi 4]
i BD a QS com el quadrat de costat BD al rectangle de costats BD i QS. [Evi 1]

Per tant, el quadrat de costat OS equival al rectangle de costats BD i QS. [Ev 9]

En conseqüència, els segments BD, SO i SQ són proporcionals, [Evi 17]
és a dir, BD és a SO com SO a SQ.

1520. Entenem que es refereix al segment de paraboloide.

I d'això en resulta que BD és a SQ com el quadrat de costat SO al de costat SQ. [Dx 9]

Però BD és a SQ com DA a AS i AH a AS. [Ev 11 i Nc 1]

I també AH és a AS com el quadrat de costat SO al de costat SQ. [Nc 1]

Pel segment OP, tracem un pla perpendicular al AD. [Exi 18]

Veiem que determina un cercle de diàmetre OP en el paraboloide [de revolució]
i un diàmetre QR en el con. [Dxi 19]

Atès que AH és a AS com el quadrat de costat SO al de costat SQ i que la raó d'aquests quadrats és la dels cercles corresponents, [Exii 2] tenim que la raó entre els segments AH i AS és la dels cercles de diàmetres OP i QR. [Nc 1 o Ev 11]

En conseqüència, el cercle de diàmetre OP, col·locat al seu lloc,
equilibra, respecte del fulcre A, el cercle de diàmetre QR,
col·locat en l'extrem H de la balança.[1521]

I, com que el centre de gravetat del cercle de diàmetre OP, col·locat al seu lloc, és S [Me, lema 7]
i el del cercle de diàmetre QR, col·locat en el punt H, és aquest punt, obtenim una proporcionalitat inversa.

És a dir, HA és a AS com el cercle de diàmetre OP al de diàmetre QR.

Per tant, els cercles s'equilibren amb fulcre en el punt A. [EPi 6 i 7]

De manera anàloga, si tirem un segment paral·lel a BC dins de la secció del paraboloide damunt un pla perpendicular al segment AD, [Exi 18]
el cercle generat en el segment de paraboloide, col·locat al seu lloc,
equilibra, respecte del fulcre A,
el cercle que genera el con col·locat en l'extrem H de la balança.[1522]

Ara suposem que el segment parabòlic i el con estan formats pels cercles —n'estan plens—
i que el con equilibra, amb fulcre en el punt A,

1521. De fet, hauríem de dir, «col·locat en l'extrem H de la balança que li fa de centre de gravetat».

1522. La llei d'equilibri, que és el que volem trobar, no depèn del segment paral·lel a BC quan talla AD entre els punts A i D.

tots els cercles del segment de paraboloide col·locats en l'extrem H de la balança.[1523]

Així doncs, el segment de paraboloide[, tot aquest,] col·locat al seu lloc,
equilibra, respecte del fulcre A, el con situat en l'extrem H.[1524]

I, com que el centre de gravetat del sistema format per les dues magnituds juntes és el [punt] A [Me, lema 3]
i el centre de gravetat del con, traslladat, és el punt H,
el centre de gravetat de l'altra magnitud es troba en el segment AH, prolongant un segment AK pel costat del punt A de manera que AH és a AK com el segment de paraboloide al con. [Me, lema 2]

Però el segment de paraboloide equival a una vegada i mitja aquest con. [Me 4]

Per tant, el segment AH és també una vegada i mitja el AK,
i K és el centre de gravetat del segment de paraboloide.

En definitiva, K divideix el segment AD de manera que la part que queda a la banda del vèrtex és el doble de l'altra. ♠

B.10*d* La determinació mecànica del volum de l'ungla cilíndrica

Arquimedes dedica les proposicions Me 12 i 13 a la determinació mecànica del volum de l'ungla cilíndrica. En la primera —que conté dues figures, l'ungla cilíndrica i el semicilindre— determina, usant el mètode mecànic, el centre de la balança que fa que les dues figures s'equilibrin. En la segona, fent servir l'anterior com a «element», estableix que l'ungla cilíndrica és equivalent a una sisena part del prisma que té com a base el quadrat circumscrit a la base del cilindre i la mateixa altura que el cilindre. Tot seguit, a Me 14, proporciona una demostració alternativa. p. 133

1523. Nota 1521 (pàgina 1521).
1524. Nota 1521 (pàgina 1521).

B.10$\boldsymbol{d_1}$ [Me 12. La determinació mecànica del centre de gravetat de l'ungla cilíndrica] *En un prisma de base quadrada inscrivim un cilindre amb les bases en dos quadrats oposats de manera que la seva superfície toca els altres quatre paral·lelograms. Pel centre del cercle base del cilindre i per un costat del quadrat oposat* [*l'aresta del cub en la cara oposada a la base*]*, tirem un pla. Afirmo que la figura limitada* [*en el cilindre*] *per aquest pla equival a una sisena part del prisma.*[1525] *Això ho podem veure d'aquesta manera i, un cop ho hàgim vist, en proporcionarem la solució geomètricament.*[1526]

[*Construcció.*] Considerem un prisma recte de base quadrada
i, inscrit en aquest, un cilindre com el que hem descrit.

Tallem el prisma amb un pla per l'eix perpendicular a aquest pla. [Exi 18]

La secció que aquest pla determina en el prisma que circumscriu el cilindre és el paral·lelogram $\varparallelogram AB$.

Considerem el segment BC, és a dir, la intersecció del pla que talla el segment cilíndric,
i el pla que passa per l'eix i és perpendicular al que ha tallat el segment cilíndric.

Sigui CD l'eix del prisma i del cilindre
i EF el segment que els dimidia perpendicularment.

Pel segment EF, aixequem un pla perpendicular a CD. [Exi 18]

Aquest pla determina el quadrat $\square MN$ en el prisma
i el cercle $\bigcirc OPQR$ en el cilindre inscrit.

Aquest toca —ja que els és tangent— els costats del quadrat pels punts O, P, Q i R.

Considerem el segment KL comú al pla que talla el segment cilíndric,

---

1525. És cubicable.

1526. Donarem aquesta demostració al final de tot. Així, de manera anàloga al que hem vist a QP, tindrem les dues presentacions d'un mateix resultat: la mecànica i la geomètrica. Vegeu també González Urbaneja i Vaqué (1997), p. 190-199.

el pla perpendicular a l'eix del cilindre per EF [Exi 3]
i el segment QHO que el dimidia. [Eiii 3]

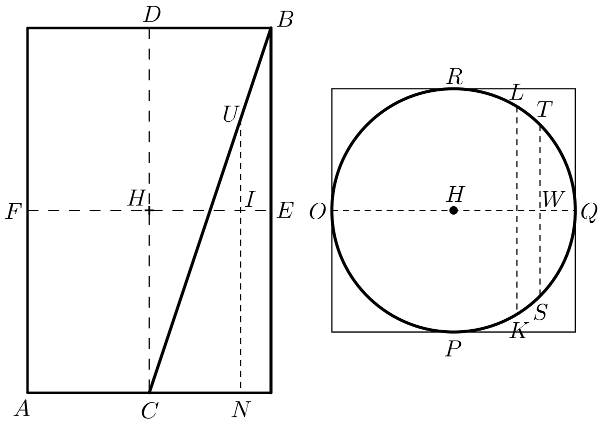


Figura Me 12

[*Demostració*.] Tirem el segment ST del semicercle ⌓ PQR
perpendicular a QW, [Ei 11 o Ei 12]
i un pla perpendicular a PQ per ST. [Exi 17 i Ei 11]

L'estenem a les dues bandes del pla del cercle ○ $OPQR$.

Aquest pla determina un paral·lelogram en el semicilindre de base el cercle ○ $OPQR$,
un costat del qual és el segment ST
i l'altre la generatriu.

I, en el segment determinat en el cilindre,[1527]
un altre, amb un costat igual al segment ST i un altre a NU,
essent NU el segment del paral·lelogram ▱ DE paral·lel a BZ,
de manera que EI és igual a QW.

Com que ▱ EC és un paral·lelogram,
el segment NI és paral·lel a HC
i tots dos estan tallats per les transversals EH i CB,
resulta que EH és a HI com ZC a CN i BZ a UN. [Evi 4]

I, com que els segments EH i HQ són iguals,
IH i WH també ho són. [Nc 3]

1527. L'anomenarem *ungla cilíndrica*.

Però, atès que QH i HO són iguals, [Di 15]
HO és a OW
com el paral·lelogram generat en el semicilindre
ho és al generat en l'ungla cilíndrica.[1528] [Evi 1]

Ara considerem un altre segment en el paral·lelogram,
i el transportem a l'extrem O de manera que aquest punt en sigui el centre de gravetat [del segment traslladat].[1529]

Suposem que QO és una balança dimidiada pel punt H.

Aleshores, el paral·lelogram del semicilindre, col·locat al seu lloc, equilibra, amb el fulcre en el punt H, el paral·lelogram del cilindre transportat i col·locat en el punt O.[1530]

Atès que el punt W és el centre de gravetat del paral·lelogram generat en el semicilindre, [lema 6]
que O ho és del paral·lelogram generat en el segment parabòlic,
però transportat,
i que la raó entre OH i OW és la que hi ha entre els paral·lelograms de centre de gravetat els punts W i O,
tenim que el paral·lelogram de centre de gravetat W equilibra,
amb fulcre en el punt H,
el de centre de gravetat O.

De manera semblant, si en qualsevol altre segment del semicercle
⌓ PQR,
perpendicular a QH,
aixequem un pla perpendicular a QH [Exi 17]
i l'estenem a les dues bandes del pla del cercle ◯ $OPQR$,
veiem que el paral·lelogram generat en el semicilindre, col·locat al seu lloc,
equilibra, amb fulcre a H, el paral·lelogram generat en el cilindre,
transportat i col·locat en el punt O, que n'és el centre de gravetat.

1528. Aquesta és la relació que necessitem per tal de poder aplicar el mètode.

1529. Com en els altres casos, observa que el resultat anterior no depèn de l'«ordenada» que considera.

1530. De manera que O és el centre de gravetat del paral·lelogram traslladat.

En definitiva, tots els paral·lelograms generats en el semicilindre, col·locats al seu lloc,
equilibren, amb fulcre a H, tots els paral·lelograms generats en el cilindre,
transportats i col·locats en el punt O de la balança.

Per tant, el semicilindre, col·locat al seu lloc,
equilibra, amb fulcre a H, el segment de cilindre,
transportat i col·locat en el punt O, que n'és el centre de gravetat. ♠

B.10d_2 [Me 13. La determinació mecànica del volum de l'ungla cilíndrica] [*L'ungla cilíndrica equival a una sisena part del prisma que té com a base el quadrat que circumscriu el cercle de la base del cilindre i la mateixa altura que aquest.*][1531]

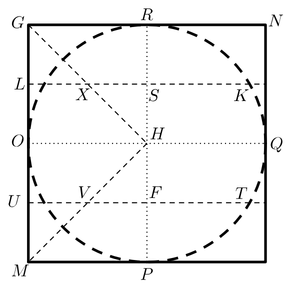


FIGURA Me 13

De bell nou, considerem el paral·lelogram ▱MN perpendicular a l'eix,[1532]
i el cercle ◯$OPQR$. [EIV 8]

Unim HM i HG. [P 1]

Tirem els plans perpendiculars al pla d'aquest cercle que passen per aquests segments [EXI 2, 4, 16 i 18][1533]
i els prolonguem per totes dues bandes.[1534]

Així s'obté un prisma de base el triangle $\triangle GHM$ i altura la del cilindre. [DXI 13]

Aquest prisma equival a una quarta part del que circumscriu el cilindre. [EXI 32]

En el semicercle ⌓PQR i en el quadrat $\square MN$,
tirem els segments KL i TU equidistants del segment QO. [EI 31]

Aquests segments tallen la semicircumferència del semicercle ⌓PQR pels punts K i T,[1535]

1531. El text omet l'enunciat. Vegeu BABINI (1966), p. 76-78.

1532. De fet, és un quadrat.

1533. Recordem que Euclides no fa explícita la determinació d'un pla perpendicular a un altre i que passa per un segment seu. Però és possible fer-ho, basant-se en les proposicions indicades aquí, és a dir, EXI 2, 4, 16 i 18.

1534. Hom suposa la validesa del postulat P 2 als plans.

1535. Aquí cal recórrer a les condicions de tall dels segments rectilinis i

el diàmetre PR pels punts S i F, [P 5]
i els segments HG i HM pels punts X i V. [P 5]

Pels segments KL i TU aixequem plans perpendiculars al PR[1536]
i els prolonguem pels dos costats de pla del cercle $\bigcirc\, OPQR$.

Un d'aquests dos plans talla el semicilindre que té com a base el semicercle ⌓ PQR i la mateixa altura que el cilindre,
i ho fa segons un paral·lelogram amb un costat igual al segment KS i l'altre igual a l'eix del cilindre. [Dxi 21]

I, de manera anàloga, en el prisma HGM talla un paral·lelogram amb un costat igual al segment LX i l'altre a l'eix [del cilindre].

I, per les mateixes raons, en el semicilindre, tenim un paral·lelogram amb un costat igual al segment TF i l'altre al mateix eix.

I, finalment, en el prisma hi haurà un paral·lelogram amb un costat igual al segment UV i l'altre a l'eix.[1537]

[Sabem que els centres de gravetat dels paral·lelograms sobre SK i FT[1538] són els seus punts mitjans [lema 6]
i, de retruc, el centre de gravetat dels dos paral·lelograms junts
és el punt de tall del segment que uneix el centre de gravetat dels dos paral·lelograms i del HQ[, A'[1539]]. [lema 3]

Per la mateixa raó, el centre de gravetat dels paral·lelograms sobre KL i UV és el de tall del segment que uneix els punts mitjans de XL i UV i el HO[, AB'[1540]]. [lema 3]

Aleshores tenim que els paral·lelograms que es troben sobre els segments SK i TF junts són als que es troben sobre els XL i UV
com SK a LX, [Evi 1]
com SK a SR, [Evi 4 i Ei 33]
i com el quadrat de costat SK al rectangle de costats SR i SK. [Ev 15]

Ara bé, el quadrat de costat SK és al rectangle de costats SR i SK

---

les circumferències. Pla (2018), nota 387, p. 113.

1536. Nota 1533 (pàgina 535).

1537. El text s'acaba aquí. El que segueix és la reconstrucció de Heiberg.

1538. De fet, SK i FT són les diagonals.

1539. Que no apareix a la figura.

1540. Que no apareix a la figura.

com el rectangle de costats SR i SP al de costats SR i SK
[EIII 31, EVI 17 i EVI 8, porisma]
i, per tant, com el segment SR al SK. [EVI 1]

Ara bé, el segment SR és igual al segment format pel SR i per dues vegades el SH junts [Nc 2]
i alhora al format per dues vegades el XS i el LX.
[EI 33, EVI 2, DI 15 i Nc 2]

Per tant, el segment SP és al SK com el segment format pel SR i per dues vegades el SH junts al format pel LX i per dues vegades el XS junts. [EV 7]
i també com el format pel LX i per dues vegades el XS junts al SK.
[EV 7]

En conseqüència, el segment format pel LX i per dues vegades el XS junts és al SK com el segment format per la meitat del LX i el XS junts a la meitat del SK, [EV 15]
que, al seu torn, és com el segment $B'H$ al $A'H$. [EV 7 iterat]

En definitiva, els rectangles que es troben sobre els segments SK i TF junts són als que es troben sobre els segments LX i UV junts com $B'H$ al $A'H$. [EV 11 o Nc 1 iterats]

O sigui que aquestes dues parelles de rectangles s'equilibren pel punt H.[1541]

I el mateix fet val per a qualssevol altres rectangles determinats de manera anàloga en el semicilindre i en el prisma triangular.

Per tant, el semicilindre i el prisma GHM
—que són els que omplen els rectangles descrits— s'equilibren pel punt H.[1542]

Però el semicilindre equilibra, relativament al punt H, el segment cilíndric tot aquest traslladat al punt O. [Me 12]

I, a més, els segments HO i QH són iguals. [DI 15]

En definitiva, el segment de cilindre, col·locat al punt Q, equilibra el prisma GHM, deixat al seu lloc.

Sabem que el centre de gravetat del prisma és en un punt del segment

1541. És la relació que permet aplicar el mètode d'Arquimedes.
1542. Aquí s'aplica el mètode arquimedià.

OH que dista del punt H el doble del que ho fa del punt O.

[lemes 9 i 5]

O sigui que el segment de cilindre és al prisma GHM com dues terceres parts del segment OH al QH

és a dir, com 2 és a 3. [Evi 1]

Però hem vist que el prisma GHM equival a una quarta part del prisma AB.

Per tant, el segment cilíndric és el prisma AB com 2 a 12

[Ev 22]

i, de retruc, com 1 a 6. [Ev 15]

En definitiva, el segment cilíndric equival a una sexta part del prisma que circumscriu el cilindre. ♠]

B.10*e* Una determinació alternativa de Me 12 i 13

[Me 14.] Una demostració alternativa del volum de l'ungla cilíndrica] [*El volum de l'ungla cilíndrica equival a una sisena part del prisma.*][1543]

[*Construcció.*] Considerem un prisma recte de bases quadrades i sigui el quadrat $\square ABCD$ una d'aquestes.

En aquest prisma hi inscrivim un cilindre de base el cercle $\bigcirc EFGH$ tangent als costats del quadrat $\square ABCD$ pels punts E, F, G i H.

[Eiv 8 i Dxi 13]

Tirem el pla que passa pel centre d'aquest cercle i pel costat del quadrat oposat al $\square ABCD$ que correspon al costat CD.[1544]

Aquest pla separa del prisma donat un altre de limitat per tres paral·lelograms i dos triangles oposats entre si

que equival a la quarta part del total. [Exi 32]

Ara, en el semicercle ⌓ EFG, hi inscrivim el segment de paràbola d'eix FK, que passa pels punts G i E. [Ci 51, problema]

Considerem el segment MN del paral·lelogram ▱ DG paral·lel al KF [Ei 31]

1543. Vegeu Babini (1966), p. 78-82.
1544. Nota 817 de Pla (2020), p. 425.

que talla la semicircumferència del semicercle pel punt O
i la paràbola per L. ♣

[*Demostració*.] Sabem que el rectangle de costats MN i NL equival al quadrat de costat NF [C I 11]
i, de retruc, el segment MN és al NL com el quadrat de costat KG al de costat LS. [D V 9 i E VI 17]

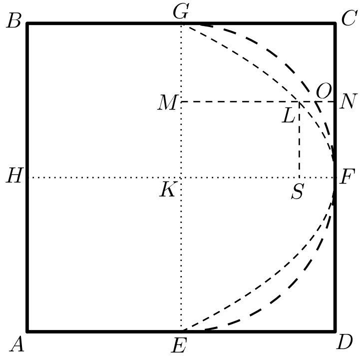


FIGURA Me 14

Pel segment MN tirem un pla perpendicular a EG.[1545]

Aquest pla talla el prisma que hem separat del prisma inicial segons un triangle rectangle.

Un dels seus catets és el segment MN,
l'altre és un segment del pla [perpendicular al pla $\square ABCD$], que passa pel segment CD,]
perpendicular a CD pel punt N [E X I 4]
i és igual a l'eix del cilindre.

I la seva hipotenusa es troba en el pla secant.

Aquest mateix pla talla el segment del cilindre determinat pel pla traçat per EG i pel costat del quadrat oposat a CD segons un triangle rectangle.

Un dels seus catets és el segment MO,
l'altre el segment de la superfície cilíndrica perpendicular al pla ▱ KN per O,
i la hipotenusa en el mateix pla secant.

D'això, en resulta que el rectangle de costats MN i ML és equivalent al quadrat de costat MO.[1546]

I, raonant com ho hem fet abans, el segment MN és al NL com el quadrat de costat MN al de costat MO. [D V 9 i E VI 17]

Però el triangle del prisma construït sobre el segment MN és al del

1545. Nota 1533 (pàgina 535).

1546. Per E III 31, P 2, P 3, E II 5, E VI 8, porisma, E VI 17 i C I 11, $MO^2 = GM \times ME = (GK - MK) \times (EK + KM) = (GK - MK) \times (GK + KM) = GK^2 - KM^2 = MN^2 - MN \times NL = MN \times (MN - NL) = MN \times ML$.

segment de cilindre construït sobre MO com el quadrat de costat MN al de costat MO [Evi 19]

i, de retruc, el primer triangle és al segon com el segment MN al ML.[1547] [Ev 11 o Nc 1]

De manera anàloga, podem veure que, si en el paral·lelogram circumscrit a la secció del con rectangle tirem un altre segment paral·lel al KF [Ei 31]

i per aquest aixequem un pla perpendicular al segment EG,[1548]

obtenim que el triangle determinat en el prisma és al que hi queda en el segment de cilindre com el segment paral·lel a KF situat en el paral·lelogram ▱ DG a la part d'aquest compresa entre la paràbola EGG i el diàmetre EG.

I aleshores, si omplim el paral·lelogram ▱ DG mitjançant els segments paral·lels a KF

i el segment comprès entre la paràbola i el diàmetre amb les parts corresponents d'aquests segments paral·lels,

tenim que tots els triangles del prisma són a tots els del segment del cilindre com tots els segments del paral·lelogram a totes les parts compreses entre la paràbola i el diàmetre EG.[1549]

Ara bé, el prisma es compon de tots els triangles que conté,

i el segment de cilindre dels que conté,

mentre que el paral·lelogram de tots els segments paral·lels a KF d'aquest

i el segment de la paràbola[1550] per tots els segments [paral·lels a KF] que es troben entre la paràbola i EG.

En definitiva, el prisma és al segment de cilindre com el paral·lelogram ▱ DG al segment EFG [que està comprès entre la paràbola i el diàmetre EG]. [Ev 12][1551]

1547. És la relació bàsica, en aquest cas per a poder aplicar el mètode.

1548. Nota 1533 (pàgina 535).

1549. Ús dels indivisibles o àtoms.

1550. Usa l'anacronisme *τῆς παραβολῆς* com ho eren les expressions *ἡ πλαγία* i *ἡ ορθία* de Me 3. Mugler (1971*b*), p. 122, nota 1.

1551. Aquesta propietat de les raons s'aplica estesa a l'infinit.

Però, com hem establert en una monografia anterior, el paral·lelogram ▱ DG equival a tres meitats el segment [parabòlic] EFG
[QP 24 o Me 1]

i, de retruc, el prisma equival a tres meitats del segment de cilindre.
[Ev 11 o Nc 1, Ev 15 i Ev 7]

Per tant, la meitat del cilindre equival a una tercera part del prisma. [Nc 6′]

D'altra banda, una tercera part del prisma equival a una dotzena part del prisma total [Ev 15 i 7]

—que és el que circumscriu el cilindre—,

atès que el con és quatre vegades superior al cilindre.

En definitiva, el segment del cilindre equival a un sisè del prisma total. [Ev 15 i 7] ♠

B.10*f* La determinació mecànica del volum de la cúpula cilíndrica

Arquimedes tanca *Mètode* amb la determinació mecànica del volum de la cúpula cilíndrica.

[Me 16. La determinació mecànica del volum del sòlid comú a dos cilindres inscrits en un cub][1552]

[*Construcció.*] Si, en un cub, inscrivim un cilindre que té les bases sobre dos quadrats oposats,

la superfície lateral tangent a les altres quatre cares del cub,

i en el mateix cub inscrivim un altre cilindre que té les bases en uns altres dos quadrats oposats

i la superfície lateral en les altres quatre cares,

aleshores el sòlid limitat pels dos cilindres i el que els és comú[1553] equival a dues terceres parts del cub.[1554] ♣

1552. Babini (1966), p. 87-90. Vegeu també el problema 39 (pàgina 168).

1553. Fins aquí la descripció de la *cúpula* o *volta cilíndrica*.

1554. És cubicable.

[*Demostració.*] Considerem, doncs, un cub i els dos cilindres inscrits tal com hem descrit.[1555]

Pel centre K del cub, tirem un pla perpendicular a les dues cares. [Exi 11 i 18]

Aquest pla talla el cub pel quadrat $\square VXZW$,
el cilindre d'eix perpendicular pel pla en el cercle $\bigcirc ABCD$
i l'altre cilindre pel mateix quadrat $\square VXZW$.

Siguin AC i BD dos diàmetres perpendiculars del cercle. [P 1 i Ei 11]

Per BD, tirem un pla perpendicular al quadrat $\square VXZW$. [Exi 18]

Aquest pla talla el cub en un quadrat per- pendicular al quadrat $\square VXZW$
amb centre en K.

Imaginem la piràmide de vèrtex A i base aquest quadrat perpendicular. [Dxi 12]

Prolonguem la superfície lateral d'aquesta piràmide
i la tallem amb un pla que, passant per C, és paral·lel a la base. [Exi 15, porisma]

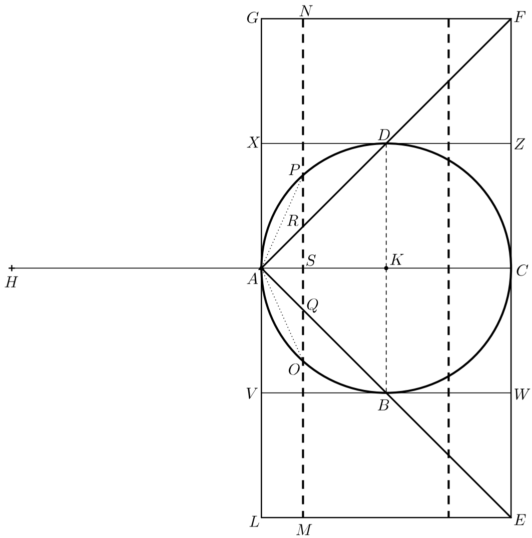


Figura Me 16

La secció obtinguda és un quadrat perpendicular a AC, de costat EF, que és el doble de BD. [Evi 2]

Damunt d'aquest darrer quadrat fem un paral·lelepípede d'eix igual a AC.

El rectangle $\boxed{}\, EFGL$ és la secció amb el pla que, passant per K, esdevé perpendicular a la base.

Prolonguem CA fins al punt H de manera que AH i AC són iguals. [P 2 i Ei 2 o Ei 3]

1555. És a dir, considerem una volta cilíndrica.

Considerem CH com si fos una balança amb fulcre en el punt mitjà A.

En el paral·lelogram ▱ EG, tirem el segment MN paral·lel a BD [Ei 31]

que talla la circumferència ○ $ABCD$ pels punts O i P,
el diàmetre AC per S
i els segments AE i AF per Q i R, respectivament.

Damunt el segment MN aixequem un pla perpendicular a AC. [Exi 18]

Aquest pla determina en el paral·lelepípede $EFLG$ un quadrat de costat igual a MN,
en la piràmide AEF un de costat QR
i en la volta cilíndrica un de costat OP.

Ara bé, el rectangle de costats MS i SQ equival als quadrats de costats OS i SQ. [Me 2]

I, atès que HA és a AS com MS a SQ,
tenim que HA és a AS com el quadrat de costat MS a la suma dels quadrats de costats OP i QR. [Me 2, demostració]

Per tant, el quadrat de costat MN del paral·lelepípede, col·locat al seu lloc,
equilibra, amb fulcre a A, els dos quadrats
—el de la piràmide i el de la volta—
de costats iguals a OP i QR, traslladats i col·locats de manera que els seus centres de gravetat coincideixen amb el punt H.

I passa el mateix amb tots els quadrats que obtenim amb els plans perpendiculars a AC dins del paral·lelepípede.

Per tant, el paral·lelepípede, col·locat al seu lloc,
equilibra, amb fulcre en el punt A, el sòlid comú als dos cilindres i a la piràmide AEF,
traslladats i col·locats de manera que els centres de gravetat coincideixen amb el punt H.

Sabem que el centre de gravetat del paral·lelepípede és el punt K. [lema 9]

Per tant, HA és a AK com el paral·lelepípede a la volta cilíndrica i el con junts.

O sigui, 2 és a 1 com el paral·lelepípede a la volta cilíndrica més una tercera part del paral·lelepípede junts.

En definitiva, dues voltes cilíndriques i dues terceres parts del paral·lelepípede juntes equivalen al paral·lelepípede.

I la volta cilíndrica equival a una sisena part del paral·lelepípede, que, al seu torn, ho fa a dues terceres parts del cub. ♠

B.10*g* La demostració geomètrica del volum de la cúpula cilíndrica

Nosaltres, en canvi, tanquem aquest recull de proposicions del *Mètode* amb la proposició Me 15, que conté la demostració geomètrica de les proposicions Me 12 i Me 13.[1556] Ens trobem, doncs, en una situació anàloga a la que hem observat a QP, primer s'ofereix el camí basat en la llei de la palanca i després la demostració geomètrica.

[Me 15. La determinació geomètrica del volum de la cúpula cilíndrica] *Demostració geomètrica de les proposicions Me 12 i Me 13.*

[*Construcció.*] Considerem un prisma de base quadrada $\square ABCD$.[1557]

Hi inscrivim un cilindre de base el cercle $\bigcirc\, EFG$, amb centre a K i tangent als costats del quadrat pels punts E, F, G i H. [Dxi 21 i 22]

Pel diàmetre EG

[i pel costat del quadrat oposat corresponent a CD] tirem un pla.

Aquest pla separa, del prisma total, un prisma,

i, del cilindre, un segment cilíndric.

Afirmo que podem establir que el segment separat del cilindre pel pla esmentat equival a la sisena part del prisma total.[1558] ♣

1556. El text gairebé no es va poder recuperar. Heiberg el va refer inspirant-se en les demostracions de les proposicions CE 19 i CE 25, el va refer. Vegeu Mugler (1971*b*), p. 122-125, i Ortiz-García (2009), p. 311-315. Nosaltres hem adoptat Babini (1966), p. 82-87.

1557. Vegeu la figura B.10 (639).

1558. És a dir, l'ungla cilíndrica és cubicable.

[*Demostració.*]

a) De primer, veurem que és possible inscriure i circumscriure sòlids adequats en el segment separat,

sòlids formats per prismes de la mateixa altura i bases triangulars semblants,

de manera que el sòlid circumscrit supera l'inscrit en una magnitud més petita que una de donada per endavant.

Dimidiem iteradament el diàmetre EG del semicercle $\frown EFG$ [Ei 10]

i, pels punts de divisió, tirem els segments paral·lels a KF. [Ei 31]

Pels punts en els quals aquests segments tallen la semicircumferència,

tracem els segments paral·lels a EG [Ei 31]

i els prolonguem per tots dos costats fins que tallen els dos paral·lels a KF més propers. [P 2]

Per aquests segments paral·lels, dibuixem dos plans perpendiculars al pla del semicercle. [Exi 18]

Aquests plans determinen prismes inscrits en el segment del cilindre i circumscrits a aquest

que tenen la mateixa altura,

i triangles rectangles amb un catet sobre segments paral·lels a KF.

Continuem la divisió del segment EG en parts iguals fins que els dos prismes circumscrits,

que tenen l'aresta comuna a EK,

són més petits que una magnitud arbitrària donada per endavant. [Ex 1]

Aleshores, la diferència entre el sòlid prismàtic circumscrit a l'ungla cilíndrica

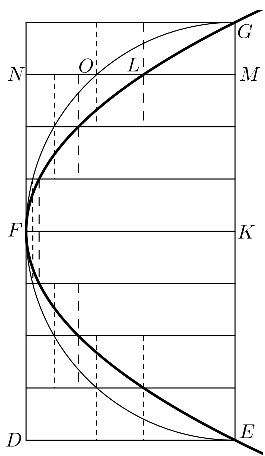


FIGURA Me 15

i l'inscrit en aquesta també és més petita que la magnitud donada.

Aquesta diferència, efectivament, és igual a la suma dels dos prismes circumscrits que tenen l'aresta comuna a KF, ja que a qualsevol prisma de la figura circumscrita hi correspon un prisma equivalent a la figura inscrita.

Tirem, ara, en el semicercle, la secció de con rectangle △EFG, i pels punts en els quals és tallada pels segments paral·lels a KF, els segments paral·lels a EG. [EI 31]

Obtenim dues figures compostes de paral·lelograms,
una circumscrita a la secció del con i l'altra inscrita en aquesta.

L'excedent de la primera sobre la segona és la suma dels dos paral·lelograms que tenen la base comuna a KF.

I, cada un dels paral·lelograms correspon a una de les figures sòlides del prisma que hem esmentat abans. ♠

b) Si l'ungla cilíndrica no és igual a una sisena part del prisma,[1559]

b_1) és més gran o b_2) és més petita.[1560]

b_1) En primer lloc, suposem que és més gran.

En aquest cas, el prisma parcial determinat pel pla secant és més petit que tres meitats de l'ungla cilíndrica.

En l'ungla cilíndrica inscrivim i circumscrivim figures sòlides com les que hem descrit abans,
de manera que les circumscrites superen les inscrites una magnitud donada per endavant.

Sigui MN un dels segments paral·lels a KF
tirat en el paral·lelogram ▱DG,
ML la part del segment compresa entre la part de la secció del con △EFG i el diàmetre EG,
i MO la compresa entre EG i la circumferència.

Hem vist que un pla perpendicular al paral·lelogram ▱DG
pel segment MN
talla el prisma parcial i l'ungla cilíndrica i genera dos triangles, de manera que el triangle del prisma parcial és al de l'ungla cilíndrica com MN a ML. [Me 14][1561]

Per això, el prisma del prisma parcial d'aresta MN

1559. Hipòtesi de l'absurd.

1560. Disjunció de casos.

1561. Aquesta proposició ofereix una demostració mecànica del volum de l'ungla cilíndrica.

és al prisma del sòlid inscrit en l'ungla d'aresta MO com MN a ML. [Exi 32]

Però, d'altra banda, el paral·lelogram $\varparallelogram NG$ —de costat MN— del paral·lelogram $\varparallelogram DG$
és al paral·lelogram inscrit en la secció del con de costat ML com MN a ML. [Evi 1]

De tot això en resulta que la suma dels prismes que componen el prisma parcial
és a la suma dels prismes que componen el sòlid inscrit en l'ungla cilíndrica com la suma dels paral·lelograms que componen el $\varparallelogram DG$ a la suma dels paral·lelograms que componen la figura inscrita en l'ungla [cilíndrica]. [lema 11[1562]]

O sigui, el prisma determinat pel pla oblic és a la figura inscrita en l'ungla cilíndrica
com el paral·lelogram $\varparallelogram DG$ a la figura inscrita en el segment de la secció del con.

Ara bé, com que el prisma determinat pel pla oblic és més petit que tres meitats de l'ungla cilíndrica
i que aquesta supera la figura inscrita una magnitud donada,
tenim que el prisma [parcial] determinat pel pla oblic és més petit que tres meitats del sòlid inscrit en l'ungla.

Però hem vist que el prisma [parcial] determinat pel pla oblic és a la figura inscrita en l'ungla [cilíndrica]
com el paral·lelogram $\varparallelogram DG$ a la suma dels paral·lelograms inscrits en el segment comprès entre la secció del con i el segment EG.

Per tant, el paral·lelogram $\varparallelogram DG$ és més petit que tres meitats de la suma dels paral·lelograms inscrits en el segment comprès entre la secció del con i el segment EG].

Tanmateix, això és impossible,
ja que hem establert que el paral·lelogram $\varparallelogram DG$ equival a tres meitats del segment comprès en aquest espai.

En definitiva, doncs, l'ungla cilíndrica «no és més gran» que la sisena part del cilindre. ♠

1562. Pàgina 518. És una extensió a l'infinit d'Ev 12. Recordem que, en el cas inscrit, dos termes de la suma queden exclosos.

b_2) En segon lloc, suposem que és més petita.

En aquest cas, el prisma [parcial] determinat pel pla oblic esdevé més gran que tres meitats de l'ungla cilíndrica.

En l'ungla cilíndrica inscrivim i circumscrivim prismes de manera que el prisma parcial resulta més gran que tres meitats del sòlid circumscrit a l'ungla.

Considerem la figura sòlida circumscrita a l'ungla
i la circumscrita al segment de la secció.

Seguint el raonament anterior, veiem que la suma dels prismes que componen el prisma determinat pel pla oblic és a la dels que componen el sòlid circumscrit a l'ungla com la suma dels paral·lelograms que componen el $\varangle DG$ a la dels paral·lelograms que componen la figura circumscrita al segment de la secció compresa entre aquesta secció i el segment EG. [lema 11]

És a dir, que el prisma determinat pel pla oblic és al sòlid circumscrit de l'ungla
com el del paral·lelogram $\varangle DG$ a la figura circumscrita del segment de la secció compresa entre la secció i el segment EG.

Però el prisma determinat pel pla oblic és més gran que tres meitats del sòlid circumscrit a l'ungla
[i, per tant, el paral·lelogram $\varangle DG$ també ho és més que la figura circumscrita al segment de la secció del con limitat per la secció i el segment EG].

Tanmateix, això és impossible
perquè hem establert que el paral·lelogram $\varangle DG$ equival a tres meitats del mateix segment de la secció.

Per tant, l'ungla no és més petita que la sisena part del prisma total. ♠

I, com que no és ni més gran ni més petita que la sisena part del prisma total,
necessàriament és igual a aquesta.

És a dir, l'ungla cilíndrica cubica una sisena part del prisma. ♠[1563]

1563. En les notes de peu de pàgina d'Eecke (1960), vol. II, p. 516-519, s'aclareixen els passos descrits.

B.11 Lm: *El llibre dels lemes*

Recollim, a continuació, sis dels lemes de la monografia Lm. Per p. 139
a la resta, podeu consultar el problema 41 (pàgines 168-169).

B.11*a* [Lm 1] *Tenim dos cercles tangents* $\bigcirc AEB$ *i* $\bigcirc CED$*. Suposem que els seus diàmetres* CD *i* AB *són paral·lels.*[1564] *Unim els extrems* B *i* D *dels diàmetres d'un mateix costat amb el punt de contacte* E*,* DE *i* BD*.*[1565] *El segment* BE *és rectilini.*

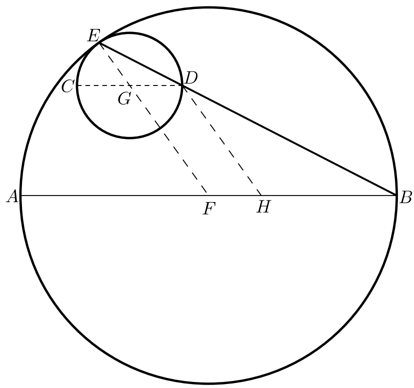


FIGURA Lm 1

[*Demostració.*] Siguin G i F els dos centres dels cercles. [EIII 1]

Prolonguem FG. [P 2]

El segment resultant passa per E. [EIII 12]

Pel punt D, tirem el segment DH paral·lel a GF. [EI 31][1566]

Els segments HF i GD són iguals, [EI 33]
i els GD i EG també. [DI 15]

Per tant, si els sostraiem dels segments iguals FB i FE, [DI 15]
GF —és a dir, DH— [EI 33]
i HB queden iguals. [Nc 3]

I els angles $\widehat{HDB}$ i $\widehat{HBD}$ també. [EI 5]

Si els angles $\widehat{EGD}$ i $\widehat{EFB}$[1567]

1564. De fet, es tracta dels diàmetres perpendiculars al segment que uneix el punt de tangència i els centres dels cercles.

1565. Molta atenció! Prenem en compte dos segments DE i DB que tenen l'extrem D en comú. En principi, no tenen per què estar alineats. Això és, precisament, el que fa que la demostració sigui delicada i interessant malgrat la seva simplicitat.

1566. Recordem que, per hipòtesi, en els cercles hi ha dos diàmetres AB i CD que són paral·lels.

1567. La figura del text està feta de manera que els diàmetres paral·lels són perpendiculars al segment EF i, per tant, els seus angles són rectes.

i els $\widehat{EGD}$ i $\widehat{DHB}$ són iguals, [EI 33 iterat i Nc 1][1568]
aleshores els altres angles $\widehat{GED}$ i $\widehat{GDE}$ també ho són.
[EI 32 i Nc 3 iterats]

Però hem vist que també ho són als angles $\widehat{HDB}$ i $\widehat{HBD}$.

En conseqüència, l'angle $\widehat{EDG}$ és igual al $\widehat{DBF}$[, que és el $\widehat{DBH}$], [Nc 1]
l'angle $\widehat{GDB}$ és comú
i els $\widehat{GDB}$ i $\widehat{FBD}$ junts fan dos angles rectes. [EI 29]

I, com que són iguals als $\widehat{GDB}$ i $\widehat{GDE}$ junts, [Nc 2]
també mesuren això. [Nc 1]

En definitiva, el segment EDB és un segment rectilini.
I això és el que volíem demostrar.[1569] ♠

B.11*b* [Lm 4] *Disposem d'un semicercle* $\frown ABC$ [*de diàmetre* AC]. *Prenem un punt* D *d'aquest diàmetre i construïm els semicercles* $\frown AD$ *i* $\frown DC$ [*dins el semicercle* $\frown ABC$].[1570] *Tirem la perpendicular* DB [*al diàmetre* AC *pel punt* D]. *La figura que en resulta, limitada per les tres semicircumferències,*[1571] *equival al cercle de diàmetre* BD.

[*Demostració*.] El segment DB és la mitjana proporcional dels segments DA i DC. [EVI 13]

Hi ha, doncs, una figura plana[1572] de costats AD i DC equivalent al quadrat de costat DB. [EVI 17]

A aquest rectangle, hi sumem els quadrats de costats AD i DC.

Dues vegades el rectangle i els dos quadrats —és a dir, el quadrat de costat AC— [EII 4]

Però això no ens cal imposar-ho, només hem de poder garantir que són iguals. Aquest resultat s'aconsegueix per P 4, si s'imposa que són rectes. Nosaltres, en canvi, usem EI 29.

1568. De fet, $\widehat{GFB}$ i $\widehat{DHB}$ són iguals [EI 33]. I ara apliquem Nc 1.

1569. Pappos usa aquest resultat en l'estudi de l'arbeló i demostra que val també per al cas en el qual els cercles són tangents per fora. Vegeu el problema 40 (pàgina 168).

1570. Tots tres en la mateixa banda del diàmetre AC.

1571. Arquimedes l'anomena ἄρβηλος, 'arbeló'. És el ganivet de sabater.

1572. Un rectangle.

equival al doble del quadrat de costat BD més els dos quadrats [de costats AD i DC].

En conseqüència, el semicercle $\frown AC$ equival al cercle de diàmetre AD més els dos semicercles $\frown AD$ i $\frown DC$. [Exii 2 i Ev 15]

De AC en sostraiem aquests dos semicercles.

Ens queden el cercle de diàmetre DB

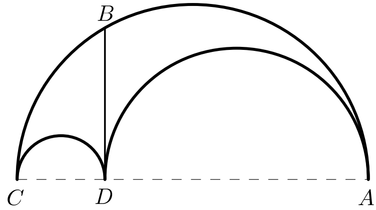


Figura Lm 4

i la figura limitada per les semicircumferències $\frown AC$, $\frown AD$ i $\frown DC$ —anomenada *arbeló* per Arquimedes —,

que són iguals. [Nc 3]

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.11*c* [Lm 5] *Disposem d’un semicercle* $\frown AB$ *de diàmetre* AB. *Prenem un punt* C *d’aquest diàmetre i construïm els semicercles* $\frown AC$ *i* $\frown CB$ [*dins del semicercle* $\frown AB$]. *Pel punt* C, *tracem el segment* CD *perpendicular al diàmetre* AB. [*A cada costat de* CD] *tirem cercles tangents, alhora, a* CD, *al semicercle* $\frown AB$ *i als* $\frown AC$ *i* $\frown CB$. *Aquests cercles són iguals.*

[*Construcció*.] Suposem que un d’aquests cercles és tangent a CD per [el punt] E

i als semicercles $\frown AB$ i $\frown AC$ pels F i G, respectivament.

Tirem el diàmetre HE. [P 1 i Eiii 18]

Veiem que és paral·lel al diàmetre AB, ja que els angles $\widehat{HEC}$ i $\widehat{ACE}$ són rectes. [P 4 i Ei 28]

Unim els segments FH i HA. [P 1]

El segment AE és un segment rectilini. [Lm 1]

I, a més, els AF i CE, convenientment prolongats, es tallen en un punt D,

ja que els angles $\hat{A}$ i $\hat{C}$ junts fan menys de dos angles rectes. [P 5]

Unim els segments FE i EB. [P 1]

El segment EFB és un segment rectilini [Lm 1]

perpendicular a AD,

ja que l'angle $\widehat{AFB}$ és recte perquè està situat en el semicercle $\frown AB$. [EIII 31]

Unim els segments HG i GC. [P 1]

El segment HC és rectilini. [Lm 1]

Unim els segments EG i GA. [P 1]

El segment EA és rectilini. [Lm 1]

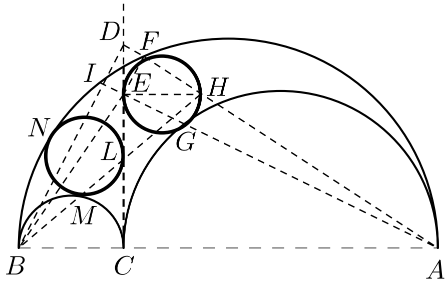


FIGURA Lm 5

El prolonguem fins a I. [P 2]

Unim BI, [P 1]

que és perpendicular a AI. [EIII 31]

Unim DI. [P 1] ♣

[*Demostració.*] Atès que AD i AB són dos segments,
que DC és perpendicular a AB pel punt D, [EI 31]
que BF ho és a DA pel punt B, [EI 31]
que aquestes perpendiculars es tallen per E [P 5]
i que la prolongació de AE fins a I és perpendicular a BI, [EIII 16, porisma]
resulta que el segment BID[1573] és rectilini[1574]
segons l'establert en el tractat *Sobre els triangles rectangles*.[1575]

Els angles $\widehat{AGC}$ i $\widehat{AIB}$ són rectes
i, per tant, els segments BD i CG, paral·lels. [EI 28]

En conseqüència, AD és a DH —que és com AC a HE— com AB a BC. [EVI 2][1576]

1573. És a dir, BI i ID.

1574. Les altures d'un triangle es tallen en un punt, l'ortocentre. PLA (2016*b*), exercici 41, p. 65.

1575. Aquest tractat (*Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων*) només l'esmenten els matemàtics àrabs.

1576. Atès que els segments AC i HE, i DB i HC són paral·lels, resulta que AD és a DH com AC a HE [EVI 4], i AD a DH com AB a BC [EVI 4]. Per tant, les raons de AD i DH, de AC i HE, i de AB i BC són iguals [EV 11 o Nc 1].

I, en definitiva, els rectangles [de costats] AC i CB, i AB i HE són equivalents. [Evi 16]

De manera semblant, en el cas del cercle ○ LMN podem establir que els rectangles [de costats] AC i CB, i el seu diàmetre i AB són equivalents.

D'això en resulta que els diàmetres dels cercles ○ EFG i ○ LMN són iguals. [Nc 1 i Evi 1]

Per tant, els cercles [○ LMN i ○ $EFHG$] també ho són. [Diii 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.11*d* [Lm 6] *Disposem d'un semicercle ⌓ ABC de diàmetre AC. Prenem un punt D. Suposem que AD és una vegada i mitja DC. Construïm els semicercles ⌓ AD i ⌓ DC [de diàmetres AD i DC]. Considerem també un cercle ○ EF tangent als tres semicercles. El seu diàmetre és paral·lel al AC. Volem determinar la raó entre tots dos.*

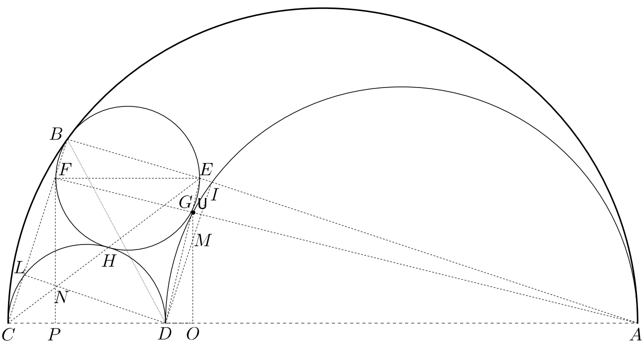


Figura Lm 6

[*Construcció.*] Unim AE i EB, i CF i FB. [P 1]

Les línies [conjuntes] CB i AB són rectilínies [Lm 1] i les FGA i EHC també ho són. [Lm 1]

De manera anàloga, considerem els segments DE i DF, DI i DL, i EM i FN.[1577]

Prolonguem els dos darrers segments fins als punts O i P. [P 2]

En el triangle △ AED, AG és perpendicular a ED [Eiii 31] i DI a AE. [Eiii 31]

1577. Els segments AB i CB tallen els semicercles ⌓ AD i ⌓ CD pels punts I i L, respectivament. DI talla AF per M i DL talla CE per N.

Els segments AG i DI es tallen pel punt M
i, per tant, com vam veure en l'estudi sobre les propietats dels triangles i hem usat en el lema anterior,
el segment EMO és perpendicular a AD.

De manera semblant, FP ho és a CA.

I, atès que els angles amb vèrtex a L i B són rectes, [EIII 31]
els segments DL i AB són paral·lels, [EI 28]
i els DI i CB també. [EI 28]

Per tant, AD és a DC com AM a FM, [EVI 2]
és a dir, com AO a OP. [EVI 2]

I CD és a DA com CN a NE,
és a dir, com CP a PO.

Però AD és una vegada i mitja DC.

Per tant, AO és una vegada i mitja OP i OP una i mitja CP. [EV 15 o DV 5]

En definitiva, els segments AO, OP i PC són proporcionals
i ho són en la mesura que PC és quatre, OP sis, AO nou.

I, òbviament, CA és dinou.[1578]

I, atès que PO i EF són iguals, [EI 33]
la proporció de AC a EF és dinou a sis. [EV 7]

Hem trobat, doncs, la proporció que buscàvem.

I, si la raó entre AD i DC és una altra,
per exemple, la que hi ha entre tres i quatre o cinc i quatre, o qualsevol altra,
hem de raonar tal com hem fet [en el cas precedent].[1579]
I això és el que volíem demostrar. ♠

B.11*e* [Lm 8] *Sigui AB una corda d'un cercle. La prolonguem un segment BC igual al radi. Unim el punt C amb el centre D. El prolonguem fins a E. L'arc $\widehat{AE}$ equival a tres arcs $\widehat{BF}$.*[1580]

1578. $CA = CP + PO + OA$.

1579. Arquimedes posa de manifest que el mètode que ha donat és general.

1580. Una manera de trisecar l'angle. Vegeu també les solucions que es proposen a PLA (en premsa *b*).

[*Demostració*.] Tirem EG paral·lel a AB. [EI 31]

Unim DB i DG. [P 1]

Els angles $\widehat{DEG}$ i $\widehat{DGE}$ són iguals. [EI 5][1581]

Per tant, l'angle $\widehat{GDC}$ equival al doble de l'angle $\widehat{DEG}$. [EI 32]

I els $\widehat{BDC}$ i $\widehat{BCD}$ són iguals. [EI 5][1582]

Però els angles $\widehat{CEG}$ i $\widehat{ACE}$ també ho són. [EI 29]

Per consegüent, l'angle $\widehat{GDC}$ equival al doble del $\widehat{CDB}$ [Nc 5′]

i el $\widehat{BDG}$ a tres vegades el $\widehat{GDC}$.

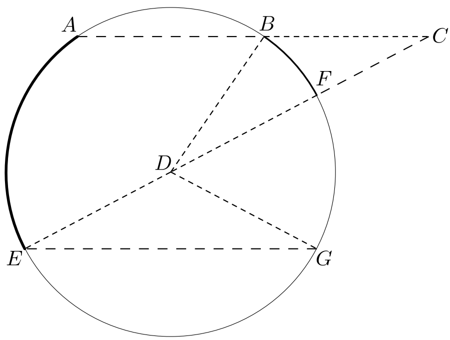


FIGURA Lm 8

I, a més, l'arc $\wideparen{BG}$ —que és igual al $\wideparen{AE}$—, és el triple de l'arc $\wideparen{BF}$. [EIII 26]

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.11*f* [Lm 12] *Considerem un semicercle* ⌓$ADEB$ *de diàmetre* AB. *Per un punt exterior* C*, tirem dos segments tangents al semicercle pels punts* D *i* E. *Unim* EA *i* DB. *Es tallen en el punt* F. *Unim* CF *i el prolonguem fins al punt* G. *El segment* CG *és perpendicular al diàmetre* AB.[1583]

[*Demostració*.] Unim DA i EB.]P 1]

L'angle $\widehat{ADB}$ és recte. [EIII 31]

De retop, els altres dos angles del triangle $\triangle DAB$ junts fan un angle recte. [EI 32]

I, per tant, valen el mateix que l'angle $\widehat{AEB}$, que també és recte. [P 4 i EIII 31]

1581. El triangle $\triangle EDG$ és isòsceles, ja que DE i DG són radis del cercle de centre D i, per DI 15, iguals.

1582. Atès que, per construcció, els dos costats del triangle $\triangle CBD$ són iguals.

1583. Totes les operacions geomètriques estan justificades per allò que s'estableix als *Elements* d'Euclides.

D'això es dedueix que els angles $\widehat{DAB}$ i $\widehat{AEB}$ junts són iguals als $\widehat{FBE}$ i $\widehat{FEB}$ junts. [Nc 2][1584]

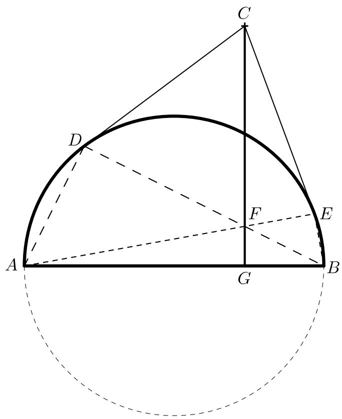


Figura Lm 12

En definitiva, són iguals a l'angle extern $\widehat{DFE}$ del triangle $\triangle FBE$. [Ei 32]

Tenim que el segment CD és tangent a la circumferència,
que el DB n'és una corda,
que els angles $\widehat{CDB}$ i $\widehat{DAB}$ [Eiii 32]
i, finalment, que els $\widehat{CEF}$ i $\widehat{EAB}$, també ho són. [Eiii 32]

Per tant, els angles $\widehat{CEF}$ i $\widehat{CDF}$ junts són iguals al $\widehat{EAB}$. [Nc 2 i 1]

I, en virtut d'un resultat del nostre tractat *Sobre les figures quadrilàteres*,[1585]
tenim que el segment CF és igual tant al CD com al CE.[1586]

Per tant, els segments CF i CD són iguals
i, de retop, els angles $\widehat{CFD}$ i $\widehat{CDF}$ també ho són, [Ei 5]
és a dir, a l'angle $\widehat{DAG}$. [Eiii 21]

Però els angles $\widehat{CFD}$ i $\widehat{DFG}$ junts fan dos angles rectes [Di 10]
i, per tant, els angles $\widehat{DAG}$ i $\widehat{DFG}$ junts fan dos angles rectes. [Nc 2]

1584. Afegim l'angle $\widehat{FBE}$ als dos angles rectes. És a dir, afegim l'angle $\widehat{FBE}$ als dos membres de la igualtat $\widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 1$ angle recte $= \widehat{AEB}$.

1585. És l'única menció d'aquesta obra que coneixem i probablement va ser afegida pel traductor àrab.

1586. Aquí s'usa l'enunciat següent del text esmentat: «Si entre dos segments iguals que es tallen, com ara CE i CD, en tirem uns altres dos, com ara DF i EF; i, si l'angle $\hat{F}$ que aquests dos segments determinen és igual a dos angles determinats per dos segments que es tallen, com ara els angles $\hat{E}$ i $\hat{D}$, el segment que va del punt de trobada al de tall, és a dir, el segment CF és igual als dos segments que es tallen, en concret, CD i CE.» Per a una demostració per l'absurd del comentarista àrab Almochtasso-Abul-Hassan, Eecke (1960), vol. ii, nota 1, p. 537, i per a la directa de Borelli, Mugler (1971*b*), nota 1, p. 156. Vegeu el problema 2.3.1 (pàgina 169). Els segments CE i CD són iguals [Eiii 37].

Pel que fa al matemàtic àrab, Steinschneider (1863), p. 25-27, i 34.

Ara bé, els altres dos angles del quadrilàter ⌂ $ADFG$, $\widehat{ADF}$ i $\widehat{AGF}$, junts valen dos angles rectes. [Eɪ 32, Nc 2 i 3]

Però l'angle $\widehat{ADB}$ és recte
i, en conseqüència, el $\widehat{AGC}$ també ho és. [Nc 3]

En definitiva, el segment CG és perpendicular al diàmetre AB. [Dɪ 10]

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.11*g* [Lm 14] *Considerem un semicercle* ⌓ AB*. En el diàmetre* AB *determinem dos segments* AC *i* BD *iguals. Al seu damunt construïm els semicercles* ⌓ AC*,* ⌓ CD *i* ⌓ DB*.*[1587] *El centre dels dos semicercles* ⌓ CD *i* ⌓ AB *és el punt* E*. Tirem* EF *perpendicular a* AB*. El prolonguem fins al punt* G*. El cercle de diàmetre* GF *equival a l'àrea de la figura limitada pels semicercles: inicial, laterals i mitjà.*[1588]

[*Demostració.*] Atès que E dimidia CD
i que hi hem afegit AC,
els quadrats de costats DA i CA junts equivalen al doble dels dos quadrats de costats DE i EA junts. [Eɪɪ 10]

Però FG i DA són iguals.

Per tant, els quadrats de costats FG i AC junts equivalen al doble dels quadrats de costats DE i EA junts. [P 2 iterat][1589]

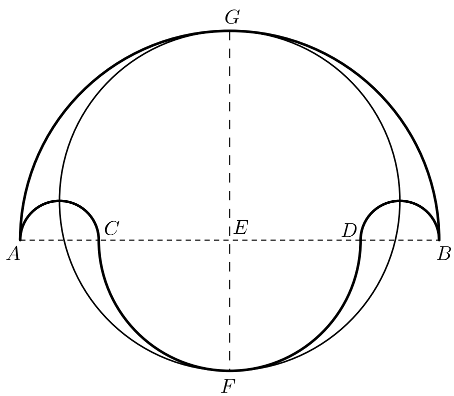


Figura Lm 14

Ara bé, AB és el doble de AE, i CD de ED.

I això vol dir que els dos quadrats de costats AB i CD junts equivalen a quatre vegades els quadrats de costats DE i EA junts [Nc 2]

1587. Els semicercles ⌓ AC i ⌓ DB en la direcció de l'original, i l'altre, el ⌓ CD, cap a l'altra banda.

1588. Arquimedes anomena aquesta figura el *σάλινον*, 'saler'.

1589. Usem el fet que els quadrats de costats iguals són equivalents, iguals en el sentit de superposables [Eɪ 36].

—és a dir, el doble dels quadrats de costats GF i AC junts. [Nc 5′]

De manera semblant, també els dos cercles de diàmetres AB i DC equivalen al doble dels que tenen els diàmetres GF i AC.

Així doncs, la meitat dels cercles de diàmetres AB i CD equival a la meitat dels de diàmetres GF i AC. [Nc 6′]

Però el cercle de diàmetre AC és igual als dos semicercles AC i BD. [Di 15]

Sostraiem, de l'un i de l'altre, els semicercles comuns de diàmetres AC i BD.

I així obtenim la figura limitada pels quatre semicercles ⌓AD, ⌓CD, ⌓DB i ⌓AC [el «saler»],
que equival al cercle de diàmetre FG. [Nc 3]

I això és el que volíem demostrar. ♠

B.12 Pb: *El problema dels bous*

p. 143 Presentem, ara, el famós problema aritmètic dels bous precedit d'alguns textos clàssics. Els dos primers —de l'*Odissea* d'Homer i de l'*Eneida* de Virgili— fan referència a l'illa Tinàcria. El següent és l'escoli a 165 e del *Càrmides* de Plató.[1590] I el darrer, de *Les lleis*, fa referència, a la logística, és a dir, a l'aplicació pràctica dels nombres.

1590. Per coherència, proporcionem també unes línies de *Càrmides* que parlen de la ciència de totes les ciències, és a dir, de l'epistemologia.

En el *Càrmides*, Sòcrates dialoga amb Càrmides i el jove Críties. Tracten dos temes majors. L'un pràctic: el significat de la paraula grega *σωφροσύνη*, que significa 'seny', 'temperança' o 'prudència', aplicada a la felicitat. I l'altre, que és el que ens interessa, teòric: la possibilitat d'una ciència de la ciència, o sigui, d'una epistemologia. És un dels diàlegs més antics de Plató. Com és habitual en els seus diàlegs de joventut, els interlocutors no aconsegueixen arribar a una definició satisfactòria però, no obstant això, la discussió toca molts punts importants i engrescadors.

Sòcrates narra el diàleg i diu que acaba de tornar de la Batalla de Potidea (Μάχη της Ποτἴδειας), ciutat assetjada i conquerida pels atenencs al començament de la guerra del Peloponès (Πελοποννησισκός Πόλεμος).

Aquesta segona part del text lliga amb el de Pla (2018), p. 21-22.

B.12*a* Dues referències clàssiques a Tinàcria

B.12*a*₁ A l'Illa del Trident faràs cap llavors,[1591]
on pasturen en munió les vaques del Sol i ses grasses ovelles:
de vaques set ramats i altres tants d'ovelles formoses,
de cinquanta cadascun.
No neixen però tampoc no es corrompen
perquè les guarden Faetusa i Lampècia,
dues nimfes de bon veure,
filles que a Hèlios, de l'Altura, va donar la divina Neera.
Quan la mare augusta les va haver engendrat i nodrit,
les va enviar lluny, a l'illa del Trident,
perquè tinguessin cura dels moltons paterns i de les grasses vaques.
Si tu, Odisseu, no els fas cap mal,
i et deleixes només per tornar a Ítaca,
crec que hi arribaràs,
després de passar penúries.
Però, si els fas mal,
t'auguro una gran desfeta del vaixell i dels teus companys.
I tu mateix, un cop hagis perdut tots els companys,
arribaràs sol [a Ítaca] passat molt de temps[1592]
i totalment desfet.[1593]

B.12*a*₂ [. . .] Damunt un balmat xuclador, ens enfilàrem als astres,
i quan l'onada reculà ens deixà dins l'abisme, fins al Manes.
Dins els espadats rugien les roques tres cops i aparegué l'escuma
i dels estels caigué la rosada.
Amb el Sol, el vent ens deixà sense forces
i, desconeixedors del rumb, recalàrem a les ribes dels Ciclops.
És un port arrecerat dels vents, enorme i tranquil.

1591. L'illa de Tinàcria o del Trident és l'illa de Sicília, la terra natal d'Arquimedes.

1592. Ítaca, la pàtria d'Odisseu, és una illa de Grècia situada en la mar Jònica, a l'est de Cefalònia.

1593. Homer (1983), cant xii, versos 120-126, edició catalana, vol. i, p. 264-265.

L'Etna, de prop, dins trons de runes terribles,
tantost gita al cel una boira ennegrida,
on giravolten fumalls enganxosos i cendres brillants,
com s'alça en espirals de foc que arriben a besar les estrelles
o eructa i escup, ràpides, roques i tot el que és dins la muntanya.
Fent esgarips, aglomera en l'aire enormes pedres
i bull fins a la font de les seves entranyes.
Diuen que el cos, mig cremat, d'Encèlodes,
s'agita dins aquesta mole, l'Etna, gegant,
i exhala per les esquerdes el foc que respira.
Quan cansat es gira, Tinàcria s'estremeix sencera
i tot el cel es cobreix de fum.[1594]

B.12*b* Unes línies de *Càrmides* i l'escoli a 135 e

B.12*b*₁ [Críties] —Això, Sòcrates[1595] —m'ha dit—, és impossible.

Ara bé, si penses que les meves declaracions precedents condueixen necessàriament a aquesta conclusió, prefereixo retractar-me'n d'una part.

M'estimo més dir que m'he expressat de manera inadequada, abans que acceptar que algú que no es coneix a si mateix pugui ser savi.

I diria més: la saviesa consisteix precisament a conèixer-se a si mateix. I amb això estic d'acord amb l'autor de la inscripció de Delfos.

Penso que s'ha esculpit al frontó del temple com a salutació del déu als que s'hi apropen, en lloc de la salutació ordinària «alegra't», com assenyalant que aquesta fórmula no és l'apropiada.[1596]

Ens hem de saludar, doncs, dient «sigues savi» i no pas «alegreu-vos».

El déu s'adreça als pelegrins que entren al temple amb uns termes diferents dels que empren els homes. Això pensava, crec, l'autor de la inscripció «sigues savi».

I ho diu, com un endeví, d'una manera força enigmàtica. Perquè «coneix-te a tu mateix» i «sigues savi» és el mateix.

1594. Virgili (1972), llibre iii, versos 566-582, p. 230-231.
1595. Sòcrates és el narrador d'aquest diàleg de Plató.
1596. Per als aforismes, Pla (2016*b*), § 2.1, p. 62-65.

Però podria haver-hi una diferència com s'esdevé entre els que han fet posteriorment altres inscripcions: «res en excés» i «sigues caut, ja que ets a prop de la ruïna». Consideren el «coneix-te a tu mateix» un consell i no la salutació que el déu adreça als vianants.

I no només això, també volen oferir-nos en llurs inscripcions els seus consells, i com a salutacions, però també com a consells útils.

Per què t'explico tot això?

Perquè, Sòcrates, abandono tot el que t'he dit fins ara. Potser la raó està de part meva, o potser de part teva. Res del que hem dit fins ara no és gaire precís.

Ara estic preparat per a dialogar amb tu i defensar-me amb arguments sòlids, si no admets que ser savi és conèixer-se un mateix.

[Sòcrates] —Críties —li digué—, et plantes davant meu com si jo afirmés que sé la resposta d'allò que pregunto, i que només cal que ho vulgui per estar d'acord amb tu.

I això no és pas així, en absolut.

Més aviat camino sempre al teu costat i darrere del que se'ns posi per davant perquè verdaderament no ho sé.[1597]

Un cop ho hagi examinat, podré dir si estic o no d'acord amb tu.

Tingues paciència, doncs, fins que ho hagi analitzat i vist bé.

[Críties] —Analitza-ho, doncs —em va dir.

[Sòcrates] —És el que faig —vaig respondre.

Si la saviesa consisteix a conèixer, és clar que és una ciència i la ciència d'alguna cosa. O no és així?

[Críties] —Efectivament, això és el que és —ha afirmat— i a més, d'un mateix.

[Sòcrates] —I la medicina —li vaig dir— no és un saber de la salut?

[Críties] —Així és.

[Sòcrates] —Doncs bé —li vaig dir—, si em preguntes: «essent la medicina la ciència de la salut, quina és la seva utilitat per a nosaltres i què produeix?»,

1597. Retrobem l'afirmació socràtica: «Jo no sé res, i aquesta és l'única cosa de la qual estic segur.» Pla (2016*b*), § 4.1, p. 268-276 i, en particular, 4.14, p. 273-276.

et respondré: «Una cosa preciosa: la salut», i crec que em concediràs que aquesta és una excel·lent producció.

[Críties] —T'ho concedeixo.

[Sòcrates] —I si, a més, em preguntes per l'arquitectura —que és la ciència de saber edificar— i per l'efecte que produeix, et diré que el seu efecte són els edificis. I així, amb les altres tècniques.

La saviesa, segons afirmes, és conèixer-se un mateix. És, doncs, una mena de ciència.

Per tant, Críties, hauràs de poder respondre la pregunta: «Què aporta d'excel·lent que sigui digne del seu nom?»

Respon-me!

[Críties] —Sòcrates —va respondre—, no ho planteges correctament. Perquè la saviesa no és una ciència de la mateixa naturalesa que les altres,

de la mateixa manera que les altres no ho són pas entre si.

Les tractes com si fossin anàlogues i no ho són.

Digues-me, doncs —va afegir—, quina és l'obra que proporciona l'art del càlcul o de la geometria com la casa ho és de la arquitectura i el mantell de l'art de teixir, o altres obres semblants que es podrien mostrar de moltes altres arts?[1598]

Pots mostrar-me-la? No podràs.

[Sòcrates] —Certament, però puc, si més no, mostrar-te de quins objectes cada una d'aquestes ciències és ciència. Són objectes molt diferents de la mateixa ciència.

Per exemple, l'aritmètica és la ciència del parell i del senar, de les seves propietats i relacions. No ho creus?

[Críties] —Sens dubte.

[Sòcrates] —I el parell i el senar difereixen de l'aritmètica mateixa?

[Críties] —No pot ser de cap altra manera.

[Sòcrates] —I l'estàtica és la ciència dels objectes pesants i lleugers. Però allò que és pesant i lleuger difereix de l'estàtica mateixa. No et sembla?

1598. Aquí —165 e— s'insereix l'escoli, B.12b_2.

Pots mostrar-me-la? No podràs.

[Críties] —I tant!

[Sòcrates] —Digues-me, doncs: quin és l'objecte de la ciència de la saviesa que és diferent de la saviesa mateixa?[1599]

B.12b_2 [Escoli a *Càrmides*, 165 e] La logística és la ciència que tracta dels objectes enumerats, i no pas dels nombres.

No considera els nombres en sentit estricte, sinó que tracta l'1 com a unitat i l'objecte numerat com si fos un nombre. És a dir, contempla el 3 com una tríada i el 10 com una dècada, i els aplica els teoremes de l'aritmètica.[1600]

Així doncs, la logística té en una mà el que es coneix com el problema dels bous d'Arquimedes i a l'altra, nombres «melites», *μηλίτας*, i «fialites», *φιαλίτας*.[1601]

En altres menes de problemes es consideren els nombres de cossos sensibles,

però es tracten com a absoluts. L'objecte d'aquest estudi és tot allò que pot ser numerat.

Aquestes branques inclouen els mètodes grecs i egipcis de multiplicació i divisió[1602]

i també els d'addició i divisió de fraccions,[1603]

amb els quals exploren els secrets que s'oculten dins cada problema, mitjançant la teoria dels nombres triangulars i poligonals.

L'objectiu és proporcionar una base comuna a les relacions de la vida que sigui útil a l'hora de fer contractes,

però els objectes sensibles s'hi tracten com si fossin absoluts.[1604]

1599. Plató (1932), 164 c5-166 b, p. 26-28.

1600. Pla (2016*b*), p. 106, 126, 139, 237, 410 i 411.

1601. Els primers fan referència a grapats de pomes o d'ovelles i els segons a mesures de líquids. Procle de Lícia (1970), edició anglesa, p. 33 i la nota 40.5.

1602. Pla (2016*a*), § 1.8.2, p. 48-50, i § 1.8.3, p. 50-54.

1603. Amb clara referència a les operacions entre fraccions de la matemàtica egípcia. Pla (2016*a*), p. 69-72.

1604. Thomas (1939), vol. i, p. 18-19.

B.12*c* Un text de *Les lleis* de Plató

Un text de *Les lleis* de Plató que fa referència a l'aprenentatge dels joves egipcis.[1605]

[L'ATENENC] Heus aquí tot el que ha d'aprendre un home lliure en cada una d'aquestes disciplines: precisament el que els nens egipcis, tots sense distinció, estudien amb els primers elements de les lletres.

En primer lloc, hem trobat la manera d'ensenyar-los el càlcul jugant i entretenint-los. Per exemple, arriben a saber repartir un nombre de pomes o de corones en parts iguals a diversos grups, uns més grans i uns altres més petits [de manera que el repartiment sigui exacte].

I en els exercicis de lluita i boxa, fan combinacions, alternativament o successivament, seguint l'odre natural, en els llocs parells i senars.

De vegades, mitjançant la barreja de petites copes d'or, plata i altres metalls que els nens han de distribuir, tot jugant, en sèries d'un mateix tipus.

Tot això els obliga a recórrer a la ciència dels nombres.

Aquests entreteniments els preparen per a saber distribuir bé un camp, conduir i posar un exèrcit en ordre i administrar adequadament els seus afers casolans.

En general, l'efecte de tot plegat és fer un home capaç de superarse a si mateix,
de despertar la seva ment a la saviesa
de ser apte per a treure el millor dels seus talents.

I, quan estudien les mesures de longitud, amplada i altura, s'alliberen de la ignorància ridícula i vergonyosa que, en aquestes qüestions, tenen per naturalesa els homes.

[CLÍNIES] De quina ignorància parles?

[L'ATENEC] Estimat Clínies!, jo mateix he après i comprès la meva deficiència en totes aquestes coses molt tard.

1605. És un text interessant. Un cop indicat que hi ha una logística egípcia, l'atenenc s'endinsa en qüestions que, pel que sabem ja se les havien plantejat els pitagòrics. Manté, efectivament, un paral·lelisme amb el problema dels bous.

Em vaig quedar molt sorprès quan em vaig adonar que la meva ignorància, pròpia dels animals més estúpids, era impròpia dels homes.

I em vaig avergonyir, no només del meu desconeixement, sinó també del de tots els hel·lens.

[CLÍNIES] Explica't millor, estranger! En què consisteix aquesta ignorància?

[L'ATENEC] Ho estic fent. Però puc explicar-t'ho millor fent-te una pregunta molt simple. Saps què és la longitud?[1606]

[CLÍNIES] Sí.

[L'ATENEC] I la superfície?

[CLÍNIES] Certament.

[L'ATENEC] Saps que aquestes són dues coses i una tercera proporciona el volum?[1607]

[CLÍNIES] En efecte, com no havia de saber-ho, això?

[L'ATENEC] I no et sembla que totes tres són commensurables?

[CLÍNIES] Així mateix ho crec.

[L'ATENEC] I creies, doncs, que el segment és commensurable amb la línia, la superfície amb la superfície i el sòlid amb el sòlid?

[CLÍNIES] Absolutament.

[L'ATENEC] Ara bé, si aquestes dimensions no són ni absolutament commensurables ni parcialment, o unes ho són però unes altres no, mentre que tu creus que ho són totes,
quina disposició tens respecte del teu esperit en relació amb aquestes qüestions?

[CLÍNIES] Totalment negativa i deplorable.

[L'ATENEC] I si ens fixem en el segment i la superfície en relació amb el sòlid o la superfície en relació amb la línia?

I no és cert que els grecs pensem que totes aquestes dimensions són recíprocament commensurables?

[CLÍNIES] Certament.

[L'ATENEC] I, si resulta que tampoc en aquest cas no són commensurables, malgrat que els grecs ho creguem així, no seria just que, ple de

1606. La línia.
1607. El sòlid.

confusió, els digui en nom de tots: «Heus aquí, oh, els més erudits dels grecs!, una de les qüestions la ignorància de la qual, com acabem de dir, ens deshonra? És, però, una veritat elemental i, per tant, assolir-ne el coneixement no és cap proesa.»

[CLÍNIES] Com podria estar-hi en desacord?

[L'ATENEC] Hi ha altres coneixements, emparentats amb aquests, en els quals cometem errors semblants.

[CLÍNIES] Quins són?

[L'ATENEC] Els lligams entre commensurables i incommensurables i la naturalesa de les relacions mútues. Són qüestions que cal examinar i aclarir, si no volem caure en la nul·litat.

Aquesta mena de qüestions són les que ens hem de plantejar com a autèntics problemes.

Són molt més agradables que el jaquet dels ancians,[1608] són jocs en els quals val la pena rivalitzar.[1609]

B.12*d* El problema dels bous

p. 44 i 143-147 És un problema aritmètic que Arquimedes exposa a Eratòstenes i que es coneix com «el problema dels bous».

[El problema dels bous d'Arquimedes][1610]

Amic!:
si has heretat la saviesa,
calcula amb tota mena de cura

1608. DIEC (1995): «Joc entre dos jugadors que es juga en un tauler que té una sèrie de cases tot al voltant i en què cada jugador ha de fer avançar les seves fitxes procurant entrebancar l'avançament de les del contrari.»

1609. *Les lleis*, 819 a-820 d, a PLATÓ (1966-1969), p. 1410-1411, o en línia a <https://fr.wikisource.org/wiki/Les_Lois_(trad._Cousin)/Livre_septi%C3%A8me#cite_note-13>.

1610. Molts autors l'acompanyen d'una introducció: «Un problema que Arquimedes havia resolt amb epigrames i que, en una carta a Eratòstenes, havia plantejat als erudits d'Alexandria» (*Πρόβλημα ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρέν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθενεν τόν Κορηναιον ἐπιστιλῇ*). FRAJESE (1974), p. 627.

quina és la quantitat de bous del Sol
que, en una època ja passada, pasturaven a les planures de l'illa de Tinàcria.[1611]

[1][1612] Estaven distribuïts en quatre ramats de colors diferents.

Els d'un ramat eren blancs com la llet,
els de l'altre ben negres,
els del tercer marrons
i clapejats eren els del darrer ramat.

Cada un d'aquests ramats estava format per un bon nombre de bous repartits d'acord amb les proporcions següents:

El nombre de bous blancs era igual a la meitat més una tercera part dels negres, més els marrons.

El de bous negres, en canvi, era igual a la quarta part i la cinquena dels clapejats, més els marrons.

Fixa't que el nombre de clapejats era igual a la sisena part i la setena dels blancs, més els marrons.

Les vaques, en canvi, es repartien d'aquesta altra manera.

El nombre de vaques blanques era precisament la tercera part més la quarta de tot el ramat negre, bous i vaques.

Mentre que el nombre de les negres era la quarta part més la cinquena de tot el ramat clapejat.

Totes aquestes havien anat a pasturar amb els bous.

Les clapejades eren iguals en nombre a la cinquena part més la sisena de tot el ramat marró.

I, per fi, les vaques marrons eren la meitat de la sisena part més la setena del ramat blanc.

Amic!,
si em pots dir quants eren els bous del Sol
i quin és, en particular, el nombre de bous i vaques de cada color,
ningú no et podrà qualificar d'ignorant ni de poc hàbil,

1611. Nota 1591 (pàgina 559).

1612. És la part egípcia del problema en el segment de *Les lleis* de Plató. Vegeu B.12b_2 (pàgina 563), nota 1603 (pàgina 563), i B.12c (pàgines 564-566).

però tampoc no se't podrà considerar entre els savis.[1613]

Tanmateix, observa, ara, la forma diversa que tenien els bous.[1614]

[2][1615] Quan s'ajuntaven els bous blancs i els bous negres s'obtenia un grup tan compacte que podien col·locar-se fent una figura que tenia l'amplada igual que la profunditat,
i el quadrat que formaven cobria completament les planures de Tinàcria.[1616]

[3] D'altra banda, els marrons i clapejats junts, sense cap bou dels altres dos colors,
es podien agrupar de manera que la primera fila solament en contingués un i tots junts formessin una figura triangular.[1617]

Amic, si trobes totes aquestes coses
i, concentrant tot el teu enginy,
expresses les mides d'aquestes multituds,
se't glorificarà per haver assolit la victòria i se't jutjarà com un excellent coneixedor d'aquesta ciència.[1618]

1613. Fins aquí les set condicions que menen a equacions lineals o de primer grau. Tanmateix, hi ha vuit quantitats, entre bous i vaques, desconegudes. El problema resta, doncs, «indeterminat».

Potser no se'l podrà col·locar entre els savis però la dificultat del problema és molt gran i van caldre molts segles per a resoldre'l completament.

1614. Arquimedes afegeix una nova condició.

1615. Aquest ítem i el següent són d'inspiració pitagòrica. Vegeu Pla (2016*b*), § 2.4.6, ítem *e*, p. 126-132.

1616. Els bous blancs i els negres junts es poden disposar de manera que formin un quadrat. Aquesta condició no lleva la indeterminació al problema.

1617. Els bous marrons i els clapejats junts es poden disposar de manera que formin un triangle. Aquesta condició no lleva indeterminació al problema.

1618. Vegeu el text grec, en línia, a Lessing (1773). S'ha conservat, independentment dels altres, a *Parisinus græcus 2448* (segle IV, amb la sigla P, que, actualment, es ressenya «Paris, BNF, gr. 2448»). En línia a <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b107226329/f61.item>, p. 57-59. Per a la síntesi del seu contingut, <https://archivesetmanuscrits.bnf.fr/ark:/12148/cc1003057>.

B.13 Os: *L'ostomaquió*

Vegem, ara, el treball sobre l'ostomaquió tal com ens ha arribat. El presentem en dues parts: la primera inclou el text grec del palimpsest i la segona el text àrab, traduït a l'alemany per Suter.[1619] p. 147-148

B.13.1 El text grec d'Os

Presentem la introducció i la part geomètrica, separadament.

B.13.1*a* La introducció

[*Introducció.*] Atès que el joc de peces anomenat *ostomaquió* admet diverses possibilitats de col·locació, m'ha semblat adient tractar els trossos dels quals es compon i analitzar les figures que s'hi poden comparar.

Indico, a més, els angles que, presos de dos en dos, fan dos angles rectes,
per tal de conèixer les disposicions de les figures que s'hi poden fer i saber si els costats que formen estan alineats o es desvien lleugerament de manera imperceptible.

Això requereix habilitat.

I, encara que els costats se separin una mica,
no per això hem de refusar les figures resultants.

És possible compondre aquestes peces de moltes maneres diferents i formar un gran nombre de figures
perquè es poden desplaçar d'un lloc a un altre.

Com que s'hi aconsegueixen figures equivalents i semblants a una mateixa figura
o a dues que, juntes, són equivalents i semblants a unes altres dues juntes,
encara se'n poden obtenir moltes més gràcies a la transposició.

1619. Dijksterhuis (1987), p. 908-912; Mugler (1971*b*), p. 68-75; Ortiz-García (2009), p. 257-263.

Trobem textos divulgatius a Grupo Alquerque (2005) i a Morelli (2009).

Comencem veient una proposició que té a veure amb aquesta qüestió.

B.13.1*b* La part geomètrica

Vegem, ara, les tres proposicions geomètriques.

B.13.1*b*$_1$ [Os 1] *Sigui* $\square FC$ *un paral·lelogram rectangular.*[1620] *Dimidiem el costat* EF *pel punt* K*. Pels punts* C *i* B*, tirem els segments* CK *i* BE*. Volem veure que [el segment]* CB *és més gran que [el segment]* BH*.*[1621]

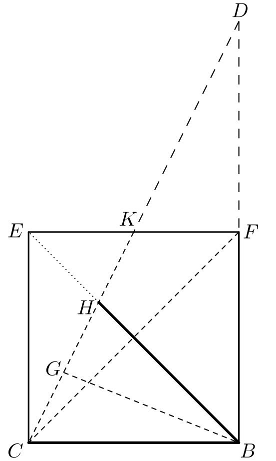


Figura Os 1

[*Demostració.*] Prolonguem CK i BF. [P 3]

Es tallen en el punt D. [P 5]

Tirem el segment CH. [P 1]

EK i KF són iguals i CE —que és el mateix que BF— ho és a FD. [Ei 4][1622]

Per tant, CF és més gran que FD. [Ei 19 o Ei 47]

En conseqüència, l'angle $\widehat{FDC}$ ho és més que el $\widehat{FCD}$, [Ei 18]
els angles $\widehat{HBD}$ i $\widehat{FCB}$ són iguals, perquè valen la meitat d'un angle recte, [P 4 i Nc 6′]
i l'angle $\widehat{CHB}$ és més gran que el $\widehat{HCB}$, ja que l'angle $\widehat{CHB}$ és igual als dos interns oposats —és a dir, a $\widehat{HBD}$ i $\widehat{HDB}$ junts. [Ei 32]

En definitiva, la base CB és més gran que la [base][1623] BH. [Ei 19][1624] ♠

B.13.1*b*$_2$ [Os 1, porisma] a*) L'angle* $\widehat{CGB}$ *és obtús i el contigu agut.* b*) L'angle* $\widehat{BGH}$ *és agut.*

1620. De fet, es tracta d'un quadrat.

1621. Tots els passos estan justificats basant-se en Ei 10, Ei 46 i P 1.

1622. Els angles $\widehat{DFK}$ i $\widehat{CEK}$ són rectes i, per tant, iguals [P 4].

1623. El text diu: *βάσις*.

1624. $\widehat{FDC} > \widehat{FCD}$ [Ei 18]. $\widehat{HBD} = \widehat{FCB}$ [Di 22 i Ei 6]. Per tant, $\widehat{FDC} + \widehat{HBD} > \widehat{FCD} + \widehat{FCB}$ [Nc 4′]. Però $\widehat{FDC} + \widehat{HBD} = \widehat{CHB}$ [Ei 32] i $\widehat{FCD} + \widehat{FCB} = \widehat{HCB}$. Per tant, $\widehat{CHB} > \widehat{HCB}$ [Nc 4′].

[*Demostració.*] *a*) Dimidiem el segment CH pel punt G. [Eɪ 10]

Els segments CG i GH són iguals i GB comú

i, per tant, dos costats del triangle $\triangle BGC$ són iguals a dos costats del $\triangle BGH$.

I hem vist que la base CB és més gran que la BH.

Per tant, l'angle [$\widehat{CGB}$] ho és més [que l'angle $\widehat{GHB}$]. [Eɪ 25][1625]

I l'angle $\widehat{CGB}$ és obtús i el contigu agut.

[Eɪ 13, Dɪ 11 i 12][1626] ♠

b) D'altra banda, l'angle $\widehat{CBH}$ és la meitat de l'angle recte,

ja que es tracta d'un paral·lelogram amb els quatre angles iguals[1627]

i $\widehat{BGC}$ és agut.[1628]

I, trivialment, $\widehat{BGH}$ és agut. ♠ ♠

[Els angles del triangle $\triangle BCH$ són diferents. La figura es compon i es divideix així.[1629]]

B.13.b_3 [Os 2] *Sigui* $\square$ *AB una àrea rectangular amb un costat doble de l'altre, és a dir, CA doble de CB. La seva diagonal AB té una espessor i* [...][1630] *no poden encaixar ateses les disposicions de les seccions que arrengleren.*

I, per E, tirem el segment EF paral·lel a BC. [Eɪ 31]

Aleshores, $\square CF$ i $\square FA$ són quadrats. [Dɪ 22 i Eɪ 29]

Tirem els diàmetres[1631] CD, BE i ED. [P 1]

[*Demostració.*] Dimidiem AB per E [Eɪ 10]

i els costats CH i ED pels punts G i L. [Eɪ 10]

Unim BG i LF. [P 1]

1625. Ítem *a* del problema 62 (pàgina 178).

1626. És molt més simple recórrer a Eɪ 16 i a Eɪ 32. Ítems *a* i *b* del problema 62 (pàgina 178).

1627. Nota 1621 (pàgina 570).

1628. L'angle $\widehat{CEB}$ és mig angle recte i el $\widehat{ECH}$ és més petit que això perquè el $\widehat{ECF}$ sí que amida això. Per tant, els angles $\widehat{CEB}$ i $\widehat{ECH}$ junts fan menys d'un angle recte i el $\widehat{CHE}$ és obtús [Eɪ 32].

1629. El text està deteriorat i no s'ha pogut refer del tot.

1630. Hi ha dues línies que no s'han recuperat.

1631. Diu: διάμετροι.

Pels punts L i K, tirem els segments [...] paral·lels a BD.[1632]
[Ei 31]

És evident que l'angle del vèrtex G del triangle $\triangle BCG$ és obtús i que l'altre és agut.

I també és evident que és més gran que [...].[1633] ♠

B.13.2 El text àrab d'Os

B.13.2*a* La invocació

En el nom del Déu misericordiós i clement! Senyor, concedeix-me l'èxit i no m'ho facis difícil.

B.13.2*b* La proposició geomètrica

B.13.2b_1 [Os 3] [a*) Dividim el rectangle en catorze peces.*]

a) Sigui $\square\, ABCD$ un rectangle.

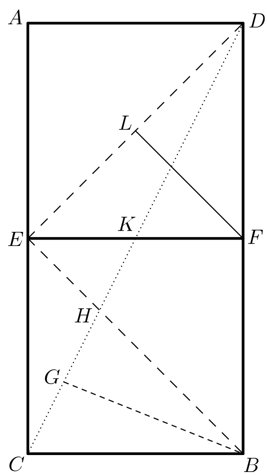


Figura Os 2

[*Construcció.*] Dimidiem el seu costat BC per E. [Ei 10]

I, per E, tirem el segment perpendicular EF a BC. [Ei 12]

A més, tracem les diagonals AC, BF i FC. [P 1]

Per H dimidiem el segment BE [Ei 10]
i tirem HT perpendicular a BE. [Ei 11]

Considerem el punt K en el qual el segment HA talla el BF [P 1 i P 5]
i unim HK. [P 1]

Dimidiem AL per M [Ei 10]
i unim BM. [P 1]

Amb aquesta construcció, hem dividit el rectangle $\square\, AE$ en set peces. ♣

Dimidiem GD per N i FC per G. [Ei 10]

Tirem EG. [P 1]

1632. No en veiem la necessitat. I en la figura no hi són.

1633. Aquí s'acaba el contingut del full del palimpsest.

Unim els punts B i G i prolonguem BG fins a O [és a dir, afegim GO fins que talla DC]. [P 1, 2 i 5]

Per G, tirem GN perpendicular a DC. [EI 10]

Amb aquesta construcció, hem dividit el rectangle ▭ FC en set peces,
però ho hem fet d'una manera diferent de l'anterior.

En definitiva, el quadrat $\square\, AC$ ha quedat dividit en catorze peces.

♣

b*) Cada una de les peces és commensurable amb el quadrat inicial.*

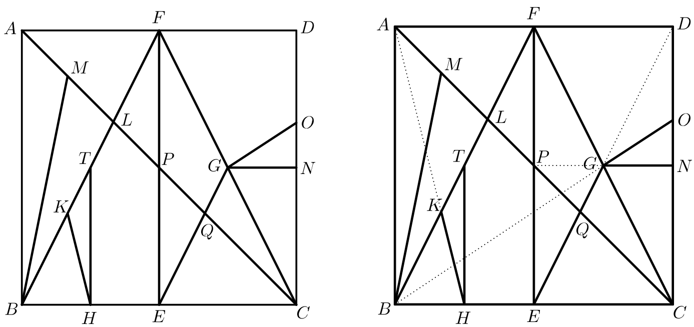


FIGURA Os $3a$ i Os $3b$[1634]

[*Demostració.*] b_1) Atès que FC és la diagonal del rectangle ▭ FC, el triangle $\triangle\, DFC$ equival a la seva meitat [EI 34]
i, per tant, a la quarta part del quadrat.

$b_{1.1}$) Però el triangle $\triangle\, CNG$ és igual a un quart del $\triangle\, DFC$,
ja que si prolonguem EC arribem a D, [per construcció i P 2]
el triangle $\triangle\, CDG$ equival a la meitat del $\triangle\, DFC$ [DI 10 i EI 4]
i està format pels triangles $\triangle\, CNG$ i $\triangle\, DNG$.

En definitiva, el triangle $\triangle\, CNG$ equival a un quart del quadrat.

♠

$b_{1.2}$) Per construcció, el segment OG, convenientment prolongat, passa pel punt B.

A més, el segment HG és paral·lel al costat BC del quadrat $\square BCDA$ o del triangle $\triangle\, OBC$ (figura Os $3b$). [DI 10, P 4 i EI 28]

Per tant, BC és a NG com CO a NO. [EVI 2]

1634. La figura $3a$ és la que hi ha en el text. En canvi, en la $3b$, hi hem afegit, en línies de puntets, uns segments que s'esmenten en l'explicació.

Però BC és quatre vegades NC.[1635]

Conseqüentment, GO també quatre vegades NO. [Ev 11]

I d'això en resulta que CN és el triple de NO [Nc 3]
i que el triangle $\triangle\, CNG$ equival a tres vegades el $\triangle\, ONG$. [Evi 1]

I, com que hem demostrat que el triangle $\triangle\, CNG$ era igual a una setzena part d'aquest, ♠
el triangle $\triangle\, ONG$ equival a una quaranta-vuitena part seva.

$b_{1.3}$) Ara bé, el triangle $\triangle\, CDF$ equival a un quart del quadrat.

Per tant, el triangle $\triangle\, CNG$ ho fa a una setzena part [Evi 19]
i el $\triangle\, NGO$ a una quaranta-vuitena part.

I el quadrilàter ⏢ $DOGF$ equival a una sisena part del quadrat.[1636]

♠

$b_{1.4}$ i $b_{1.5}$) Per hipòtesi, [la prolongació d]el segment NG passa per P[1637]
i el segment GP és paral·lel al CE. [Ei 28]

Així, tenim la proporcionalitat EC és a GP com EQ a GQ
i CQ a PQ. [Evi 4]

I, atès que EQ és el doble de GQ i GQ el de PQ,[1638]
el triangle $\triangle\, EQC$ equival a dues vegades cada un dels triangles $\triangle\, CGQ$ i $\triangle\, EPQ$. [Evi 1]

I, de retruc, $\triangle\, ECF$ ho fa a dues vegades $\triangle\, EPC$, [Evi 1]
ja que [el segment] EF és dues vegades EP.

Però el triangle $\triangle\, ECF$ val a una quarta part del quadrat inicial
i el triangle $\triangle\, EPG$ ho fa a una vuitena part d'aquest.

Però aquest triangle[1639] és igual a tres vegades cada un dels triangles $\triangle\, EPQ$ i $\triangle\, CGQ$.

1635. Sabem que EC i EB són iguals i, per proporcionalitat entre els triangles $\triangle\, DGN$ i $\triangle\, DEC$, CN esdevé la meitat de EC, ja que DN l'és de DC.

1636. És un simple càlcul de sumes i restes de fraccions.

1637. Els segments DC i FE són iguals. I tant aquests com el FC estan dimidiats pels punts N, G i P, respectivament. Per a veure-ho, podem usar la igualtat dels triangles $\triangle\, DGN$ i $\triangle\, FGP$. En la figura Os 3a no hi hem dibuixat el segment GP.

1638. Ja que EC és dues vegades GP.

1639. És a dir, el triangle $\triangle EPC$.

Per consegüent, cada un d'aquests triangles ho és a una vint-i-quatrena part del quadrat. ♠

$b_{1.6}$) I el triangle $\triangle\, ECQ$ equival al doble de cada un dels triangles $\triangle\, EPQ$ i $\triangle\, CGQ$.

En definitiva, ho fa a una dotzena part del quadrat. ♠

$b_{1.7}$) I, a més, com que FP i EF són dos segments iguals,
els triangles $\triangle\, FPC$ i $\triangle\, EPC$ també ho són. [Evi 1]

Sostraiem d'aquests els triangles equivalents $\triangle\, CGQ$ i $\triangle\, EPQ$, respectivament.

En resulta que el quadrilàter $PQGF$ equival al triangle ECQ. [Nc 3]

Per tant, aquest quadrilàter és igual una dotzena part del quadrat $\square\, AC$. ♠

Hem vist, doncs, què passa en el rectangle $\square\, FC$. ♠

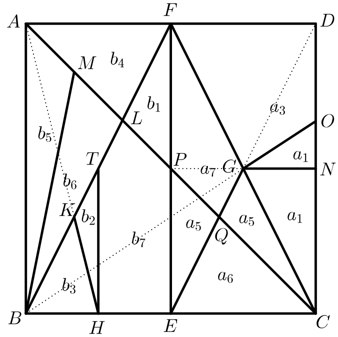


Figura Os 4[1640]

b_2) Vegem, ara, què passa en l'altre rectangle.

$b_{2.1}$) Atès que BF i EG són dues diagonals paral·leles [Evi 2]
i FP i EP són iguals,
els triangles $\triangle\, FLP$ i $\triangle\, EPQ$ també ho són. [Ei 29, 15 i 4]

Per tant, el triangle $\triangle\, FLP$ equival a una vint-i-quatrena part del quadrat $\square\, AC$. ♠

I BK és igual a una vint-i-quatrena part de KT.

$b_{2.2}$) Els segments BH i HE són iguals.

Per tant, el triangle $\triangle\, BEF$ equival a quatre triangles $\triangle\, BHT$, ja que són rectangles. [Ei 19]

Ara bé, com que el triangle $\triangle\, BEF$ equival a un quart del quadrat $\square\, ABCD$,
resulta que el triangle $\triangle\, BHT$ ho fa a una setzena part seva.

I, per construcció, la prolongació del segment HK passa pel punt A [figura Os 3b].

1640. Hem enumerat els trossos d'acord amb els ítems de la demostració.

Per tant, AB és a HT com BK a KT. [EVI 4]

Però el segment AB és el doble del HT.[1641]

Per consegüent, BK ho és de KT,

BT és igual a tres vegades KT [Nc 2]

i el triangle $\triangle BHT$ equival a tres vegades el $\triangle KHT$. [EVI 1]

A més, atès que el triangle $\triangle BHT$ equival a una setzena part del quadrat,

el triangle $\triangle KHT$ n'és la quaranta-vuitena part. [EVI 1] ♠

$b_{2.3}$) I el triangle $\triangle BHK$ equival al doble del triangle $\triangle KHT$ [EVI 1]

i, per tant, a una vint-i-quatrena part del quadrat. ♠

$b_{2.4}$) A més, BL és el doble de FL,[1642] i AL de LP.

Per tant, el triangle $\triangle ABL$ equival a dues vegades el $\triangle ALF$

i aquest a dues vegades el $\triangle FLP$. [EVI 1]

Però, d'altra banda, el $\triangle FLP$ és una vint-i-quatrena part del quadrat.

Per consegüent, de tot això en resulta que el $\triangle ALF$ n'és una dotzena part. ♠

$b_{2.5}$ i $b_{2.6}$) I el triangle $\triangle ABL$, una sisena del quadrat.

Tanmateix, el triangle $\triangle ABM$ equival al $\triangle BML$. [EVI 1]

En conseqüència, cada un d'aquests triangles és una dotzena part del quadrat. ♠

$b_{2.7}$) Queda, doncs, el pentàgon $\pentagon LPEHT$, que equival a la meitat d'una sisena part del quadrat més la meitat d'una octava part d'aquest.[1643] ♠

Hem dividit, doncs, el quadrat $\square ABCD$ en catorze parts que hi mantenen una raó [racional].

I això és el que volíem demostrar. ♠

1641. El punt T dimidia BF.

1642. Els triangles $\triangle ABL$ i $\triangle FPL$ són equiangles i AB és igual a dues vegades FP. Hi apliquem EVI 4.

1643. És un simple càlcul: $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24}\right)\right)\square AC = \left(\frac{1}{2} - \frac{17}{48}\right)\square AC = \frac{7}{48}\square AC = \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{18}\right)\square AC$. Tots els valors s'expressen en fraccions unitàries egípcies.

B.14 Tres textos sobre semipoliedres regulars

Pappos proporciona un escrit que tracta dels semipoliedres regulars. p. 149 Els descriu i n'atribueix la creació a Arquimedes però encara hi ha dos textos més que s'hi refereixen: un escoli del Vaticà a Pappos i un altre d'Heró.[1644]

B.14.1 Un text de Pappos

Els filòsofs asseguren que el primer dels déus que va crear la forma esfèrica la va encertar perquè és la més bonica que existeix. De les propietats de l'esfera, la més bonica és la que estableix que té el volum més petit entre tots els sòlids regulars d'una mateixa àrea.

Tot allò que diuen de l'esfera és evident i gairebé no necessita demostració.[1645]

Però, en canvi, afirmen, sense demostrar-ho, que és el sòlid més gran de tots. I no és fàcil convèncer-se'n sense sotmetre-ho a un examen detallat.

De la mateixa manera que hem establert que el cercle és la màxima àrea poligonal per a un perímetre donat, mirem, ara,de rumiar què passa amb els sòlids que volem comparar amb l'esfera.

Podem, doncs, imaginar molts sòlids amb superfícies de tota mena.

Tanmateix, només considerarem els ideats per Arquimedes,
els tretze formats per polígons equilàters i equiangles,
no necessàriament semblants,[1646]
que semblen regulars i que no són els cinc de què parla Plató[1647]
—el tetraedre, l'hexaedre, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre.

1644. En grec, a <http://www.poesialatina.it/_ns/Greek/testi/Archimedes/Fragmenta.html>.

1645. Aquesta afirmació és curiosa, si tenim en compte la dificultat que comporta determinar el volum i l'àrea de l'esfera encara que es faci en termes de proporcions.

1646. Actualment, s'anomenen *sòlids* o *poliedres semiregulars*.

Per veure'ls físicament, consulteu, per exemple, <http://www.ricardpeiro.es/poliedres/arquimedians.htm>.

1647. Pla (2016*b*), § 4.2.4, ítem *g*, p. 302-307, i text C 7 j_2, p. 554-557.

[*Descripció dels poliedres semiregulars o semipoliedres.*]

En primer lloc, tenim l'*octaedre* —*οκτάεδρόν*— de vuit bases:[1648]

— quatre són triangles i quatre hexàgons.

En segon lloc, tres *decatetraedres* —*τεσσαρεσκαιδεκάεδρον*— de catorze bases:

— el primer està format per vuit triangles i sis quadrats,

— el segon per sis quadrats i vuit hexàgons i

— el tercer per vuit triangles i sis octògons.

En tercer lloc, dos *icohexaedres* —*ἑκκαιεικοσάεδρον*— de vint-i-sis bases:

— el primer està format per vuit triangles i divuit quadrats,

— el segon per dotze quadrats, vuit hexàgons i sis octògons.

En quart lloc, tres *triacontaedres* —*δυοκαιτριακοντάεδρον*— de trenta-dues bases:

— el primer està format per vint triangles i dotze pentàgons,

— el segon per dotze pentàgons i vint hexàgons, i

— el tercer per vint triangles i dotze decàgons.

En cinquè lloc, el *triacontaoctaedre* —*ὀκτωκαιτριακοντάεδρον*— de trenta-vuit bases: trenta-dues són triangles i sis quadrats.

En sisè lloc, dos *hexaecontadoedres* —*δυοκαιξητριακοντάεδρον*— de seixanta-dues cares:[1649]

— el primer està format per vint triangles, trenta quadrats i dotze pentàgons, i

— el segon per trenta triangles, vint hexàgons i dotze decàgons.

Per fi, en setè lloc, l'*eneacontraedre* —*δυοκαινενητριακοντάεδρον*— de noranta-dues bases: vuitanta triangles i dotze pentàgons.[1650]

1648. Usa el mateix nom que el del poliedre regular de vuit costats.

Per veure'n els noms actuals, en català, consulteu la taula 2.6 (pàgina 150), on els donem en el mateix ordre que tenen en aquest text.

Tots els polígons que s'esmenten —triangles, quadrilàters, pentàgons, hexàgons, octògons i decàgons— són equilàters.

1649. Consta de seixanta-dues cares.

1650. En total hi ha, doncs: $1 + 3 + 2 + 3 + 1 + 2 + 1 = 13$ poliedres semiregulars.

[*Càlcul del nombre de costats i d'arestes.*]

El nombre de costats i d'arestes[1651] es calcula de la manera següent.
Com que, en els poliedres amb angles sòlids formats per tres, quatre o cinc angles plans, es compten tots els que tenen les bases del poliedre, és evident que el nombre d'angles sòlids és: en el primer cas, la tercera part dels angles plans; en el segon, la quarta, i en el tercer, la cinquena.

Si comptem tots els costats que tenen els plans que limiten els poliedres, el seu nombre és igual al dels angles plans. Però, atès que una aresta és comuna a dues cares, el nombre d'arestes del poliedre semiregular és la meitat.

Per tant, el primer dels tretze poliedres heterogenis[1652]
està format per quatre triangles i quatre hexàgons,
té dotze angles sòlids i divuit arestes,
perquè els angles i els costats dels quatre triangles són dotze,
mentre que els quatre hexàgons tenen vint-i-quatre angles i vint-i-quatre costats. En total, doncs, trenta-sis.

En definitiva, el nombre dels angles és necessàriament la tercera part [de trenta-sis], ja que cada angle està format per tres angles plans.

I el nombre d'arestes és la meitat, és a dir, divuit.

El primer dels decatetraedres el componen vuit triangles i sis quadrats. Té, doncs, dotze angles sòlids perquè cada un consta de quatre angles plans i vint-i-quatre arestes. El segon, format per sis quadrats i vuit hexàgons, té vint-i-quatre angles sòlids perquè cada un consta de tres angles plans i trenta-sis arestes. El tercer, de vuit triangles i sis octògons, té vint-i-quatre angles sòlids i trenta-sis arestes.

Dels dos icohexaedres, el primer, amb vuit triangles i divuit quadrats, té vint-i-quatre angles sòlids i quaranta-vuit arestes, i el segon, amb dotze quadrats, vuit hexàgons i sis octògons, té quaranta-vuit angles sòlids.

1651. *πλευρ˜ον*, 'costats'.

1652. Diu: *ἀνομοιογενη*, 'no homogenis'. És a dir, les cares del poliedre són polígons de classes diferents. Els hem anomenat *semipoliedres*.

amb dotze quadrats, vuit hexàgons i sis octògons, té quaranta-vuit angles sòlids.

El primer triacontaoctaedre, format per vint triangles i dotze pentàgons, té trenta angles sòlids i seixanta arestes. El segon, amb dotze pentàgons i vint hexàgons, té seixanta angles sòlids i noranta arestes. I el tercer, amb vint triangles i dotze decàgons, té també seixanta angles sòlids i noranta arestes.

El triacontadoedre, format per trenta-dos triangles i sis quadrats, té vint-i-quatre angles sòlids i seixanta arestes.

El primer dels dos hexaecontadoedres, format per vint triangles, trenta quadrats i dotze pentàgons, té seixanta angles sòlids i cent vint arestes. El segon, amb trenta quadrats, vint hexàgons i dotze decàgons, té cent vint angles diedres i cent vuitanta arestes.

I, finalment, l'eneacontadoedre, format per vuitanta triangles i dotze pentàgons, té seixanta angles sòlids i cent cinquanta arestes.[1653]

De moment, prescindirem d'aquests tretze sòlids limitats per polígons desiguals i dissemblants perquè són menys regulars i convé que comparem l'esfera amb els cinc que hem esmentat abans, que estan limitats per cares iguals i semblants. Són els únics que tenen iguals els angles sòlids i, per tant, esdevenen regulars com els altres.

1653. Taula 2.6 (pàgina 150).

Pappos no diu res de la manera com va idear Arquimedes aquests poliedres, ni tampoc quines propietats tenen —són inscriptibles?, circumscribibles? Potser ho va establir en la seva obra perduda, però això és una simple conjectura. Avui sabem que tots s'obtenen escapçant d'una manera adequada els cinc sòlids platònics.

Si unim els punts mijans de l'octaedre i del cub, resulta el decatetraedre. Si ho fem amb l'icosaedre, obtenim el triacontadoedre. Si agafem els punts mitjans de les arestes i fem una construcció anàloga, resulten uns altres cinc poliedres semiregulars. I, si repetim la mateixa operació amb el decatetraedre i el triacontadoedre, quatre més.

El més interessant d'aquests poliedres és que els trobem en la cristallografia i en l'arquitectura. El volum en funció del radi R de la circumferència circumscrita és $\mathcal{V} = \frac{5\sqrt{2}}{3} R^3$.

El tetracaidecaedre el podem construir dividint totes els arestes de l'octaedre en tres parts iguals. Com el cub, té la propietat d'omplir l'espai.

Euclides[1654] i altres autors han demostrat que, de poliedres regulars formats per polígons regulars, no n'hi ha d'altres.

TAULA B.2. *Construcció dels tretze semipoliedres d'Arquimedes*

Número	*Nom*	*Regla*
1.	Tetraedre truncat	Tallem per $\frac{1}{3}$ l'aresta d'un tetraedre.
2.	Cuboctaedre	Tallem per $\frac{1}{2}$ l'aresta d'un tetraedre. Tallem per $\frac{1}{2}$ l'aresta d'un octaedre.
3.	Octaedre truncat	Tallem per $\frac{1}{3}$ l'aresta d'un octraedre.
4.	Cub truncat	Tallem per $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ l'aresta d'un cub.
5.	Petit rombi-cuboctaedre	Tallem per $\frac{1}{2}$ l'aresta d'un cuboctaedre.
6.	Cuboctaedre truncat	Tallem per $\frac{1}{2}$ l'aresta d'un cuboctaedre.
7.	Icosidodecaedre	Tallem per $\frac{1}{2}$ l'aresta d'un dodecaedre. Tallem per $\frac{1}{2}$ l'aresta d'un icosaedre.
8.	Icosaedre truncat	Tallem per $\frac{1}{3}$ l'aresta d'un icosaedre.
9.	Dodecaedre truncat	Tallem per $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ l'aresta d'un dodeca-edre.
10.	Cub xato	És el resultat del truncament i bise-llatge d'un cub. No té plans de simetria. Admet dues formes simètriques.
11.	Petit rombico-sidodecaedre	Tallem per $\frac{1}{2}$ l'aresta d'un icosidodeca-edre.
12.	Gran rombico-sidodecaedre	Tallem per $\frac{1}{3}$ l'aresta d'un icosidodeca-edre.
13.	Dodecaedre xato	És el resultat del truncament i bise-llatge d'un icosaedre. No té plans de simetria. Admet dues formes simètriques.

L'esfera és més gran que qualsevol de les cinc figures amb la mateixa àrea que hem esmentat abans.[1655]

1654. PLA (2020), llibre XIII. És l'epíleg «teorema d'unicitat dels sòlids platònics» d'EXIII 18, p. 590.

1655. PAPPOS (1932), llibre XIX, edició francesa, vol. II, p. 272-276. La demostració de Pappos no és rigorosa. Vegeu també VERA (1970), vol. II, p. 956-959.

B.14.2 L'escoli d'un manuscrit del Vaticà a Pappos III

α. L'octaedre [truncat] té quatre triangles i quatre hexàgons, divuit arestes i dotze angles sòlids, i cada angle sòlid està format per tres angles plans, dos dels quals són de l'hexàgon i un del triangle, de manera que manquen dues terceres parts d'un angle recte per a arribar als quatre angles rectes. Es genera a partir de la primera piràmide[1656] tallant les seves arestes en tres parts iguals i tirant, pels punts de tall, plans que escapcen els angles.

β. El semipoliedre de catorze cares[1657] està format per vuit triangles i sis quadrats, té vint-i-quatre arestes i dotze angles sòlids, i cada angle sòlid inclou quatre angles plans, dos dels quals són de quadrats i dos de triangles, de manera que manquen dues terceres parts d'un angle recte per a arribar als quatre angles rectes. Es genera a partir del cub dividint cada una de les arestes per la meitat i tirant, pels punts de tall, plans que escapcen els vuit angles.

γ. El semipoliedre de catorze cares[1658] està format per sis quadrats i vuit hexàgons, té trenta-sis arestes i vint-i-quatre angles sòlids, i cada angle sòlid està format per tres angles plans, dos dels quals són d'hexàgons i un de quadrat. Es genera a partir de l'octaedre dividint cada una de les arestes en tres parts iguals i tirant, pels punts de tall, plans que escapcen els sis angles.

δ. El tercer semipoliedre,[1659] com que està format per vuit triangles i sis octògons, té vint-i-quatre angles sòlids. Cada un està limitat per tres angles plans, dos dels quals són d'octògons i un de triangle. I té trenta-sis arestes. Es genera a partir del cub tallant cada una de les arestes de manera que resultin tres segments, i el del mig és el doble en potència que cada un dels extrems.[1660]

1656. És a dir, del tetraedre.
1657. Entenem el primer de catorze cares.
1658. Entenem el segon de catorze cares.
1659. Dels de catorze cares.
1660. Dx 1 i 2.

ϵ. El semipoliedre de vint-i-una cares[1661] resulta del que en té catorze, comprès per vuit triangles i sis quadrats, tallant cada una de les arestes per la meitat i tirant plans pels punts de tall...[1662]

B.14.3 *Definicions* d'Heró

Arquimedes afirma que ha descobert que les figures que es poden inscriure en l'esfera són tretze en total. N'afegeix, doncs, vuit a les cinc que ja hem esmentat.[1663]

D'aquests poliedres (de fet, semipoliedres), Plató ja en coneixia els de catorze cares, que es presenten amb dues formes diferents: els compostos per vuit triangles i sis quadrats, que són les cares dels poliedres elementals de la Terra i l'aire, i els altres formats per vuit quadrats i sis triangles. La construcció d'aquests segons és més complexa i difícil.

B.15 La crítica d'Eratòstenes a *Sobre els cossos que floten*

Recollim, a continuació, les objeccions d'Eratòstenes a la monografia CF d'Arquimedes, segons Estrabó.

I encara una altra qüestió: dels progressos fets en el coneixement de la Terra habitada durant i després de la vida d'Alexandre, Eratòstenes en discuteix científicament la forma però no només de la part habitada, que és el que hauria estat més racional en un tractat [de geografia] que té com a objecte d'estudi aquesta part del planeta. Amb això no volem dir que aquest aspecte general de la qüestió hagi de ser negligit del tot però s'ha de fer en un indret adequat. Eratòstenes diu que la Terra, tota la Terra, té la forma d'una esfera, i no pas una esfera al seu entorn. Constata que la superfície presenta moltes irregularitats

1661. Entenem el primer de vint-i-una cares.
1662. Heiberg (1880-1881), vol. II, p. 461-463. L'atribueix a Hultsch (1876), p. 1170.
1663. Error manifest d'Heró.

significatives, però al·lega que la infinitat d'alteracions parcials de la figura esmentada són degudes a l'acció de l'aigua, del foc, de les tremolors internes, de les exhalacions de vapors i d'altres causes anàlogues. Però també aquí ignora l'ordre lògic, ja que la forma d'esfera de la Terra en la seva totalitat resulta de la mateixa constitució de l'Univers, i aquests canvis parcials que cita no poden alterar de cap manera la figura general que té i són tan imperceptibles que desapareixen naturalment en una massa tan gran. Tot el que poden fer és modificar en la seva disposició aquesta o aquella part de la nostra Terra habitada, i són les diferents causes que provoquen aquests canvis purament locals en tots els casos.[1664]

1664. Estrabó (1867), llibre I, capítol III, § 3.

Les figures del text

La figura 1.1 (pàgina 2) l'hem extret de Paruta (1612), p. 141.

La figura 1.2 (pàgina 4) mostra l'anvers de la Medalla Fields. S'hi mostra el relleu d'Arquimedes, el seu nom en grec Αρχιμηδοψς i la frase llatina *Transire suum pectus mundoque potiri*, 'Anar més enllà d'un mateix i dominar el món'. Extret de Viquipèdia (Stefan Zachow). És de domini públic. <https://es.wikipedia.org/wiki/Medalla_Fields#/>.

La figura 1.3 (pàgina 6) és un oli de 1620, de Domenico Fetti, que representa Arquimedes pensatiu. Es conserva a la Gemäldegalerie Alte Meister de Dresden. Extret de Viquipèdia. És de domini públic. <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e7/Domenico-Fetti_Archimedes_1620.jpg>.

La figura 1.4 (pàgina 6) mostra Arquimedes mort. És un oli sobre tela titulat *Bellum nefas* o *La mort d'Archimède* d'Edouard Vimont de 1892. Extret de Viquipèdia. És de domini públic. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Archim%C3%A8de#/media/Fichier:Edouard_Vimont_(1846-1930)_Archimedes_death.jpg>.

La figura 1.5 (pàgina 7) és un retaule de Pierre-Henri de Valenciennes titulat «Cicéron découvrant le tombeau d'Archimède», pintat l'any 1787. Es conserva al Museu dels Agustins de Tolosa. Extret de Viquipèdia. És de domini públic. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Cic%C3%A9ron_d%C3%A9couvrant_le_tombeau_d>.

La figura 1.6 (pàgina 13) és un mosaic trobat entre les runes d'Herculà que representa Arquimedes travessat per l'espasa d'un soldat romà. És curiós observar-hi que no escriu a terra, sinó que està assegut davant d'una tauleta que li fa de pupitre. Escanejat per Szilas per al llibre de J. M. Roberts *Kelet-Ázsia és a klasszikus Görögország* ('East Asia and Classical Greece'). Extret de Viquipèdia. En la pàgina web <http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Death/DeathIllus.html> es reprodueixen moltes de les representacions artístiques de la mort d'Arquimedes.

La figura 1.7 (pàgina 13) és un reclam turístic del cementiri de Siracusa. De fet, és un columbari romà.[1665] Fotografia de Davide Mauro (Creative Commons) i extret de Viquipèdia.

La figura 1.8 (pàgina 14) l'hem fet nosaltres amb GeoGebra.

La figura 1.9 (pàgina 14) és una il·lustració del segle XVI, publicada a *Historia*, núm. 767 (novembre 2010), p. 38. Extret de Viquipèdia. És de domini públic. <https://ca.wikipedia.org/wiki/Eureka!#/media/File:Archimede_bain.jpg>.

La figura 1.10 (pàgina 16) és un gravat publicat a *Mechanics Magazine* a Londres el 1824. Extret de Viquipèdia. És de domini públic. <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_lever_(Small).jpg>.

La figura 1.11 (pàgina 16) mostra una pintura de Giulio Parigi que reprodueix l'urpa —la mà de ferro— ideada per Arquimedes per a aixecar els vaixells i esclafar-los contra la muralla. Es conserva a l'Estança de la Matemàtica de la Galleria degli Uffizi (Florència). Extret de Viquipèdia. És de domini públic. <https://en.wikipedia.org/wiki/Claw_of_Archimedes>.

La figura 1.12 (pàgina 17) mostra el funcionament de l'urpa arquimediana. El tensor és un polispast. L'hem fet nosaltres amb GeoGebra inspirantnos en una figura de Landels (1978).

La figura 1.13 (pàgina 18) ofereix una representació del cargol d'Arquimedes poant aigua, publicada a la *Chambers's Encyclopedia* (Filadèlfia: J. B. Lippincott Company, 1875). Il·lustra l'entrada *Archimedes*. Extret de Viquipèdia. És de domini públic. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archimedes_screw.JPG>.

La figura 1.14 (pàgina 18) ofereix una representació d'una esfera armil·lar, de Plate LXXXVII (1771), publicada per la Society of Gentlemen in Scotland a *Encyclopedia Britannica*, vol. II, p. 681. Extret de Viquipèdia. És de domini públic. <https://en.wikipedia.org/wiki/Armillary_sphere#/media/File:EB1711_Armillary_Sphere.png>.

La figura 1.15 (pàgina 19) mostra la representació que fa Giulio Parigi dels miralls enclavats a les muralles de Siracusa mentre cremen les naus romanes. Es conserva a l'Estança de la Matemàtica de la Galleria degli Ufizzi (Florència). Extret de Viquipèdia. És de domini públic. <https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes#/media/File:Archimedes-Mirror_by_Giulio_Parigi.jpg>.

La figura 1.16 (pàgina 20) l'hem feta nosaltres amb GeoGebra.

1665. DIEC (1995): «En l'antiguitat romana, construcció funerària amb nínxols per a rebre les urnes funeràries».

Les figures EPI 13; QP 1, 2 i 3; QP 6, 7, 8 i 9; QP 18 a 21; EPII 10; 2.6; ECI 14, 21, 22 i 33; ECII 2; LE 1, 18, 24, 21, 22 i 23; CE 4, 7, 21 i 22; 2.21; MC 1*a*, 3*a*, 3*b* i 3*c*; Ar 1; 2.28; 2.29; 2.30; 2.31 i 2.32 (pàgines 57, 62, 63, 67, 73, 76, 79, 82, 86, 88, 91, 95, 96, 97, 103, 104, 105, 106, 109, 110, 112, 116, 117, 120, 128, 132, 134, 136, 137 i 149, respectivament) les hem fetes nosaltres amb GeoGebra.

La figura 2.15 (pàgina 98) de l'espiral d'Arquimedes i les hèlixs cònica i cilíndrica l'hem generada nosaltres amb GeoGebra.

La figura 2.16 (pàgina 99) reprodueix l'espiral d'Arquimedes i les hèlixs cilíndrica i cònica. Autoria de Benutzer:Karl Bednarik. Extreta de Viquipèdia. Fou creada el 4 de gener de 2003. <https://ca.wikipedia.org/wiki/Espiral#/media/Fitxer:Schraube_und_archimedische_Spirale.png>.

La figura 2.27 (pàgina 128) mostra la paradoxa de Stevin. Extreta de Viquipèdia. És de domini públic. <https://ca.wikipedia.org/wiki/Fitxer:Paradoxa_hidrost%C3%A0tica.png>.

Les figures dels problemes 1, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 18, 27, 31, 51, 52, i les dues del problema 54 (pàgines 151, 152, 154, 155, 156, 157, 159, 161, 163, 165, 173 i 175, respectivament) les hem fetes nosaltres amb GeoGebra.

Totes les figures de l'apèndix B, en concret a partir de § B.1 (pàgines 209-584), les hem generat amb GeoGebra.

Totes les taules, llevat de la 2.2 (pàgina 26) —que hem extret d'Ortiz-García (2005), p. 33—, les hem creat nosaltres.

Matemàtics i personatges citats

ABEL, Niels Henrik (Findö [Noruega], 5 d'agost de 1802 - Froland [Noruega], 6 d'abril de 1829), matemàtic. L'any 2002, el govern del seu país instituí, en honor seu, el prestigiós Premi Abel, que s'atorga cada any a un o més matemàtics que hagin fet contribucions científiques excepcionals en el camp de les matemàtiques.

AGAMÈMNON (Ἀγαμέμνων), rei d'Argos. D'acord amb la *Ilíada*, va participar en la Guerra de Troia i era el cap de l'exèrcit aqueu que assetjava la gran ciutat.[1666]

AL-BIRŪNI, Abū'l Raihān Muhammad (Kath [Pèrsia], 5 de setembre de 973 - Gazni [Afganistan], 9 de desembre de 1048), matemàtic, astrònom i filòsof.

ALEMBERT, Jean le Rond d' (París [França], 16 de novembre de 1717 - 29 d'octubre de 1783), matemàtic i filòsof francès. Fou l'autor del *Discurs preliminar* (1751), en el qual exposà les línies mestres de l'*Enciclopèdia* (1747), obra extensíssima de la qual compartia la direcció.

ALEXANDRE EL GRAN (Μέγας Αλέξανδρος) (Pel·la [Macedònia], 20 de juliol de 356 aC - Babilònia [Mesopotàmia], 10 de juny de 323 aC), fill de Filip II, el succeí com a rei de Macedònia (336-323 aC). Fou deixeble d'Aristòtil. Durant la seva gesta

1666. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 57-59.

expansionista (334-323 aC) conquerí Egipte, Mesopotàmia i l'Imperi persa, i arribà a la frontera de l'Índia. És un dels líders polítics —i sobretot militars— més importants del món antic i, sense cap mena de dubte, una de les figures més atractives de la història de tots els temps.[1667]

AMTHOR, Carl Ernst August (1845-1916), director del *Gimnasi de la Santa Creu* de Dresden (Alemanya).

ANAXÀGORES DE CLAZÒMENES (Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος) (Clazòmenes [Anatòlia], ∼510 aC - Làmpsac [Anatòlia]), ∼428 aC), filòsof grec.[1668]

ANNÍBAL BARCA O HANNÍBAL BARCA (Hanni-baal, 'El qui té el favor de Baal', Barca, 'el llampec')[1669] (Cartago [Tunísia], 247 aC - Bitínia [a prop de Bursa, Turquia], 182 aC), polític i cabdill militar de l'antic Imperi cartaginès. És conegut per les seves gestes durant la Segona Guerra Púnica. Travessant amb penúries els Pirineus i els Alps, conduí l'exèrcit d'Hispània fins al nord d'Itàlia i a les portes de Roma. Vençut en la batalla de Zama (202 aC) —ciutat de Numídia, al sud-oest de Cartago— per Publi Corneli Escipió Africà, es retirà a Cartago.[1670]

ANTEMI DE TRAL·LES (Ἀνθέμιος) (Tral·les [Cària], 474 - Constantinoble [Imperi bizantí, avui Istanbul, Turquia], 533), notable arquitecte, matemàtic i professor.[1671]

ANTIFONT DE RAMNOUS (Ἀντιφῶν) (Ramnous [Grècia], 480 aC - ?, 411 aC), sofista.[1672]

1667. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 119-122.

1668. PLA (2016*b*), p. 458-460; SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 162-163.

1669. <http://archive.wikiwix.com/cache/index2.php?url=http%3A%2F%2 Fwww.hannibalofcarthage.org%2Fhannibal.php>.

1670. PLA (2021), § 2.4.3*b*, ítem *b*, p. 55-59; SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 333-341.

1671. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 184.

1672. SMITH (ed.) (1867), vol. I, «Antiphon», entrada 6, p. 207.

API CLAUDI CÀUDEX (Appius Claudius Caudex) (segle III aC), magistrat romà, l'any 264 aC, juntament amb Marc Fulvi Flac.[1673]

API CLAUDI PULCRE (Appius Claudius Pulcher) (segle III aC), edil curul (*ædilis curulis*)[1674] el 217 aC i tribú militar el 216 aC, moment en què lluità a la batalla de Cannes i, juntament amb Publi Corneli Escipió Africà, dirigí les tropes romanes que fugiren a Canosa di Puglia (Canusium). Fou pretor el 215 aC i dirigí un exèrcit que pretenia trencar l'aliança de Jeroni de Siracusa, net de Hieró II, amb els cartaginesos. Sense èxit, però. El 214 aC romangué a Sicília com a propretori llegat de Marc Marcel, i amb el comandament de la flota i les forces romanes a Leontins. El 212 aC fou cònsol amb Quint Fulvi Flac i, junts, assetjaren Càpua. A final d'any dirigí els comicis per a l'elecció dels nous cònsols, però hagué de romandre en el càrrec un any més. En una batalla amb Anníbal als afores de Càpua (211 aC), fou ferit. Morí poc després de la rendició de la ciutat, sense poder oposar-se a la sagnant venjança que, contra el seu criteri, Fulvi inflingí als capuans.[1675]

APOL·LO (Απόλλων), en la mitologia grega, déu del Sol, de la bellesa, la música i la poesia. I, posteriorment, en la mitologia romana, fill de Zeus i Leto i germà bessó d'Àrtemis —Ἄρτεμις—, la deessa de la cacera.[1676]

APOL·LONI DE PERGE (Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος) (Perge [Magna Grècia], ∼262 - ∼190 aC), geòmetra.[1677]

ARAT (Ἄρατος) (Sol [Cilícia, Àsia Menor], darrers anys del segle IV aC - ? [Macedònia, Grècia], segon terç del segle III aC), poeta, autor del poema didàctic *Fenòmens*.[1678]

1673. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 768.

1674. Un edil patrici. Se n'elegien dos de curuls (*ædilis curulis*) i dos de plebeus (*ædilis plebis*). Els curuls organitzaven les festes nacionals, inspeccionaven els mercats i feien de policia urbana i d'incendis.

1675. SMITH (ed.) (1867), vol. I, entrada 17, p. 768-769.

1676. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 230-232.

1677. PLA (en premsa *b*); SMITH (ed.) (1867), vol. I, entrada 17, p. 241-242.

1678. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 255-256.

Aristarc de Samos (Αρίσταρχος) (Samos [Grècia], 310 aC - Alexandria [Egipte], 230 aC), astrònom i matemàtic. Fou el primer estudiós que proposà el model heliocèntric del sistema solar que, com sabem, col·locava el Sol i no la Terra en el centre de l'Univers conegut.[1679]

Aristeu de Crotona (Ἀρισταῖος o Πρεσβύτερος) (Crotona [Grècia], segle IV aC), també conegut com a Aristeu el Vell, matemàtic.[1680]

Aristòtil (Ἀριστοτέλης) (Estagira [Grècia], 384 aC - Eubea [Grècia], 322 aC), filòsof. Se'l considera un dels grans pensadors de la humanitat.[1681]

Arquimedes de Siracusa (Ἀρχιμήδης o Συρακούσιος) (Siracusa [Sicília, ara Itàlia], 287-212 aC), matemàtic grec.[1682]

Arquites de Tàrent (Ἀρχύτας o Ταραντίνος) (Tàrent [Magna Grècia, ara Itàlia], 400-347 aC), filòsof, matemàtic, general, estadista i científic, considerat el més il·lustre dels matemàtics pitagòrics.[1683]

Àrtemis (Ἄρτεμις), deessa de la caça i del regne animal i germana bessona d'Apol·lo.[1684]

Atenenc, personatge del diàleg *Les lleis* de Plató.

Ateneu de Nàucratis (en grec: Ἀθήναιος Ναυκρατίτης; en llatí: Athenæus Naucratita) (Nàucratis [Egipte], 170 - ?, 223), anomenat *γραμματικός*, 'el literat'. És autor d'*El sopar dels erudits* (*Δειπνοσοφισταί*), una col·lecció d'anècdotes.[1685]

August (Imperator Caesar divi filius Augustus) (?, 23 de setembre de 63 aC - Roma [Itàlia], 19 d'agost de 14 dC), home d'estat,

---

1679. Pla (2021), capítol 5, p. 135-154 i 299-346; Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 291-292.

1680. Pla (2021), p. 3-11; Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 289.

1681. Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 317-344.

1682. Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 270-272.

1683. Pla (2016*b*), p. 256-259; Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 272-273.

1684. Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 375-376.

1685. Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 399-401.

líder militar romà i primer emperador de l'Imperi romà entre el 27 aC i la seva mort, el 14 dC.[1686]

AUSONI, Dècim Magne (Decimus Magnus Ausonius) (Bordeus [França], 310 - Lengon [França], 395), poeta i mestre de retòrica llatí.[1687]

AVERROIS, nom llatinitzat. Vegeu *ibn Rušd, Abū-l-Walīd Muḥàmmad.*

BERENSON, Bernard (Butrimonys [ara Vílnius, Lituània], 26 de juny de 1865 - Florència [Itàlia], 6 d'octubre de 1959), expert en art. La seva obra *Drawings of the Florentine painters* (1907) (*Dibuixos dels pintors florentins*) s'havia consagrat com la principal guia del renaixement italià.

BORELLI, Giovanni Alfonso (Nàpols [Itàlia], 28 de gener de 1608 - Roma [Itàlia], 31 de desembre de 1679), científic renaixentista especialitzat en fisiologia, biomecànica, física, astronomia i matemàtiques.

BRIÀREU (Βριαρεως,'vigorós'), un dels hecatonquirs (*εκατόνχει- ρες*), gegants de cent braços i cinquanta caps, fill d'Urà i de Gaia. En la *Ilíada* d'Homer els homes l'anomenen Egeó (Αίγαίον), que també és el nom d'un déu marí. Hi ha, però, qui diu que era fill de Thalassa (Θάλασσα), la deessa primordial del mar.[1688]

BRISÓ (Βρύσων) (segle IV aC), filòsof pitagòric.[1689]

CAJORI, Florian (Scharans [Suïssa], 28 de febrer de 1859 - Berkeley [Estats Units d'Amèrica], 15 d'agost de 1930), matemàtic molt reputat pels treballs d'història de les matemàtiques.

CÀRMIDES, personatge del diàleg de Plató que en duu el nom.[1690]

1686. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 424-430.
1687. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 444-445.
1688. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 24.
1689. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 515.
1690. SMITH (ed.) (1867), vol. I, entrada «Charmides», p. 689.

Carp d'Antioquia (Κάρπος ο Αντιοχεύς) (segles i i ii), matemàtic.[1691]

Cassi, Dió (Dio Cassius) (Nicea [Bitínia, Àsia Menor], ∼155 - 230), historiador i escriptor romà en llengua llatina i grega.[1692]

Cauchy, Augustin Louis (París [França], 21 d'agost de 1789 - Sceaux [França], 23 de maig de 1857), matemàtic.

Cavalieri, Bonaventura (Milà [Itàlia], 1598 - Bolonya [Itàlia], 30 de novembre de 1647), jesuat[1693] i matemàtic, seguidor de Galileu i autor del mètode dels indivisibles.

Ciceró, Marc Tul·li (Arpinum [Itàlia], 106 aC - Formia [Itàlia], 43 aC), polític, filòsof, escriptor i orador de l'antiga Roma. Se'n coneix la vida gràcies a la biografia que en va escriure Plutarc, a les seves abundants epístoles —que encara es conserven— i al zel dels humanistes dels segles xv i xvi, que copiaren els escassos manuscrits dels seus discursos i obres.[1694]

Ciclops (Κύκλωπες), gegants amb un sol ull enmig del front, fills d'Urà i de Gea.[1695]

Claudià, Claudi (Claudius Claudianus) (Alexandria [Egipte], 370 - Roma [Imperi romà], 405), el darrer poeta llatí. En els seus poemes expressa l'admiració del seu temps per l'antiga grandesa de Roma.[1696]

Commandino, Federico (Urbino [ara Itàlia], ∼1506 - 5 de setembre de 1575), matemàtic i humanista.

1691. Lewis (2001), p. 33-35, 103, 305, 332.

1692. Smith (ed.) (1867), vol.i, entrada «Dion Cassiss Cocceianus», p. 1028-1031.

1693. No confongueu *jesuat* amb *jesuïta*. Els jesuats o frares jesuats de Sant Jeroni formaven part d'un institut religiós creat cap al 1360 com a confraria de laics. Convertit en orde mendicant des de 1606, fou una congregació clerical anomenada Clergues Apostòlics de Sant Jeroni. L'orde fou suprimit el 1668.

1694. Smith (ed.) (1867), vol. i, p. 708-747.

1695. Smith (ed.) (1867), vol. i, p. 909.

1696. Smith (ed.) (1867), vol. i, p. 762-765.

CONÓ DE SAMOS (Χόνων) (Samos [Grècia], ∼280 aC - Alexandria [Egipte], ∼220 aC), matemàtic i astrònom del temps de Ptolemeu II Filadelf i Ptolemeu III Evergetes. De primer, potser fou mestre d'Arquimedes però després segur que n'esdevingué amic.[1697]

COPÈRNIC, Nicolau (o, simplement, Copèrnic) (Mikołaj Kopernik) (Toruń [Polònia], 19 de febrer de 1473 - Frombork [Polònia], 24 de maig de 1543), astrònom.

CRAS, Tit Octacili (Titus Octacilius Crassus), magistrat romà, elegit cònsol l'any 261 aC.[1698]

CRÀTIL (Κρατύλος) (Atenes [Grècia], segle V aC), filòsof del qual es coneixen pocs detalls. Fou el deixeble preferit d'Heràclit. Inicià Plató en la filosofia abans que aquest conegués Sòcrates. I el deixeble li dedica un diàleg del seu període intermedi com a filòsof que porta el seu nom i que tracta sobre la teoria del llenguatge.[1699]

CRESSUS (Κροῖσος) (?, segle VI aC - Sardes [Lídia, Àsia Menor], 546 aC), darrer rei de Lídia (561-546 aC).[1700]

CRISIP DE SOLI (Χρύσιππος ὁ Σολεύς) (Soli [Tars, Cilícia, Àsia Menor], 281 aC - Atenes [Grècia], 208 aC), filòsof que inicià l'escola estoica.[1701]

CRÍTIES (Κριτίας) (Atenes [Grècia] ∼460 aC - Muníquia [Grècia], ∼403 aC), sofista i orador, deixeble de Sòcrates i oncle de Plató.[1702]

CRONOS (Κρόνος), fill d'Urà i de Gea, rei dels Titans (*τιτάνος*) i pare de Zeus, en la mitologia grega. En la romana, s'identifica amb el déu Saturn.[1703]

1697. PLA (en premsa *c*); SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 826.
1698. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 882.
1699. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 888-889.
1700. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 896-897.
1701. SMITH (ed.) (1867), vol. I, entrada «Chrysippus», p. 700-701.
1702. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 892.
1703. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 898.

Ctesibi d'Alexandria (Κτησίβιος) (Alexandria [Egipte], 284-221 aC), matemàtic i inventor ptolemaic del regnat de Ptolemeu III Evergetes.[1704]

Dant, nom amb el qual és conegut tradicionalment en català Dante Alighieri, (Florència [Itàlia], maig/juny de 1265 - 13/14 de setembre de 1321), un dels autors més reconeguts de la literatura universal, autor de la *La divina comèdia*.

Demetri de Falèron (Δημήτριος) (Falèron [Grècia], 345 aC - Alt Egipte, 283 aC), orador, home d'estat, filòsof i poeta. Es formà al Liceu d'Aristòtil i començà la seva carrera pública el 325 aC. Durant els quaranta anys que va viure a Egipte, tingué cura de la política cultural del país i fou el màxim responsable de la creació del museu d'Alexandria.[1705]

Demòcrit d'Abdera (Δημόκριτος ὁ Ἄβδηρας) (Abdera [Tràcia, Grècia], ∼460 aC - ?, ∼370 aC), matemàtic.[1706]

Descartes, René (La Haye-en-Touraine (ara Descartes, França), 31 de març de 1596 - Estocolm [Suècia], 11 de febrer de 1650), filòsof i matemàtic.

Dicearc, (Δικαίαρςηος) (Messina [Sicília], 350-290 aC), filòsof peripatètic, geògraf i historiador, deixeble d'Aristòtil.[1707]

Dinostrat (Δεινόστρατος), geòmetra grec que, segons Procle, era germà de Menecme, i contemporani i seguidor de Plató.[1708]

Diocles de Carist (Διοκλῆς ο Καρύστιος) (Carist [Grècia], ∼240 - ∼180 aC), matemàtic i geòmetra. Inventà la «cissoide» i escrigué un tractat sobre els miralls ustoris.[1709]

Diodor de Sicília o Diodor Sícul (Diodorus Siculus) (Agurion [Sicília], ∼90 aC - ?, ∼30 aC), historiador contemporani de Juli Cèsar i d'August. Va escriure *Biblioheca* (*Βιβλιοθήκη*),

1704. Smith (ed.) (1867), vol. i, p. 899.
1705. Smith (ed.) (1867), vol. i, p. 969-970.
1706. Pla (2016*b*), p. 253-256; Smith (ed.) (1867), vol. i, p. 974-977.
1707. Smith (ed.) (1867), vol. i, p. 1001-1002.
1708. Smith (ed.) (1867), vol. i, p. 952-953.
1709. Smith (ed.) (1867), vol. i, p. 1011.

coneguda també com a *Biblioteca històrica* (*Βιβλιοθήκη ἱστορική*).[1710]

Diògenes de Sinop (Διογένης ὁ Σινωπεύς) (Sinop [Turquia], entre el 391 i el 399 aC - Corint [Grècia], 323 aC), filòsof cínic i socràtic, anomenat «el cínic».[1711]

Dionís I de Siracusa (Διονύσιος ὁ Πρεσβύτερος) (Siracusa [Grècia], 432-367 aC), tirà de Siracusa, conegut també com a Dionís el Vell. Conquerí diverses ciutats de Sicília, i rivalitzà amb Cartago pel control de l'illa. El seu govern autocràtic i centralista, que eliminà les aspiracions democràtiques del partit atenès, fou, però, popular. Alliberà molts esclaus i reorganitzà l'exèrcit i la flota, als quals adaptà les noves tècniques militars, i els convertí en instrument de la seva política expansionista. Impulsà les obres urbanes i la fortificació de Siracusa, i protegí la seva vida cultural. Es repartí l'illa de Sicília amb els cartaginesos, que en controlaren la part occidental. Establí la preponderància de Siracusa a la Mediterrània central i occidental, i organitzà un estat sòlid a la part oriental de Sicília. Aliat amb els espartans, intervingué en les guerres d'Esparta contra Atenes.[1712]

Dionísodor de Caunos (Διονυσόδωρος ο Καύνειος) (Caunos [Egipte], 250 aC - ?, 190 aC), geòmetra grec que resolgué el problema de «dividir l'esfera en una proporció donada».[1713]

Dioscòrides Pedaci (en grec: Διοσκορίδης Πεδακίος; en llatí: Dioscorides Pedacius) (Cilícia [Anatòlia], segle I), escriptor grec, autor d'un famós tractat de medicina (*Περὶ ὕλης ἰατρικῆς*) més conegut per la versió llatina, *De materia medica*, en cinc llibres.[1714]

Dositeu de Pelusium, també conegut com a Dositeu de Colonos, (Δωσίθεος) (Colonos, ∼230 aC), geòmetra grec al qual Ar-

1710. Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 1016-1017.
1711. Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 1021-1022.
1712. Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 1033-1036.
1713. Pla (en premsa *a*); Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 1046.
1714. Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 1051-1052.

quimedes dedicà algun dels seus llibres, com ara *Sobre l'esfera i el cilindre* (EC) i *Sobre les línies espirals* (LE).[1715]

DRUS, Neró Claudi (Nero Claudius Drusus) (Roma [Itàlia], ? - Germània [ara Alemanya], 9 aC), conegut com a Drus Major, tanca l'obra de Tit Livi.[1716]

ECCHELLENSIS, Abraham (Ibrahim Al-Haqilani) (Hakel [Líban], 18 de febrer de 1605 - Roma [Itàlia], 15 de juliol de 1664), erudit i literat maronita que participà en la traducció àrab de *La Bíblia*.

EECKE, Paul ver (Menin [Bèlgica], 13 de febrer de 1867 - Berchem [Bèlgica], 14 d'octubre de 1959), enginyer de mines i historiador de la matemàtica. Les seves traduccions al francès de les obres d'Arquimedes, Pappos i Teodosi de Trípoli són encara ara referents en la matèria.

EGEÓ (Αἰγαίον). Vegeu *Briàreu*.

EISENSTEIN, Ferdinand Gotthold Max (Berlín [Prússia, ara Alemanya], 16 d'abril de 1823 - 11 d'octubre de 1852), matemàtic.

EMPÈDOCLES D'AGRIGENT (Ἐμπεδοκλῆς) (Agrigent [Grècia], 492 aC - ?, 432 aC), filòsof pluralista. La seva obra, que es conserva de manera fragmentària, està escrita en hexàmetres. S'oposà al monisme —que estableix l'existència d'un sol tipus d'*arkhé* (*ἀρχή*)— i defensà el pluralisme: «Tot es compon de terra, aire, aigua i foc.»[1717]

ENCÈLAD (en grec: Ἐγκέλαδος; en llatí: Enceladus), gegant fill de Gea. Nasqué de la sang d'Urà vessada quan Cronos el castrà.[1718]

EPÍCIDES DE SIRACUSA (Ἐπικύδης) (Cartago [actual Tunísia], segle III - 210 aC), militar cartaginès germà d'Hipòcrates de Siracusa.[1719]

1715. PLA (en premsa *a*); SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 1070.
1716. SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 1083-1086.
1717. PLA (2016*b*), p. 209-210; SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 12-14.
1718. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 15-16.
1719. Vegeu «Tirans de Siracusa» (PLA (2021), § 2.4.3*c*, p. 65-66; també SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 35-36.

Eratòstenes de Cirene (Ἐρατοσθένης ὁ Κυρεναῖος) (Cirene [Líbia], 276 aC - Alexandria [Egipte], 194 aC), astrònom, historiador, geògraf, filòsof, poeta, crític teatral i matemàtic.[1720]

Escipió Africà, Publi Corneli (Publius Cornelius Scipio) (Roma [Itàlia], 235 aC - Liternum [Itàlia], 183 aC), militar i magistrat durant la Segona Guerra Púnica i home d'estat de la República Romana. Se'l coneix sobretot per haver derrotat el general cartaginès Anníbal a l'Àfrica, fet pel qual guanyà el cognom d'Africà Major (*Africanus*).[1721]

Escopines de Siracusa (Scopinas Syracusius) (Siracusa [Sicília], ∼52 - ?), matemàtic i inventor especialitzat en mecànica i gnomònica. Vitruvi el qualifica de gran savi en *Sobre l'arquitectura*. Se li ha atribuït l'obra *De les coses dels matemàtics* (*De rebus mathematicis*).[1722]

Estobeu, Joan (grec: Ἰωάννης ὁ Στοβαῖος; llatí: Joannes Stobæus) (final del segle v?), escriptor grec pagà, nadiu de Stobi (Macedònia). Pel seu nom, podem deduir que fou fill de pares cristians. Recopilà extractes de nombrosos escriptors grecs i els publicà en quatre llibres amb el títol *Qüestions seleccionades, sentències i preceptes* (*Ἰωάννου Στοβαίοι ἐκλογῶν, ἀποφθεγμάτων, ὑποθηκῶν βιβλία τέσσαγα*).[1723]

Estrabó (Στράβων) (Amàsia [Turquia], 63 aC - ∼24 dC), escriptor i geògraf grec, autor de la famosa *Geografia*.[1724]

Èter (Aἰθήρ), pare de Thalassa.[1725]

Euclides (Εὐκλείδης) (?, ∼325 aC - Alexandria [Egipte], ∼265 aC), matemàtic.[1726]

Èudox de Cnidos (Εὔδοξος ὁ Κνίδιος) (Cnidos [Grècia], 408 aC - Atenes [Grècia], 355 aC), geòmetra, astrònom i metge.[1727]

1720. Pla (en premsa *a*); Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 44-47.
1721. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 743-747.
1722. Vitruvi (1995), llibre i, capítol 1, § 17, i llibre ix, capítol 8, § 1.
1723. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 914-915.
1724. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 915-921.
1725. Smith (ed.) (1867), vol. i, p. 49-50.
1726. Pla (2021), p. 72-75; Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 63-74.
1727. Pla (2016*b*), p. 313-323; Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 82-83.

EULER, Leonhard (Basilea [Suïssa], 15 d'abril de 1707 - Sant Petersburg [Rússia], 18 de setembre de 1783), matemàtic.

EUSTACI DE TESSALÒNICA (grec: Εὐστάθιος Θεσσαλονίκός; llatí: Eusthatius) (?, 1110 - Constantinoble [Imperi bizantí, avui Istambul, Turquia], 1198), erudit eclesiàstic. Les seves obres són comentaris sobre els antics poetes grecs, tractats teològics, homilies i epístoles. El seu treball més conegut és *Comentari sobre la 'Ilíada' i l''Odissea'* (*Παρεκβολαὶ εἰς τὴν Ὁμήρου Ἰλιάδα καὶ Ὀδυσείας*) que, de fet, és una compilació de comentaris d'antics autors sobre aquestes epopeies.[1728]

EUTOCI D'ASCALÓ (Εὐτόκιος ο Ασκαλωνίτης), escriptor grec, comentarista d'Apol·loni i Arquimedes. Visqué cap a la meitat del segle VI. Es conserven els originals grecs de les seves obres *Comentari als quatre primers llibres de les 'Còniques' d'Apol·loni*, *Comentari a 'Sobre l'esfera i el cilindre'*, *Comentari a 'De la mesura del cercle'*, i de llibres sobre l'equilibri d'Arquimedes.[1729]

FAETUSA (Φαέθουσα, 'la radiant'), filla d'Hèlios i de la nimfa Neera, guardava amb la seva germana Lampècia els ramats del seu pare de l'illa de Trinàcria, a Sicília.[1730]

FERMAT, Pierre de (Beaumont-de-Lomagne, [França], 17 d'agost de 1601 - Castres [França], 12 de gener de 1665), jurista i matemàtic.

FETTI, Domenico (?, ∼1589 - 4 d'abril de 1623), pintor barroc italià. Treballà principalment a Roma, Màntua i Venècia. L'any 1620 pintà un quadre que representava Arquimedes abstret mentre feia les seves recerques.

FÍDIES (Φειδίας) (segles IV-III aC), astrònom, pare d'Arquimedes.

FIELDS, John Charles (Hamilton [Ontario, Canadà], 14 de maig de 1863 - Toronto [Ontario, Canadà], 11 d'agost de 1932), matemàtic. Creà les bases de la distinció matemàtica coneguda com a *Medalla Fields.*

1728. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 120-121.
1729. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 125.
1730. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 233.

Filip II de Macedònia (Φίλιππος Β′ ὁ Μακεδών) (Pel·la [Macedònia, Grècia], 382 aC - Vergina [Macedònia, Grècia], 336 aC), rei de Macedònia, zona al nord de Grècia, del 356 al 336 aC. La seva habilitat política i militar li permeté unificar tot el regne i crear un exèrcit i una economia forts. És el pare d'Alexandre el Gran.[1731]

Filó de Bizanci (Φίλων ὁ Βυζάντιος), famós enginyer grec, probablement del segle ii aC. La seva activitat principal fou la construcció de ports i d'obres defensives. Vitruvi l'esmenta com a autor d'obres d'enginyeria militar.[1732]

Filolau de Crotona (Φιλόλαος ο Κροτωιάτης) (Crotona [Magna Grècia, ara Itàlia], ∼480 - Tebes [Grècia], ∼390 aC), matemàtic i filòsof pitagòric.[1733]

Flac, Quint Fulvi (Quintus Fulvius Flaccus) (segle iii aC), cònsul (212 aC), defensà Roma contra Anníbal, ocupà Càpua i va propugnar la concessió del dret civil als itàlics.[1734]

Fontana, Niccolò, anomenat Tartaglia (*El Quec*) (Brescia [Itàlia], 1499 - Venècia [Itàlia], 13 de desembre de 1557), matemàtic.

Fortunat, Atili (Atilius Fortunatus) (Imperi Romà, segle iv), escriptor en llatí, autor d'un tractat sobre la prosòdia i el metre horacià.[1735]

Fufici (Fufitius), arquitecte. Segons Vitruvi,[1736] és el primer autor romà que va escriure sobre arquitectura.[1737]

Gal, Gai Sulpici (Gaius Sulpicius Gallus) (segle iii aC), magistrat romà. Va arribar a la màxima magistratura de cònsol l'any 243.[1738]

1731. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 273-279.
1732. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 306-308.
1733. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 304-305.
1734. Smith (ed.) (1867), vol. ii, «Flaccus Fulvius», ítem 6, p. 154.
1735. Kaster (1988), § 221, p. 409.
1736. Vitruvi (1995), capítol vii, introducció [14], edició castellana de 1995, p. 169.
1737. Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 186.
1738. Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 207-217.

Galè de Pèrgam, Claudi (grec: Κλαύδιος Γαληνός; llatí: Claudius Galenus) (Pèrgam [Àsia Menor], 129 - ∼200 o 216), metge molt important de l'època clàssica que es dedicà a l'anatomia, conegut simplement com a Galè. Del seu nom deriva la denominació «galè» aplicada als metges. I se'l considera, també, el pare de la tecnologia farmacèutica o galènica.[1739]

Galileu, nom català de Galileo Galilei (Pisa [Itàlia], 15 de febrer de 1564 - Arcetri [Florència, Itàlia], 8 de gener de 1642), físic, matemàtic i filòsof toscà que tingué un paper important durant la revolució científica. Millorà el telescopi i, per tant, l'observació astronòmica, i donà suport a la teoria heliocèntrica de Nicolau Copèrnic.

Gauss, Carl Friedrich (Braunschweig [Alemanya], 30 d'abril de 1777 - Göttingen [Alemanya], 23 de febrer de 1855), matemàtic.

Gea o Gaia (Γαία), deessa grega que personifica la fertilitat de la Terra i, d'alguna manera, la Terra mateixa.[1740]

Gechauff, Thomas. Vegeu *Venatorius*.

Geló II (Γέλων), fill de Hieró II de Siracusa, associat en el tron amb el seu pare (240 - 216 aC), al qual va premorir uns mesos. Fou succeït pel seu fill Jeroni de Siracusa.[1741]

Gemí de Rodes (en grec: Γεμίνος; en llatí: Geminus), astrònom i matemàtic.[1742]

Hardy, Godfrey Harold (Cranleigh [Anglaterra], 7 de febrer de 1877 - Cambridge [Anglaterra], 1 de desembre de 1947), matemàtic.

Heath, Sir Thomas (Barnetby-le-Wold [North Lincolnshire, Anglaterra], 5 d'octubre de 1861 - Ashtead [Surrey, Anglaterra], 16 de març de 1940), matemàtic i alt funcionari britànic, molt

1739. Smith (ed.) (1867), vol. II, p. 207-217.

1740. Smith (ed.) (1867), vol. II, entrada «Gallus Sulpicius», n. 1, p. 228.

1741. Vegeu «Tirans de Siracusa» (Pla (2021), § 2.4.3*c*, p. 64-65); també Smith (ed.) (1867), vol. II, p. 237-238.

1742. Smith (ed.) (1867), vol. II, p. 238.

reputat pels seus llibres sobre història de les matemàtiques de l'antiga Grècia.

HEIBERG, Johan Ludvig (Aalborg [Dinamarca], 27 de novembre de 1854 - Copenhaguen [Dinamarca], 4 de gener de 1928), filòleg i historiador. És molt famós a causa de la seva edició en anglès dels *Elements* d'Euclides, les *Còniques* d'Apol·loni i l'*Almagest* de Ptolemeu, i també de les obres d'Arquimedes i Heró. L'any 1906 observà que el palimpsest d'Arquimedes —en el qual la part sobreescrita era un *Eucologi*—[1743] contenia textos desconeguts del geòmetra siracusà.

HÈLIOS, divinitat de la generació dels Titans, representació antropomòrfica del Sol.[1744]

HÈMERA (Ἡμέρα), mare de Thalassa.

HERÀCLIDES (segle III aC), amic i biògraf d'Arquimedes, segons Eutoci.[1745]

HERÀCLIT D'EFES (Ἡράκλειτος ὁ Ἐφέσιος) (Efes [Jònia], ∼535 - ∼475 aC), filòsof presocràtic de l'escola jònica, encara que diferia en alguns punts dels seus principis generals.[1746]

HERÓ D'ALEXANDRIA (Ἥρων) (Alexandria [Egipte], ∼10-∼70), enginyer i geòmetra.[1747]

HERVAGIUS, Johann (Johann Herwagen) (†1564), impressor de Basilea.

HICETES II DE SIRACUSA (Ἱκέτας) (segle III aC).[1748]

HIERÓ II (Ἱέρω) (Siracusa [Sicília], 306-261 aC), tirà, descendent de Geló I i d'una serventa. Segons Polibi, derrotà els mamertins. Les seves aliances oscil·laven entre els cartaginesos i els

1743. DIEC (1995): «Recull dels oficis del diumenge i de les principals festes de l'any.»

1744. SMITH (ed.) (1867), «Heracleides», ítem 2, vol. II, p. 375-376.

1745. SMITH (ed.) (1867), «Heracleides», ítem 2, vol. II, p. 389-390.

1746. PLA (2016*b*), p. 203-204; SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 391-392.

1747. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 437-438.

1748. PLA (2021), § 2.4.3*c*, p. 59-60; SMITH (ed.) (1867), «Hicetas», 2, p. 450.

romans, fins que l'any 241 aC Roma el reconegué com a rei de Siracusa i hi establí una aliança permanent.[1749]

Hiparc de Nicea (en grec: Ἵππαρχος; en llatí: Hipparchus) (Nicea [Regne de Bitínia, Àsia Menor], ∼ 190 aC - ?, ∼ 120 aC), astrònom, geògraf i matemàtic, també conegut com a Hiparc de Rodes. És l'inventor de l'astrolabi i l'autor del primer catàleg d'estels de la història.[1750]

Hipàtia o Hipàcia d'Alexandria (Ὑπατία) (Alexandria [Egipte], ∼355 - març de 415), matemàtica, filla de Teó d'Alexandria.[1751]

Hípies d'Elis (Ἱππίας Ηλείος) (Elis [Grècia], 443-399 aC), sofista i filòsof. Creà la quadratriu per a trisecar l'angle.[1752]

Hipòcrates de Cos (Ἱπποκράτης ὁ Κῷς) (Cos [Grècia], ∼460 - ∼370 aC), metge de l'època de Pèricles. El famós *jurament hipocràtic* és seu.[1753]

Hipòcrates de Quios (Ἱπποκράτης ὁ Χίος) (Quios [Grècia], ∼470 - ∼410 aC), matemàtic.[1754]

Hipòcrates de Siracusa (Ἱπποκράτης ὁ Συράκουσαι) (Cartago, ? - Siracusa [Sicília], ∼210 aC), tirà, juntament amb el seu germà petit Epícides (214-212 aC), durant la Segona Guerra Púnica.[1755]

Hohenstaufen, dinastia de reis germànics (1138-1254) que s'identifica també com els gibel·lins en el conegut conflicte entre güelfs i gibel·lins.[1756]

1749. Pla (2021), § 2.4.3*c*, p. 62-64; Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 455-457.

1750. Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 476-477.

1751. Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 537.

1752. Pla (2016*b*), p. 251-253; Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 479.

1753. Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 482-489.

1754. Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 481-482.

1755. Pla (2021), § 2.4.3*c*, p. 65-66; Smith (ed.) (1867), vol. ii, p. 480-481.

1756. El conflicte entre güelfs i gibel·lins enfrontà les cases de Welf i Hohenstaufen, dues faccions que defensaven, respectivament, el papat i el

Homer (Ὅμηερος) [Grècia, segle VIII aC], poeta, autor de la *Ilíada* i l'*Odisea*. Cal considerar-lo el pare de les obres èpiques, juntament amb Virgili.[1757]

Iàmblic de Calcis (en grec: Ἰάμβλιχος; en llatí: Iamblichus) (Calcis [Eubea, Grècia], segles III-IV), famós filòsof neoplatònic.[1758]

ibn Qurra ibn Marwan al-Sabi al-Harrani, Abu-l-Hàssan Thàbit (AlṭṢābi Thābit ibn Qurra al Ḥarrānī) (Harran [Turquia], 836 - Bagdad [Iraq], 18 de febrer de 901), astrònom, musicòleg i matemàtic àrab, conegut com a Thàbit ibn Qurra.

ibn Rušd, Abū-l-Walīd Muḥàmmad, amb el nom llatinitzat Averrois (Còrdova [península Ibèrica], 14 d'abril de 1126 - Marràqueix [Marroc], 10 de desembre de 1198), filòsof, metge, jurista i astrònom d'al-Àndalus.

ibn Sīnā, Abū 'Alī al-Husayn ibn 'Abd Allāh, llatinitzat Avicenna, (Bukharà [Uzbekistan], 23 d'agost de 980 - Hamadn [Iran], 18 de juny de 1037), filòsof i metge científic. La seva producció fou molt prolífica.

Isidor de Milet el Vell (Ἰσ΄δωρος) (Milet, ∼442 - ?, ∼537), arquitecte i professor. Malgrat que desenvolupà l'ensenyament de les matemàtiques i la física a Alexandria i Constantinoble durant pràcticament tota la seva vida, és més recordat per la seva obra arquitectònica, especialment per la reconstrucció de Santa Sofia de Constantinoble, que començà l'any 532 amb Antemi de Tral·les i s'inaugurà el 27 de desembre de l'any 537.

Itard, Jean (Serrières [França], 16 de juny de 1902 - París [França], 8 de maig de 1979), historiador de la matemàtica especialitzat en els segles XVI i XVII.

Jeroni de Siracusa, rei del 215 al 214 aC, quan tenia quinze anys. Era net de Hieró II i fill de Geló. Després de la batalla de Cannes, dubtà de la primacia romana i pactà amb els carta-

Sacre Imperi Romà, en un conflicte que van mantenir al centre i nord de la península Itàlica durant els segles XII i XIII.

1757. Pla (2016*b*), p. 168-177; Smith (ed.) (1867), vol. II, p. 500-512.

1758. Smith (ed.) (1867), vol. II, p. 549-550.

ginesos, cosa que comportà el setge de Siracusa en el qual morí Arquimedes.[1759]

Juli Cèsar (Gaius Iulius Cæsar) (Roma [Itàlia], 12 de juliol de 100 aC - 15 de març de 44 aC), polític, escriptor i militar, membre de la família noble Júlia.[1760]

Júpiter (Iuppiter), déu suprem del cel i del llamp, cap del panteó, segons la mitologia romana. Va establir els principis de la religió romana, entre els quals els sacrificis, que va negociar amb Numa Pompili, el segon rei de Roma.[1761]

Kepler, Johannes (Weil der Stadt, Baden-Württemberg [Sacre Imperi Romanogermànic, ara Alemanya], 27 de desembre de 1571 - Regensburg [ara Alemanya], 15 de novembre de 1630), astrònom, astròleg i matemàtic.

Knorr, Wilbur Richard (Richmon Hill [Nova York, Estats Units d'Amèrica], 29 d'agost de 1945 - Palo Alto [Califòrnia, Estats Units d'Amèrica], 18 de març de 1997), historiador de la matemàtica. Se'l considera l'«historiador més provocador de la matemàtica grega que ha donat el segle XX».

Koyré, Alexandre (Aleksandr Vladímirovitx Koiranski) (Taganrog [Rússia], 29 d'agost de 1892 - París [França], 28 d'abril de 1964), filòsof i historiador de la ciència.

Lagrange, Joseph-Louis (Torí [Itàlia], 25 de gener de 1736 - París [França], 10 d'abril de 1813), matemàtic, físic i astrònom francès d'origen italià.

Lampetia (Λαμπετία, 'la que brilla'), filla d'Hèlios i de la nimfa Neera, guardava amb la seva germana Faetusa els ramats del seu pare de l'illa de Trinàcria (Sicília).[1762]

Latona (Latona), deessa de la mitologia romana que correspon a la deessa grega Leto.[1763]

1759. Pla (2021), § 2.4.3*c*, p. 64-65; Smith (ed.) (1867), vol. II, p. 458-459.

1760. Smith (ed.) (1867), vol. I, p. 539-545.

1761. Smith (ed.) (1867), vol. II, p. 659-660.

1762. Smith (ed.) (1867), vol. II, p. 715.

1763. Smith (ed.) (1867), vol. II, p. 726.

LEGENDRE, Adrien-Marie (París [França], 18 de setembre de 1752 - Auteuil [França], 10 de gener de 1833), matemàtic conegut, sobretot, pels seus treballs sobre integrals el·líptiques i sobre teoria de nombres. És l'autor dels *Elements de geometria*.

LESSING, Gotthold Ephraims (Kamenz [Alemanya], 22 de gener de 1729 - Brunsvic [Alemanya], 15 de febrer de 1781), poeta més important de la il·lustració que, amb els seus drames i assajos teòrics, va tenir una influència significativa en l'evolució de la literatura alemanya.

LETO (Λητώ), deessa de la mitologia grega equivalent de la romana Latona.[1764]

LINUS (Λινος), personatge de la mitologia grega, fill d'Apol·lo i de la musa Urània i germà d'Orfeu.[1765]

LIU HUI (Liú Huī) (Zibo [Xina], 225 - ?, 295), matemàtic.

LIVI, Tit (Titus Livius) (Patavium [ara Pàdua, Itàlia], 59 aC - 17 dC), historiador romà. El títol de la seva obra més famosa, *Des de la fundació de la ciutat* (*Ab Urbe Condita*), colossal, descriu la història de Roma des del 753 aC fins a la mort de Drus Major, l'any 9 dC.[1766]

LLEÓ DE TESSALÒNICA (Λέων), filòsof i eclesiàstic bizantí del segle IX. Del 832 al 842, patriarca de Constantinoble. És conegut com *El filòsof* (*ὁ φιλόσοφος*) i també com *El matemàtic* (*ὁ μαθηματικός*).[1767]

LLUCIÀ DE SAMÒSATA (en grec: Λουκιανὸς ὁ Σαμοσατεύς; en llatí: Lucianus Samosatensis) (Samòsata [Síria romana, ara Turquia], 120 - ?), important escriptor grec amb arrels sirianes.[1768]

LORIA, Gino (Màntua [Itàlia], 19 de maig de 1862 - Gènova [Itàlia], 30 de gener de 1954), matemàtic molt reputat, pels seus treballs en història de la matemàtica.

1764. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 772-773.
1765. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 787-788.
1766. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 790-796.
1767. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 745-749.
1768. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 812-822.

MACH, Ernst (Brno [Imperi austríac, ara República Txeca], 1838 - Munic [Alemanya], 1916), físic i filòsof austríac.

MANFRED I DE SICÍLIA (Venosa [Itàlia], 1232 - Benevento [Itàlia], 1266), regent de Sicília (1254-1258) i rei de Sicília (1258-1266).

MARC FULVI FLAC (Marcus Fulvius Q. F. M. N. Flaccus), magistrat romà del segle III aC, juntament amb Api Claudi Càudex.

MARCEL, Marc Claudi (Marcus Claudius M. F. M. N. Marcellus) (?, 266 aC - ?, 208 aC), cinc vegades cònsol, establí el setge, primer, i el bloqueig total, després, de Siracusa (214-212 aC) durant la Segona Guerra Púnica. Finalment, la conquerí el 212 aC, malgrat els esforços defensius atribuïts a Arquimedes.[1769]

MCKENZIE, Robert Tait (Almonte [Ontario, Canadà], 26 de maig de 1867 - Filadèlfia [Estats Units d'Amèrica], 28 d'abril de 1938), metge, escultor i atleta. Dissenyà la Medalla Fields.

MENECME (Μέναιχμος) (Alopeconnés [ara Turquia], ∼380 - Cízic [Àsia Menor], 320 aC), filòsof i matemàtic grec.[1770]

MÈRIC (Mericus) (segle III a C), cap de mercenaris hispans al servei de Siracusa, en el temps que aquesta ciutat era assetjada per Marc Claudi Marcel III (212 aC).[1771]

MOERBEKE, Guillem van (en flamenc: Guillem van Moerbeke; en llatí: Gulielmus de Mœrbecum) (Moerbeke [Bèlgica], ∼1215 - Corint [Grècia], ∼1286), clergue flamenc que traduí amb molta perícia un gran nombre d'obres d'autors clàssics. El 1277 fou nomenat bisbe de Corint, enclavament de ritu llatí en territori ortodox. Tomàs d'Aquino li encarregà una traducció completa de l'obra d'Aristòtil.[1772] També en feu d'algunes obres d'Heró i d'Arquimedes.

1769. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 927-931.

1770. PLA (2016*b*), p. 323-328; FUENTES (2005).

1771. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 1047.

1772. Les traduccions fetes a partir de l'original grec foren realment importants perquè corregien molts errors de traductors anteriors.

NEERA (Νέαιρα), nimfa, esposa d'Hèlios i mare de Faetusa i Lampècia.[1773]

NEWTON, Sir Isaac (Woolsthorpe-by-Colsterworth [Lincolnshire, Anglaterra], 4 de gener de 1643 - Kensington [Middlesex, Anglaterra], 31 de març de 1727), físic, matemàtic i filòsof.

NICOLAU V (Sarzana [Itàlia], 15 de novembre de 1397 - Roma [Itàlia], 24 de març de 1455), papa de l'Església catòlica del 1447 al 1455.

NICOMEDES (Νικομήδης) (~280 aC - ?, ~210 aC), matemàtic grec.[1774]

NIZZE, Johann Ernst (Ribnitz [Alemanya], 16 de novembre de 1788 - Stralsund [Alemanya], 10 de febrer de 1872), professor de matemàtiques i filòleg de llengües clàssiques.

NUMA POMPILI (Numa Pompilius) (715-672 aC), segon rei de Roma, successor de Ròmul, segons la informació aportada per Plutarc i Titus Livi.[1775]

ODISSEU (Οδυσσεύς), rei d'Ítaca, defensor de Troia, un dels herois de les obres d'Homer.[1776]

ORFEU (en grec: Ορφεύς; en llatí: Orpheus), personatge mític enormement polifacètic. Les llegendes que en parlen donen, encara avui, grans problemes als estudiosos perquè els orígens d'aquest poeta i músic encantador de feres es perden en la boira del temps.[1777]

PAPPOS D'ALEXANDRIA (Πάππος) (Alexandria [Egipte], ~290 - ~350), geòmetra de la Grècia clàssica.[1778]

PARIGI, Giulio (Florència [Itàlia], 1571 - ?, 1635), arquitecte i pintor.

PASCAL, Blaise (Clarmont d'Alvèrnia [França], 19 de juny de 1623 - París [França], 19 d'agost de 1662), filòsof, matemàtic, físic, inventor, escriptor, moralista, místic i teòleg occità con-

1773. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 1145.
1774. PLA (en premsa c); HOLME (2010), p. 109-116.
1775. SMITH (ed.) (1867), vol. II, p. 1212-1213.
1776. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 11-14.
1777. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 59-62.
1778. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 119-120.

siderat un dels personatges més brillants de la saviesa occidental.

Pell, John (Southwick [Sussex, Anglaterra], 1 de març de 1611 - Westminster [Londres, Anglaterra], 12 de desembre de 1685), matemàtic.

Pelòpides (Πελοπίδας) (Tebes [Grècia], ∼420 aC - batalla de Cinoscèfales [Grècia] ∼364 aC), general i home d'estat de família noble.[1779]

Pèricles (Περιςλῆς) (Atenes [Grècia], 495-429 aC), home d'estat grec atenenc tan important que va donar nom a tot el segle V aC (segle de Pèricles).[1780]

Peyrard, François (Saint-Victor-Malescours [Alt Loira, França], ∼1760 - París [França], 3 d'octubre de 1822), professor de matemàtiques, republicà molt actiu en defensa de l'educació durant la Revolució Francesa. Traductor molt reconegut de llatí i grec. Va trobar, entre els documents del Vaticà, el *Vaticanus græcus 190*, que li va permetre establir la versió completa dels *Elements* d'Euclides en francès.

Pick, Alexander (Viena (Imperi austríac), 10 d'agost de 1859 - camp de concentració de Theresienstadt [República Txeca], 26 de juliol de 1942), matemàtic jueu.

Píndar (Πίνδαρος) (Cinoscèfals [Beòcia, Grècia], ∼520 aC - Argos [Grècia], ∼440 aC), poeta líric, autor d'importants epinicis —*ἐπινίκιον*, 'oda de victòria'. És considerat un dels més grans exponents de la lírica coral.[1781]

Pirros de l'Epir (Πύῤῥος) (Epir [Grècia], 318 aC - Argos [Grècia], 272 aC), rei de l'Epir amb una vida de conquestes que el convertí en un gran general. Assolí victòries pírriques, és a dir, amb grans pèrdues d'homes i de material de guerra. Fou tirà de Sicília del 278 al 276 aC.[1782]

1779. Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 179-180.
1780. Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 192-200.
1781. Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 367-370.
1782. Pla (2021), 2.4.3*c*, p. 61-62; Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 610-616.

PITÀGORES DE SAMOS (Πυθαγόρας) (Samos [Grècia] - Metapont [Magna Grècia, ara Itàlia]), filòsof i matemàtic.[1783]

PLATÓ (Πλάτων), l'autèntic nom del qual era, potser, Aristocles, com el seu avi, (Atenes [Grècia], ∼21 de maig de 427-347 aC), filòsof d'immensa influència en el pensament de la Grècia clàssica i de la filosofia universal. Fou deixeble de Cràtil i Sòcrates i mestre d'Aristòtil. Fundà l'Acadèmia (*Ἀκαδήμεια*). És l'autor dels famosos *Diàlegs socràtics*.[1784]

PLINI EL VELL (Gaius Plinius Secundus) (Como [Itàlia], ∼24 - Estàbia [Itàlia], 25 d'agost de 79), escriptor llatí, científic, naturalista i militar. És conegut principalment per la seva obra *Història natural* (*Naturalis Historia*) i per l'episodi de la seva mort. L'any 79, trobant-se a prop de Nàpols i encuriosit per l'erupció del volcà Vesuvi, va morir asfixiat pels gasos.[1785]

PLUTARC, Luci Mestri (Πλούταρχος) (Queronea [Grècia], ∼46 - Delfos [Grècia], ∼120), historiador i assagista que visqué en temps de la Grècia romana. És conegut, sobretot, per la seva col·lecció de biografies de personatges grecs i romans titulada *Vides paral·leles*.[1786]

POLIBI (Πολύβιος) (Megalòpolis [Grècia], ∼200 aC - ? [Grècia], 120 aC), historiador famós per la seva obra *Històries* (*Ἱστορίαι*), que cobreix amb detall el període del 264 al 146 aC. També és conegut per les seves idees sobre la separació de poders en un govern, un concepte que seria desenvolupat segles més tard a l'Europa de final del segle XVII i començament del XVIII. És un dels fundadors de la historiografia de Roma.[1787]

POSIDONI D'APAMEA (Ποσειδώνιος ὁ Ἀπανεύς), conegut també com a Posidoni de Rodes, ὁ Ῥόδιος (Apamea [Síria], 135 aC - Rodes [Grècia], 51 aC), polític, geògraf, astrònom, historiador i filòsof estoic.[1788]

1783. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 616-625.
1784. PLA (2016*b*), p. 276-313; SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 391-405.
1785. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 414-421.
1786. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 429-431.
1787. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 443-449.
1788. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 507-509.

Procle (en grec: Πρόκλος; llatí: Proclus) (Constantinoble [Imperi Romà d'Orient, ara Turquia], 412 - Atenes [Grècia], 485), anomenat també el *Diàdoc* (Προκλός ὁ Διάδοκος), filòsof neoplatònic, contemporani de Plutarc. Fou el cap de l'escola neoplatònica d'Atenes i un dels darrers representants de la filosofia grega i, alhora, del neoplatonisme.[1789]

Ptolemeu, Claudi (Κλαύδιος Πτολεμαίος) (Alexandria [Egipte], ∼ 85 - ∼165), astrònom, geògraf i matemàtic grecoegipci.[1790]

Ptolemeu I Sòter, «El salvador» (Πτολεμαῖος Α΄ Σωτήρ) (Macedònia, ∼367 aC - Alexandria [Egipte], ∼282 aC), governador d'Egipte i després rei (305-282 aC). És el fundador de la dinastia ptolemaica.[1791]

Ptolemeu II Filadelf, «El que estima el seu germà» (Πτολεμαῖος Β΄ Φιλάδελφος) (illa de Cos [Grècia], 309 aC - Alexandria [Egipte], 29 de gener del 246 aC), rei d'Egipte (283-246 aC) de la dinastia ptolemaica.[1792]

Ptolemeu III Evergetes, «El benefactor» (Πτολεμαῖος Γ΄ Εὐεργέτης) (Cos [Grècia], 285 aC - Alexandria [Egipte], 222 aC), rei d'Egipte de la dinastia ptolemaica. Regnà del 246 al 222 aC.[1793]

Rem (Remus), fundador, amb el seu germà Ròmul, de la ciutat de Roma i del Senat romà.[1794]

Rey, Abel (Chalon-sur-Saône [França], 29 de desembre de 1873 - París [França], 13 de gener de 1940), filòsof i historiador de la ciència.

Riemann, Bernhard (Breselenz [Alemanya], 17 de setembre de 1826 - Verbania [Itàlia], 20 de juliol de 1866), matemàtic.

Rivault de Fleurence, David (La Cropte [França], 1571 - Tours [França], gener de 1616), matemàtic i erudit.

1789. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 533-537.
1790. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 569-580.
1791. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 581-586.
1792. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 586-588.
1793. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 588-589.
1794. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 645.

Ròmul (Romulus), fundador, amb el seu germà Rem, de la ciutat de Roma i del Senat romà.[1795]

Rose, Valentin (Berlín [Alemanya], 1829-1916), filòleg clàssic. Treballà a la biblioteca de Berlín, de la qual fou director del 1885 al 1905. Editià l'obra d'Aristòtil i el cèlebre *Directori*, el 1893.

Saint-Vincent, Grégoire de (Gregorius de Sancto Vincentio) (Bruges [Països Baixos espanyols, ara Bèlgica], 8 de setembre de 1584 - Gant [Bèlgica], 27 de gener de 1667), matemàtic jesuïta flamenc.

Sales, Joan (Barcelona [Catalunya, Espanya], 19 de novembre de 1912 - 12 de novembre de 1983), escriptor, poeta, traductor i editor. La seva obra més coneguda és la novel·la *Incerta glòria*.

Salmoneu (Σαλμωνεύς), superb rei de l'Èlida, que pretenia igualar-se a Zeus i exigia que els seus súbdits li retessin el mateix culte, segons la mitologia grega.[1796]

Saturn (Sāturnus), divinitat de caràcter agrari de la mitologia romana que protegia els camps sembrats i els fruits de la terra. Es correspon amb el déu Cronos grec.[1797]

Sèneca, Luci Anneu (Lucius Annæus Seneca), conegut simplement com a Sèneca (Còrdova [Hispània], 4 aC - Roma [Itàlia], 65 aC), filòsof romà, polític, dramaturg i humorista de l'edat d'or de la literatura llatina.[1798]

Simplici (en grec: Σιμπλίκιος; en llatí: Simplicius) (Cilícia [Anatòlia], ∼490 - Atenes [Grècia], ∼560), un dels darrers filòsofs neoplatònics, defensor de l'antiga mitologia grega contra l'expansió del cristianisme. Fou un comentarista important d'alguna de les obres d'Arquimedes.[1799]

Snel van Royen, Willebrord, conegut com a Snel (Leiden [Països

1795. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 558-561.
1796. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 698.
1797. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 726-727.
1798. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 777-783.
1799. Smith (ed.) (1867), vol. iii, p. 837-839.

Baixos], 13 de juny de 1580 - 30 d'octubre de 1626), astrònom i matemàtic.

Sòcrates d'Atenes (Σοκράτης) (Atenes [Grècia], 436-338 aC), pare de la filosofia grega i occidental.[1800]

Sòcrates de Cnidos (Σοκράτης ὁ Κνίδιος) (Cnidos [Grècia], segle III aC), benefactor del temple de Delfos.

Stevin, Simon (Simon Stevinus) (Bruges [comtat de Flandes, ara Bèlgica], 1548 - La Haia [comtat d'Holanda, ara Holanda], 1620), matemàtic i enginyer.

Struve, Jacob (Horst [Schleswig-Holstein, Alemanya], 21 de novembre de 1755 - Altona [Hamburg, Alemanya], 2 d'abril de 1841), matemàtic.

Struve, Karl Ludwig (Hannover [Baixa Saxònia, Alemanya], 2 de maig de 1785 - Kaliningrad [Rússia], 17 de juny de 1838), filòleg clàssic, fill de Jacob Struve.

Sturm, Johann Christoph (Hilpoltstein [Alemanya], 3 de novembre de 1635 - Altdorf bei Nürnberg [Alemanya], 26 de novembre de 1703), filòsof, astrònom i matemàtic.

Suter, Heinrich (Hedingen [Suïssa], 4 de gener de 1848 - Dornach [Suïssa], 17 de març de 1922), historiador de la ciència especialitzat en la matemàtica i l'astronomia islàmiques.

Tales de Milet (Θαλῆς ὁ Μιλέσιος) (Milet [Grècia], ∼624 - ∼547 aC), matemàtic i filòsof.[1801]

Tartaglia (*El Quec*). Vegeu *Niccolò Fontana.*

Teó d'Alexandria (Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς) (Alexandria [Egipte], ∼370 - ∼415), matemàtic i astrònom grec, pare d'Hipàtia d'Alexandria.[1802]

Teó d'Esmirna (Θέων ὁ Σμυρναίος) (Esmirna [Àsia Menor], ∼70 - ?, ∼135), filòsof.[1803]

1800. Pla (2016*b*), p. 268-276; Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 847-855.
1801. Pla (2016*b*), p. 69-78; Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 1016-1019.
1802. Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 1079-1080.
1803. Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 1079-1080.

TEODOSI DE TRÍPOLI (en grec: Θεὸδοσιος; en llatí: Theodosius), matemàtic i astrònom grec.[1804]

TERTUL·LIÀ, Quint Septimi Florent (Quintus Septimus Florens Tertullianus) (Cartago romana, ∼160 - 220), pare de l'Església apologeta, escriptor, filòsof i jurista.[1805]

THALASSA (Θάλασσα), deessa primordial del mar, filla d'Èter i Hèmera, personificació de la mar Mediterrània, segons la mitologia grega.[1806]

TOMÀS D'AQUINO (Tommaso d'Aquino) (Roccasecca [Regne de Sicília, ara Itàlia], 1225 - Fossanova [Estats Pontificis], 7 de març de 1274), un dels filòsofs-teòlegs més importants de l'edat mitjana. Va proporcionar bases importants per a la teologia cristiana, en incorporar gran part del llenguatge i de les idees aristotèliques.

TORELLI, Giuseppe (Verona [Itàlia], 3 de novembre de 1721 - 18 d'agost de 1781), matemàtic, lletrat i traductor.

TORICELLI, Evangelista (Faenza [Itàlia], 15 d'octubre de 1608 - Florència [Itàlia], 25 d'octubre de 1647), físic i matemàtic conegut per haver estat l'inventor del baròmetre.

TUCÍDIDES (∼460-∼400 aC), historiador, autor de la *Història de la guerra del Peloponès* (*Ἰστορίαι*), en què recull la guerra del segle V aC entre Esparta i Atenes. Es considera el primer treball històric científic, en què descriu el món fruit dels actes senzills dels humans, sense cap intervenció dels déus.[1807]

TZETZES, Joan (Ἰωάννης Τζέτζης) (Constantinoble [Imperi bizantí, avui Istanbul, Turquia], 1110-1180), escriptor grec. Destacà com a poeta i gramàtic, però sobretot per la seva obra *Llibre de les històries*, més coneguda com a *Khilíades*, important pel fet de contenir un recull d'obres actualment desaparegudes d'autors anteriors. Contribuí notablement a la redescoberta de les regles de la poesia grega antiga.[1808]

1804. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 1071.
1805. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 1006-1012.
1806. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 1015.
1807. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 1111-1116.
1808. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 1199-1201.

Urà (Οὐρανός), un dels déus primordials de la mitologia grega, en concret, el del cel.[1809]

Urània (Οὐρανία), la menor de les nou muses gregues, inspirà l'astrologia i les poesies basades en el cel. Per això sempre va vestida de blau. També és la musa de les matemàtiques i d'altres ciències. Per aquesta raó, és representada amb instruments de mesura, com ara el compàs.[1810]

Valenciennes, Pierre-Henri de (Tolosa de Llenguadoc [França], 6 de desembre de 1750 - París [França], 16 de febrer de 1819), pintor francès, autor del quadre que representa el moment en què Ciceró troba la tomba d'Arquimedes (1787).

Valeri Màxim (Valerius Maximus), conegut com Marc Valeri Màxim i com a Publi Valeri Màxim (Roma, segle I aC), compilador d'anècdotes històriques en l'obra titulada *Dates i fets memorables* (*Factorum ac dictorum memorabilium libri IX*, conegut també com a *Facta et dicta memorabilia*).[1811] Visqué en temps de Juli Cèsar i d'August.[1812]

Valla, Giorgio (Piacenza [ara Itàlia], 1447 - Venècia [ara Itàlia], 1500), humanista i escriptor italià del Renaixement, sobretot conegut per la seva enciclopèdia, *Sobre el que cal recercar i allò de què cal fugir* (*De expetendis et fugiendis rebus*), la primera a ser impresa.

Varró, Marc Terenci (Marcus Terentius Varro) (Reate [ara Itàlia], 116-27 aC), polígraf, escriptor, militar i magistrat romà, i es considera un dels erudits més grans de la història de Roma.[1813]

Venatorius, pseudònim de Thomas Gechauff (Nuremberg [ara Alemanya], 1488 - 4 de febrer de 1551), geòmetra i teòleg protestant. Va editar, entre d'altres, les obres d'Arquimedes.

1809. Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 1284.
1810. Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 1284.
1811. Vegeu <http://www.tdx.cat/handle/10803/283115>.
1812. Smith (ed.) (1867), entrada 'Maximus, Valerius', vol. II, p. 1001-1003.
1813. Smith (ed.) (1867), vol. III, p. 1223-1227.

VIMONT, Édouard (París [França], 8 d'agost de 1846 - 1 de gener de 1930), artista francès del segle XIX que pin tà un oli que s'ha perdut però que representava la mort d'Arquimedes.

VIRGILI, conegut també com a Publi Virgili Maró (Maro Publius Vergilius) (Andes [prop de Màntua, Itàlia], 15 d'octubre de 70 aC - Brindes [ara Bríndisi, Itàlia], 21 de setembre de 19 aC), poeta romà, autor de les *Bucòliques*,[1814] les *Geòrgiques*[1815] i l'*Eneida*.[1816]

VITRUVI POL·LIÓ, Marc (Marcus Vitruvius Pollio) (Roma, [Itàlia], 75 aC - ?, 10 aC), arquitecte i enginyer, autor de *Sobre l'arquitectura*, l'únic tractat grecoromà d'arquitectura que ens ha arribat i font d'inspiració artística durant segles.[1817]

XAMBÓ, Sebastià (Vilallonga de Ter [Catalunya, Espanya], 1945), matemàtic.

ZENÓ DE CÍTIUM (Ζήνων ὁ Σιδώνιος) (Sidó [ara Líban], 150 aC - Atenes [Grècia], 150 aC), filòsof fundador de l'estoïcisme.[1818]

ZENÓ D'ELEA (Ζήνων ὁ Ελεάτης) (Vélia [ara Itàlia] 490-430 aC), filòsof de l'escola eleàtica. És molt conegut per les seves paradoxes.[1819]

ZEUS (Ζέυς), déu suprem de l'Olimp en la mitologia grega.[1820]

ZEUXIP (Ζεύξιππος) (segle III aC), geòmetra amic d'Arquimedes a qui va adreçar el sistema numèric abans d'elaborar la monografia *Arenari*.

ZONARAS, Joan (en grec: Ἰωάννης ὁ Ζωναρᾶς; en llatí: Ioannis Zōnarās) (segle XII), teòleg i historiador romà d'orient.[1821]

1814. Prové de la paraula grega *βουκολικά*, que deriva de *βουκόλος*, 'pastor'. També se les anomena *Ἐκλογαί*, 'èglogues de poesia excelsa'.
1815. Del grec: *γεωργικός*, 'granger'.
1816. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 1263-1268.
1817. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 1276-1278.
1818. SMITH (ed.) (1867), entrada 7, vol. III, p. 1318.
1819. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 1317-1318.
1820. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 1322-1324.
1821. SMITH (ed.) (1867), vol. III, p. 1331.

Bibliografia

Acerbi, Fabio (2003). «On the shoulders of Hipparcus. A Reappraisal of Ancient Greek Combinatoris». *Archive for History of Exact Sciences*, 57, p. 465- 502.

——— (2007). *Euclide*: *Tutte le opere*. Milà: Bompiani.

Alembert, Jean-le-Rond d' (1751). «Discourse préliminaire de l'Encyclopédie». [Publicat en el primer volum de l'*L'Encyclopédie o Dictionre raisonné des sciences, des arts et des métiers*. París: Andrée le Breton. En línia a <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k75526p.texteImage>]

Antemi de Tral·les (1777). *Paradoxes de mécanique*. París: Imprimerie Royale. [Traducció de M. Dupuy. En línia a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/anthemius/fragments.htm> o <https://books.google.fr/books?id=AVwOAAAAQAAJ>]

Apol·loni de Perge (1963). *Les còniques*. París: Albert Blanchard. [Traducció, introducció i notes de P. ver Eecke. Parcialment en castellà, Vera (1970), vol. ii, p. 299-464. En anglès, Heath (1876) i, en grec i llatí, Heiberg (1891-1893)]

Arquimedes (iii aC). Edicions clàssiques de les obres d'Arquimedes en línia a <http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupname?key=Archimedes>.

——— (1807). *Œuvres d'Archimède*. París: François Buisson. [Vegeu Peyrard (1807)]

——— (1997). *Mètode*. [En català, González Urbaneja i Vaqué (1997). En castellà, González Urbaneja i Vaqué (1993), Ortiz-García (2005), p. 250-355, i, parcialment, Vera (1970), vol. ii, p. 94-147. En anglès, Heath (1894), p. 99-150, i Dijksterhuis (1987), p. 313-336. En francès, Eecke (1960), vol. i, p. 135-236, i Mugler (1971*b*), p. 82-127. I, en italià, Frajese (1974), p. 555-610]

ARQUIMEDES (2009*a*). *Sobre l'equilibri de les figures planes.* [2 v. En castellà, VERA (1970), vol. II, p. 183-204, i ORTIZ-GARCÍA (2009), p. 81-124. En anglès, HEATH (1894), p. 189-220, i DIJKSTERHUIS (1987), p. 286-3360. En francès, EECKE (1960), vol. I, p. 393-352, i MUGLER (1971*a*), p. 80-127. I, en italià, FRAJESE (1974), p. 397-446]

——— (2009*b*). *Sobre les espirals.* [En castellà, VERA (1970), vol. II, p. 147-183, i ORTIZ-GARCÍA (2009), p. 13-71. En anglès, HEATH (1894), p. 151-188, i DIJKSTERHUIS (1987), p. 264-285. En francès, EECKE (1960), vol. I, p. 237-300. I, en italià, FRAJESE (1974), p. 311-386]

——— (2009*c*). *Sobre els cossos que floten.* [2 v. En castellà, ORTIZ-GARCÍA (2009), p. 195-247, i, parcialment, VERA (1970), vol. II, p. 238-260. En anglès, HEATH (1894), p. 253-300, i DIJKSTERHUIS (1987), p. 373-398. En francès, LEGRANDE (1891), EECKE (1960), vol. II, p. 407-463, i MUGLER (1971*b*), p. 6-66. I, en italià, FRAJESE (1974), p. 525-554. En línia, en grec i italià, a <http://www.heinrichfleck.net/quaderni/corpigalleggianti.pdf>]

——— (2009*d*). *Arenari.* [En castellà, VERA (1970), vol. II, p. 147-183, i ORTIZ-GARCÍA (2009), p. 13-71. En anglès, HEATH (1894), p. 151-188, i DIJKSTERHUIS (1987), p. 360-372. En francès, EECKE (1960), vol. I, p. 353-374, i MUGLER (1971*a*), p. 127-158. I, en italià, FRAJESE (1974), p. 441-470]

——— (2009*e*). *Lemes.* [En castellà, ORTIZ-GARCÍA (2009), p. 327-342. En anglès, HEATH (1894), p. 301-318, i DIJKSTERHUIS (1987), p. 401-405. En francès, EECKE (1960), vol. II, p. 523-542, i MUGLER (1971*a*), p. 134-164. I, en italià, FRAJESE (1974), p. 615-62]

——— (2009*f*). *L'ostomaquió.* [En castellà, ORTIZ-GARCÍA (2009), p. 257-263. En anglès, DIJKSTERHUIS (1987), p. 408-412. En francès, EECKE (1960), vol. II, p. 467-473, i MUGLER (1971*a*), p. 134-164]

——— (2009*g*). *El problema dels bous.* [En castellà, VERA (1970), vol. II, p. 218-223, i ORTIZ-GARCÍA (2009), p. 353-357. En anglès, HEATH (1894), p. 319-326, i DIJKSTERHUIS (1987), p. 398-401. En francès, EECKE (1960), vol. II, p. 545-547, i MUGLER (1971*a*), p. 170-173. I, en italià, FRAJESE (1974), p. 627-628]

——— (2010). *Sobre l'esfera i el cilindre.* [2 v. En català, MASIÀ (2010), p. 47-201, 160 i 162-201. En castellà, VERA (1970), vol. II, p. 23-94, i ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 107-234 i 202-234. En anglès, HEATH (1894), p. 1-90, i DIJKSTERHUIS (1987), p. 141-221 i 187-221. En francès, EECKE (1960), vol. I, p. 1-124, i MUGLER (1970), p. 8-13. I, en italià, FRAJESE (1974), p. 69-212]

ARQUIMEDES (2016*a*). *Sobre els conoides i els esferoides.* [En català, MASIÀ (2016), p. 13-129. En castellà, VERA (1970), vol. II, p. 94-147, i ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 189-247. En anglès, HEATH (1894), p. 99-149, i DIJKSTERHUIS (1987), p. 240-264. En francès, EECKE (1960), vol. I, p. 137-236, i MUGLER (1971*a*), p. 127-158. I, en italià, FRAJESE (1974), p. 233-310]

——— (2016*b*). *La mesura del cercle.* [En català, MASIÀ (2016), p. 130-140. En castellà, VERA (1970), vol. II, p. 94-100, i ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 235-250. En anglès, HEATH (1894), p. 91-98, i DIJKSTERHUIS (1987), p. 222-240. En francès, EECKE (1960), vol. I, p. 125-134, i MUGLER (1970), p. 138-143. I, en italià, FRAJESE (1974), p. 213-232]

——— (2016*c*). *La quadratura de la paràbola.* [En català, MASIÀ (2016), p. 141-179. En castellà, VERA (1970), vol. II, p. 220-237, i ORTIZ-GARCÍA (2005), p. 153-188. En anglès, HEATH (1894), p. 233-252, i DIJKSTERHUIS (1987), p. 336-346. En francès, EECKE (1960), vol. II, p. 375-404, i MUGLER (1971*a*), p. 164-195. I, en italià, FRAJESE (1974), p. 471-514]

ATENEU DE NÀUCRATIS (1927). *El sopar dels savis.* Londres: Henry G. Bohn. [3 v. Traducció de C. D. Yonge. En línia i en anglès a <http://www.attalus.org/info/athenaeus.html>, i en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/athenee/livre7.htm>]

AUJAC, Germaine (1970). «La sphéropée, ou la mécanique au service de la découverte du monde». *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, 23 (2), p. 93-107. [En línia a <http://www.persee.fr/doc/rhs0048-_1970_7996num_23_2_3119>]

——— (1976). «Sphérique et sphéropée en Grèce Ancienne». *Historia mathematica*, 3, p. 441-447. [En línia a <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086076900744>]

AUSONI, Dècim Magne (1843). *Oeuvres complètes d'Ausone.* [Traducció francesa d'E. F. Corpet. i C. L. F. Panckoucke. En línia a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/ausone/table.htm>]

——— (1886). *Ausoni opuscula.* Leipzig: R. Reiper. [En línia a <https://archive.org/details/opuscula00ausouoft/page/407/mode/1up?q=Nuptialis>]

——— (2005). *Liber* XVII*: Cento nuptialis.* Edició IntraText. Èulogos. [En línia a <http://www.intratext.com/X/LAT0301.HTM>. O bé AUSONI (1886), p. 206-219. I en francès, AUSONI (1843), *Idil-li* XIII, vol. II, p. 257-268]

AZCÁRATE, Carmen, GARCÍA DONCEL, Manuel i ROMO, José (1988). *Galileo Galilei: La nueva ciencia del movimiento.* Bellaterra: Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. [2 v.: fragments de l'original, traducció i comentaris]

Babini, José (1948). *Arquímedes.* Argentina: Espasa Calpe.

——— (1966). *El método.* Buenos Aires: Eudeba.

Bassi, Cæssii i Fortunatiani, Atilii (1885). *De metris libri, ad fidem codicis Neapolitani.* [En línia a <https://archive.org/details/caesiibassiatil00fortgoog/page/n5/mode/1up>, o bé a Keil i Hertz (ed.) (1961), p. 255-272]

Berenson, Bernard (1964). *The selected letters of Bernard Berenson.* Boston: Houghton Mifflin.

Burton, David M. (1985). *The history of mathematics: An introduction.* Nova York: The McGraw-Hill. [Reeditat profusament els anys 1989, 1991, 1995, 1997, 2003 i 2007]

Butterfield, Herbert, Sir (1958). *The origins of modern science, 1300-1800.* Nova York: Collier Books. [Traducció castellana de L. Castro, *Los orígenes de la ciencia moderna*, Madrid, Taurus, 1962. En línia i en anglès a <https://archive.org/details/originsofmoderns007291mbp>, i en castellà a <https://es.scribd.com/document/283433863/Butterfield>]

Cajori, Florian (1893). *A history of mathematics.* Nova York: AMS Chelsea. [Reeditat els anys 1919, 1931, 1938, 1949, 1960, 1980 i 1985. En línia a <https://archive.org/details/ahistorymathema01cajogoog/page/n8>]

Cantor, Moritz (1877). «Eisenstein, Gotthold», *Allgemeine Deutsche Biographia*, vol. V, p. 744-745. [En línia a <https://de.wikisource.org/wiki/Allgemeine_Deutsche_Biographie>]

Chasles, Michel (1860). *Les trois livres des porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois, d'après la notice et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simon sur la forme des énoncés de ces propositions.* París: Mallet-Bachelier. [En línia a <https://ia601404.us.archive.org/24/items/lestroislivres00euclrich/lestroislivres00euclrich.pdf>]

Ciceró, Marc Tul·li (1923-2005). *Discursos.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [22 v. Traducció catalana d'autors diversos. En línia i en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/orateurs/index.htm>]

——— (1929-1953). *Contra Verres.* [Ciceró (1923-2005), volums del II al V. En línia i en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/orateurs/index.htm>]

——— (1948-1950). *Tusculanes.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [3 v. (1948, 1949, 1950). Traducció catalana d'E. Valentí, en tres volums. En línia i en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/orateurs/index.htm>]

CICERÓ, Marc Tul·li (1988-2003). *De la naturalesa dels déus.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [2 v. (1988, 2003). En línia i en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/orateurs/index.htm>]

——— (2006). *La república.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de J. M. del Pozo. En línia i en català a <https://books.google.es/books?id=vhNO1c3OIIsC&printsec> i en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/orateurs/index.htm>]

CLAUDIÀ, Marshall (1833). *Œuvres de Claudien.* París: Panckoucke. [2 v. Traducció francesa de Guerle i Trognon. En línia a <http://remacle.org/bloodwolf/poetes/claudien/epigrammes.htm>]

COMMANDINO, Federigo (1558). *Opera non nulla a Federico Commandino urbinate nuper in latinum conversa, et commenatriis illustrata.* Venècia: Apud Hieronymum Concordiami. [En línia a <https://books.google.es/books?id=06fmG2LZGx0C>]

——— (1588). *Pappi Alexandrini mathematicæ collectiones. Pisauri. Apud Hieronymum concordiami.* [En línia a <https://books.google.es/books?id=OmXr4RO_2FiEC>]

DALLEY, Stephanie i OLESON, John Peter (2002). «Sennacherib, Archimedes, and the water screw: The context of invention in the ancient world». *Technology and Culture*, 44 (1), p. 1-26. [En línia a <https://www.researchgate.net/publication/249909255_Sennacherib_Archimedes>]

DANTE ALIGHIERI (1304-1321). *La divina comèdia.* [Traducció catalana de J. M. de Segarra. 3 v.: *Infern*, *Purgatori* i *Paradís*». Barcelona: Alpha, 1950-1952. *L'infern*, en línia i en italià a <https://books.google.es/books?id=tWsshfOAll0C&pg=PA268&dq=Dant+Divina+commedia>]

DEDRON, Pierre i ITARD, Jean (1959). *Mathématiques et mathématiciens.* París: Magnard.

DELSEDIME, P. (1970). «L'infini numérique dans l''Arénaire' d'Archimede». *Archive for History of Exact Sciences*, VI (5), p. 345-359. [En línia a <https://pdfslide.fr/reader/f/linfini-numerique-dans-l-arenaire-d-archimede>]

DESCARTES, René (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences plus la Dioptrique, les Meteores et la Geometrie qui sont des essais de la Méthode.* Leiden: Ian Maire. [En línia a <https://www.gutenberg.org/ebooks/13846> Traducció castellana, amb pròleg i notes de G. Quintás, *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*, Madrid, Alfaguara, 1981]

DIEC (1995). *Diccionari de la llengua catalana.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Revisat i ampliat l'any 2007. Reeditat el 2012. En línia a <http://dlc.iec.cat/>]

DIJKSTERHUIS, Eduard Jan (1943). *Simon Stevin.* La Haia: Nijhoff.

——— (1987). *Archimedes.* Nova Jersey: Princeton University Press. [Traducció anglesa de C. Diksboorn, amb un nou assaig bibliogràfic de W. N Knorr. En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=Vvj_AwAAQBAJ>. La primera edició l'efectuà E. Munksgaard, Copenhaguen, 1956. Els capítols I-V es van publicar en alemany (*Archimedes*, I. P. Noordhoff, Groningen, 1938. I la resta van aparèixer separadament a la revista alemanya *Euclides* (XV-XVII i XX, 1938-1944)]

DIODOR DE SICÍLIA (1976). *Bibliothèque historique.* París: Presses Universitaires de France. [Traducció francesa de P. Goukowsky. En línia i en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/diodore/index.htm>, i en anglès a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.01.0084&redirect=true>]

DONKIN, William Fishburn (1867). «Archimede». A SMITH (ed.) (1867), vol. I, p. 270-273. [En línia a <https://quod.lib.umich.edu/m/moa/acl3129.0001.001/285?page>]

DORCE, Carlos (2013). *Història de la matemàtica*: *Des de Mesopotàmia al Renaixement.* Barcelona: Universitat de Barcelona.

DOUGHERTY, F. C., MACARI, J. i OKAMOTO, C. «Pulleys». *Mechanics Magazine* (1824). [En línia a <https://web.archive.org/web/20070718031943/http://www.swe.org/iac/LP/pulley_03.html>]

DRACHMANN, Aage Gerhardt (1963). *Mechanical technology of Greek and Roman antiquity*: *A study of literary sources.* Madison: The University of Wisconsin Press.

DUHEM, Pierre (1900). «Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique?». *Bibliotheca Mathematica*, 3 (I), p. 15-19.

DUTENS, M. L. (1775). *Du miroir ardente d'Archimede.* París: Chez Debure.

EDWARDS, C. H., Jr. (1979). *The historical development of the calculus.* Nova York: Springer.

EECKE, Paul ver (1948). *Les commentaires sur le premier livre des 'Éléments' d'Euclide.* Bruges: Desclée de Brouwer. [Edició francesa amb traducció i notes de P. ver Eecke. Reeditada el 1969]

——— (1960). *Les œuvres complètes d'Archimède.* Brussel·les: Vaillant-Carmanne. [Edició francesa amb traducció i notes de P. ver Eecke. Reeditada a París, Albert Blanchard, 1980, 2 v.]

ESTRABÓ (1867). *Géographie de Strabon.* París: Hachette. [Text en grec i en francès amb traducció francesa d'A. Tardieu en línia a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/strabon/livre21.htm> i en anglès a ESTRABÓ (1917)]

Estrabó (1917). *The Geography of Strabo*. Vol. 1. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. [Editor H. L. Jones. En línia a <https://archive.org/stream/geographyofstrab01strauoft/geographyofstb01strauoft_djvu.txt>]

Eustaci de Tessalònica (1827). *Commentarii ad Homeri Iliadem; ad fidem exempliromani editi*. Lipsiæ: Stallbaum & Gotfried. [Text grec. 4 v. En línia a <https://fr.wikipedia.org/wiki/Eustathe_de_Thessalonique>]

Eutoci (1972). *Commentaire au traité «De la sphère et du cylindre* I *i* II*» d'Archimèede*. [En francès, Mugler (1972), p. 88-89, i, en castellà, Ortiz-García (2009), p. 357-418.]

Favaro, Antonio (1923). *Archimede*. Roma: A. F. Formiggini. [En línia a <https://it.wikisource.org/wiki/Archimede_(Favaro)>]

Fernández Aguilar, Eugenio Manuel (2012). *El principio de Arquímedes*. Barcelona: RBA. [Reeditat per RBA i National Geographic el 2016]

Fortunat, Atili (1961). *De metris*. [«Cæsii Bassi sive Atilii Fortunatiani fragmentum 'De metris'», a Keil i Hertz (ed.) (1961), p. 255-272, o a Bassi i Fortunat (1885).]

Frajese, Attilio (1963). *Platone e la matematica nel mondo antico*. Roma: Studium.

——— (1964). *Galileo matematico*. Roma: Studium.

——— (1969). *Attraverso la storia della matematica*. Florència: Le Monnier.

——— (1974). *Opere di Archimede*. Torí: Unione Tipografico - Editrice Torinese.

Fuentes González, Pedro Pablo (2005). «Menaichmos». A Richard Goulet (ed.). *Dictionnaire des philosophes*, 4, p. 401-407.

Galileu (1632). *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Florència: Batista Landini. [A Galileu (1890-1909), vol. VII (1897), p. 33-489. En línia a<http://www.letteraturaitaliana.net/pdf/Volume_6t333.pdf>]

——— (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Leiden: Gli Elsevirii. [A Galileu (1890-1909), vol. VIII (1897), p. 9-318. En línia a <https://www.liberliber.it/mediateca/libri/g/galilei/discorsi_e_dimostrazioni/pdf/discor_p.pdf>]

——— (1655). *Dalla scienza meccanica e delle utilità que si traggono dagl'instromenti di quella*. Bolonya: H. H. del Dozza.

——— (1890-1909). *Le opere di Galileo Galilei*. Florència: G. Barbera. [A cura d'A. Favaro. En línia a <https://it.wikisource.org/wiki/Le_opere_di_Galileo_Galilei_(Favaro)>]

GEC (1965). *Gran enciclopèdia catalana*. Barcelona: Enciclopèdia Catalana. [25 volums publicats des del 1965 fins al 1996. En línia a <http://www.enciclopedia.cat/>]

Gigon, Olof (1973). «Posidonia, Ciceroniana, Lactantiana». A William den Boer i Jan Hendrik Waszink (ed.). *Romanitas et christianitas*: *Studia J. H. Waszink*. Amsterdam: North-Holland, p. 145-180.

Gillispie, Charles Coulston (1970). *Biographical dictionary of mathematicians*: *Reference biographies from the dictionary of scientific biography*. Nova York: Charles Scribner's Sons. [4 v. Reeditat en moltíssimes ocasions. Edició consultada: 1991]

González Urbaneja, Pedro M. i Vaqué, Joan (1993). *Arquímedes*: *el método relativo a los teoremas mecánicos*. Barcelona: Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. [Traducció catalana de J. Vaqué i edició crítica dels autors]

——— (1997). *Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de J. Vaqué i edició crítica dels autors]

Goulet, Richard (ed.) (2005). *Dictionnaire des philosophes*. Vol. iv. París: CNRS. [En línia a <https://books.google.es/ books?id=NNMDAQAAIAAJ&printsec]>]

Gravelaar, Nicolaas Lambertus Willem Anthoni (1901). «Stevin's Problemata geometrica». *Nieuw Archief voor Wiskunde*, vol. v (1901), p. 106-191.

Grupo Alquerque de Sevilla (2005). «'*Stomachion*'. El cuadrado de Arquímedes». *Suma* (2005), p. 79-84. [El grup el formen Juan Antonio Hans Martín, José Muñoz Santonja i Antonio Fernández-Aliseda. En línia a <http://www.grupoalquerque.es/articulos/50_stomachion.pdf>]

Gudder, Stanley (1976). *A mathematical journey*. Nova York: McGraw-Hill.

Guillaumin, Jean Yves. (1992). *Mathématiques dans l'antiquité*. 3a ed. St-Étienne: Publications de la Université de St-Étienne.

Gutenäcker, Joseph (1828). *Archimedes: Kreis-Messung des Archimedes von Syrakus: nebst dem dazu gehörigen Kommentare des Eutokius von Askalon: griechisch und deutsch/mit Anmerkungen begleitet, und eine Einleitung, welche sich vorzüglich über die Zahlen-Bezeich von Zahlen-Bezeich*. Würzburg: Etlinger. [En línia a Arquimedes (iii aC)]

Habsieger, L., Kazarian, M. i Lando, S. (1998). «On the second number of Plutarch». *American Mathematical Montly*, 105, p. 446.

Hardy, Godfrey Harold (1940). *A mathematician's apology*. Cambridge: Cambridge University Press. [Traducció castellana de J. Fernández, *Apología de un matemático*, Madrid, Nivola, 1999. Traducció catalana de M. Merín, *Apologia d'un matemàtic*, amb una introducció de J. Pla, Santa Coloma de Queralt, Obrador Edèndum, 2008. En línia i en anglès a <https://archive.org/details/hardy_annotated>]

Heath, Thomas Little (1876). *Apollonius of Perga*: *Treatise on conic sections*: [*Edited in modern notations*]. Cambridge: Cambridge University Press. [En línia a <https://archive.org/details/treatiseonconics00apolrich>]

——— (1894). *The works of Archimedes*: *Edited in modern notation*. Cambridge: Cambridge University Press. [Reeditat per Dover, *The Works of Archimedes and The Method of Archimedes*, Nova York, 2002. En línia a <https://archive.org/stream/treatiseonconics00apolrich#page/n0/mode/2up>]

——— (1913). *The method of Archimedes, recently discovered by Heiberg*. Cambridge: Cambridge University Press. [En línia a <https://archive.org/stream/cu31924005730563#page/n17/mode/2up>]

——— (1921). *A history of Greek mathematics*. Canadà: General Publishing. [Reeditat per Dover, *Greek Mathematics*, Nova York, 1981, 2 v. En línia a <https://archive.org/stream/cu31924008704219#page/n7/mode/2up> (vol. 1) i <https://archive.org/stream/ahistorygreekma00heatgoog#page/n7/mode/2up> (vol. 2)]

Heiberg, Johan Ludvig (1880-1881). *Arquimedis*: *Opera omnia*. Leipzig: Teubner. 3 v. (1880, 1881, 1881). [En línia a <https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Books/ArchimedesInternet.html>]

——— (1889). «῾Ιεροσολυμιτική βιβλιοθήνη». A *Hermes*. Vol. IV. Berlín: Franz Steiner Verlag.

——— (1891-1893). *Apollonii Pergæi quæ Græce exstant cum commentariis antiquis*. Leipzig: Teubner. 2 v. (1891 i 1893). [En línia a <http://www.wilbourhall.org/ index.html#apollonius>]

Heró (1903). *Heronis Alexandrini opera quæ supersunt omnia*. Vol. 3. Leipzig: Teubner. [Traducció i recensió de H. Schöne. En línia a <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k251883/f2.image>]

——— (1912). *Heronis Alexandrini opera quæ supersunt omnia*. Vol. 4. Leipzig: Teubner. [Traducció i recensió de J. L. Heiberg. En línia a <https://www.wilbourhall.org/pdfs/hero/Heronis%20Alexandrini%20opera%20quae%20supersunt%20VOL%20IV.pdf>]

———(2014). *Metrica*. Pisa: Fabrizio Serra. [Traducció francesa, text crític, notes i comentaris de F. Acerbi i B. Vitrac]

Hogendijk, Jan P. (1984). «Greek and Arabic constructions of the regular heptagon». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 30 (3-4), p. 197-330.

Holme, Audun (2010). *Geometry*: *Our cultural heritage*. Londres: Springer. [En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?redir_esc=y&chl=a&id=zXwQGo8jyHUC&q>]

Homer (1978). *La Ilíada*. Barcelona: Alpha. [Traducció catalana, amb el text grec, de M. Peix. Traducció castellana de L. Segalá. En línia i en castellà a <https://es.wikisource.org/wiki/Autor:Homero> i en grec i en anglès, de S. Butler (1898), a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0134>]

——— (1983). *L'Odissea*. Barcelona: La Magrana. [Traducció catalana de C. Riba, reimpresa en dos volums, Barcelona, La Magrana 1993. Alpha n'ha fet una reedició corregida i comentada en tres volums (2009-2011). Traducció castellana de L. Segalá. En línia a <http://es.wikisource.org/wiki/Odisea>. I en grec i anglès, de S. Butler (1919), a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0136>]

Hultsch, Fridericus (1876). *Pappi Alexandrini Collectionis quæ supersunt e libris manuscriptis edidit latina interpretatione et commentariis*. Berlín: Verlag der Weidmannsche Buchhandlung. [Vol. i, en línia a <http:// www.wilbourhall.org/pdfs/collection/Hultsch_1876_Pappos-3-1_S.pdf>]

Kaster, Robert A. (1988). *Guardians of Language: The Grammarian and Society in Late Antiquity*. Califòrnia: University of California. [En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?redir_esc=&hl=es&id=UMNIQ_iCBrkC&q>]

Keil, Heinrich i Hertz, Martin (ed.) (1961). *Grammatici Latini*. Vol. III. Hildesheim: G. Olms, p. 278-312. [En línia a <https://archive.org/stream/p1grammaticilatini06keil>]

Kline, Morris (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford: Oxford University Press. [Traducció castellana de C. Fernández i A. Garciadiego, sota la coordinació de J. Hernández, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza, 1992, 3 v.]

Knorr, Wilbur Richard (1975-1976). «Archimedes and the measurement of the circle: a new interpretation». *Archive for History of Exact Sciences*, 15 (2), p. 115-140. En línia a <http://users.uoa.gr/~apgiannop/Sources/Knorr-Archimedes-circle.pdf>]

——— (1978*a*). «Archimedes and the elements: Proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean corpus». *Archive for History of Exact Sciences*, 19 (3), p. 211-290.

KNORR, Wilbur Richard (1978*b*). «Archimedes and the spirals: The Heuristic Background». *Historia Mathematica*, vol. 5, p. 43-75.

——— (2007). «Archimedes' Neusis-Constructions in Spiral Lines». *Centaurus*, 22 (7), p. 77-98.

KOYRÉ, Alexandre (1973). *Études d'histoire de la pensée scientifique.* París: Gallimard. [Traducció castellana d'E. Pérez Sedeño i E. Bustos, *Estudios galileanos*, Mèxic, Siglo XXI, 1977. Reedicions de 1978, 1980, 1982 i 1983. En línia a <https://fr.scribd.com/doc/167377656/Koyre-A-Estudios-del-pensamiento-cientifco>]

KRUMBIEGEL, B. i AMTHOR, A. (1880). «Das Problema Bovinum des Archimedes». *Historisch-Literarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. 25, p. 121-136 i 153-171.

LAGRANGE, E. (1930). «Les marées de l'Euripe». *Bulletin of the Société Belge d'Astronomie*, vol. 46, p. 66-69. [En línia a <http://adsabs.harvard.edu/full/1930C%26T....46...66L>]

LANDELS, John Gray. (1978). *Engineering in the Ancient World*. Berkeley: University of California Press. [En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=XKViFnYWYMoC>]

LEGENDRE, Adrien-Legendre (1849). *Éléments de géométrie.* París: Firmin Didot Frères. [En línia a <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k202689z/f3.image>]

LEGRAND, A. (1891). «Traité des corps flotants d'Archimède». *Journal de Physique*, sèrie II, vol. IX, p. 437-457. [En línia a <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00239563/document>. És un comentari que conté el llibre I íntegre i els enunciats del II]

LESSING, Gotthold Ephraim (1773). *Zur Geschichte und Literatur:Aus den Schatzen der Herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbẗtel.* Braunschweig: Beitrag ber Fürftí. [En línia i en grec a <https://www.cs.drexel.edu/˜crorres/Archimedes/Cattle/Statement_Lessing_graphic.html>]

LEWIS, Michael Jonathan Taunton (2001). *Surveying Instruments of Greece and Rome*. Cambridge: Cambridge University Press. [En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=1lzau5_ihmsC>]

LIVI, Tit (2002). *Història de Roma.* Vol. I i XI.Barcelona: Fundació Bernat Metge. [En línia en francès a <https://fr.wikisource.org/wiki/Histoire_romaine_(Tite-Live)>]

LLUCIÀ DE SAMÒSATA (1912). *Oeuvres complètes.* París: Hachette. [Traducció amb introducció i notes d'E. Talbot. En línia a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Lucien/table.htm>. En línia i en anglès a <https://www.perseus.tufts.edu/hopper/searchresults?q=Lucian>]

LORIA, Gino (1893-1895). *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. Modena: Società Tipografica Antica. 2 v. (1893 i 1895). [En línia a <https://books.google.es/books?id=SOjuAAAAMAAJ>. Reedició totalment revisada a LORIA (1914)]

——— (1895*b*). *Il periodo aureo della geometria greca*. A LORIA (1893-1985), llibre II, p. 180-443.

——— (1914). *Le scienze esatte nell'antica Grecia*. Milà: Hoepli. [En línia a <https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/acu8840.0001.001/301?view=pdf>. Traducció francesa a LORIA (1929)]

——— (1929). *Histoire des sciènces mathématiques dans l'antiquité hellénique*. París: Gauthier-Villars.

MARCHINI, Carlo (2006). «Appunti di geometria classica». [Vint-i-nou lliçons de geometria llegides durant el curs acadèmic entre el 8 de març i l'1 de juny de 2006]

MASIÀ, Ramon (2010). *Sobre l'esfera i el cilindre*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Text en grec, introducció, revisió, traducció, notes i figures]

——— (2012). *La llengua d'Arquimedes en 'De sphæra et cylindro'*. Tesi doctoral. [En línia a <http://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/123806/01.RMF_TESI.pdf?sequence=1&isAllowed=y> i més abreujat a MASIÀ (2010), p. 14-24]

——— (2016). *Sobre les conoides i les esferoides*: *La mesura del cercle*: *La quadratura de la paràbola*. Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Text en grec, introducció, revisió, traducció, notes i figures]

MORELLI, Giuseppe (2009). «Lo stomachion di Archimede nelle testimonianze antiche». *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, vol. XXIX (2), p. 181-206. [En línia a <https://docplayer.it/3277886-Giuseppe-morelli-1-lo-stomachion.html>]

MUGLER, Charles (1970). *Archimedes*. Vol. I: *De la sphère et du cylindre. La mesure du cercle. Sur les conoides et les spheroides.* París: Les Belles Lettres.

——— (1971*a*). *Archimedes*. Vol. II: *Des spirales. De l'équilibre des figures planes. L'Arénaire. La Quadrature de la parabole.* París: Les Belles Lettres.

——— (1971*b*). *Archimedes*. Vol. III: *Des corps flottants. Stomachion. La methode. Le livre des lemmes. Le probleme des boeufs.* París: Les Belles Lettres.

——— (1972). *Archimedes*. Vol. IV: *Commentaires d'Eutocius. Fragments.* París: Les Belles Lettres.

NETZ, Reviel (2004). *The works of Archimedes: the two books on the sphere and the cylinder*. Londres: Cambridge University Press. [En línia i en anglès, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=msyO12v3tqcC>]

Netz, Reviel, Acerbi, Fabio i Wilson, Nigel (2004). «Towards a Reconstruction of Archimedes' Stomachion». *Sciamvs*, vol. 5, p. 67-99. [En línia a <http://www.academia.edu/8016357/Towards_a_Reconstruction_of_Archimedes_Stomachion]

Netz, Reviel i Noel, William (2007). *The Archimedes Codex*. Londres: Weindefeld & Nicolson. [Traducció castellana *El Código de Arquímedes*, Madrid, Temas de Hoy, 2007. En línia i en anglès, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=ZC1MOaAkKnsC>. En castellà a <https://es.scribd.com/doc/46870823/El-Codigo-de-Arquimedes-Reviel-Netz-y-William-Noel>]

Newman, James R. (1956). *The world of mathematicians*. Nova York: Simon and Schuster. 4 v. [Traducció castellana en set volums: *Sigma*: *El mundo de las matemáticas*, Barcelona, Grijalbo, 1968. En línia a <http://eridanus.cz/id32402/ve(2da/r(2i(1rodni(1_ve(2dy/matematika/_Knihy_TheWorldofMathematics/Newman-TheWorldOfMathematicsVolume*i* text.pdf>, en què Volum*i* pren els valors Volum1, Volum2, Volum3 i Volum4 per a cada un dels quatre volums]

Nizze, Ernst (1824). *Archimedes von Syrakus vorhandene Werke, aus dem Griechischen iibersetzt und mit erlduternden und kritischen Anmermerkungen begleitet*. Stralsund: Car Löffler. [En línia a <https://boooks.google.es/books?id=zzZXAAAAcAAJ&printsec=frontcover&dq=Nizze+Archimedes+von+Syrakus&hl#v>]

Ortiz-García, Paloma (2005). *Arquímedes*: *Tratados* I. Madrid: Gredos. [Introducció, traducció i notes]

——— (2009). *Arquímedes*: *Tratados* II. Madrid: Gredos. [Introducció, traducció i notes]

Pappos (1932). *Pappus d'Alexandrie*: *La collection mathématique*. París: Albert Blanchard. [Traducció i notes de P. ver Eecke. Reeditat el 1982. En línia a <https://archive.org/stream/pappialexandrin00hutgoog>, <https://archive.org/stream/pappialexandrin01hultgoog> i <https://archive.org/org/stream/pappialexandrin02hultgoog>]

——— (1970). *Comentari al llibre* X *dels 'Elements' d'Euclides*. Madrid: Aguilar. Traducció anglesa de W. Thomson, amb notes i comentaris de G. Junge i W. Thomson, *The commentary of Pappus on book* X *of Euclide Elements*. [En línia a <http://www.wilbourhallorg/pdfs/pappus/PappusBookX.pdf>]

Paruta, Filippo (1612). *Della Sicilia di Filippo Parvta descritta con medaglie*. Palerm: Appresso Gio. Battista Maringo. [En línia a <https://archive.org/details/delasiciliadifi00paru>]

Peyrard, François (1807). *Œuvres d'Archimède*. París: Chez François Buisson. [Traducció literal del grec amb comentaris de F. Peyrard. En línia a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/oeuvresintro.htm>]

Píndar (1957-1994). *Odes.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [6 v. Traduccions de J. Triadú (1957 i 1959) i de M. Balasch (1993, 1993, 1994 i 1994). En línia, en anglès, <https://www.gutenberg.org/cache/epub/10717/pg10717.html>]

Pla, Josep (2009). *Liu Hui*: *Nueve capítulos de la matemática china.* Madrid: Nivola.

——— (2016*a*). *Història de la matemàtica*: *Egipte i Mesopotàmia.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2016*b*). *Història de la matemàtica: Grècia I*: *De Tales i Pitàgores a Plató i Aristòtil.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

———(2018). *Història de la matemàtica: Grècia IIa*: *Els 'Elements' d'Euclides: llibres* i*,* ii*,* iii*,* iv*,* v *i* vi*.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2020). *Història de la matemàtica: Grècia IIb*: *Els 'Elements' d'Euclides: llibres* vii*,* viii*,* ix*,* x*,* xi*,* xii *i* xiii*.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2021). *Història de la matemàtica: Grècia IIIa. Aristeu el Vell, Eudem, Euclides i Aristarc.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (En premsa *a*). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIIb*: *Arquimedes, vida i obra.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Pendent de publicació]

——— (En premsa *b*). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIIc*: *Apol·loni, vida i obra.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Pendent de publicació]

——— (En premsa *c*). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIId*: *Aportacions de Conó i Dositeu, de Nicomedes i Eratòstenes, i de Dionísodor i Diocles.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Pendent de publicació]

——— (En premsa *d*). *Història de la matemàtica*: *Grècia IVa.* [Pendent de publicació]

——— (En premsa *e*). *Història de la matemàtica*: *Grècia IVb.* [Pendent de publicació]

Pla, Josep, Paradís, Jaume i Viader, Pelegrí (2008). *Fermat*: *Opera Varia.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Traducció catalana, amb introducció, comentaris i notes dels autors]

Plató (1871). *Obras completas de Platón* iv *aC).* Madrid: Medina y Nasvarro. [Traducció castellana de P. de Azcárate. En línia a <http://www.filosofia.org/cla/pla/azcarate.htm>]

——— (1931-2009). *Diàlegs.* Barcelona: Fundació Bernat Metge.

PLATÓ (1932). *Càrmides. Lisis. Protàgoras.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de M. Balasch a PLATÓ (1931), vol. II, i castellana de J. A. Mínguez, a *Parménides o de las ideas*, PLATÓ (1966-1969), p. 945-992]

——— (1966-1969). *Obras completas.* Madrid: Aguilar.

——— (2000). *Timeu* i *Crítias.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció de J. Vives a PLATÓ (1931), vol. XVIII, i castellana de J. A. Mínguez a *Timeo, o de la ciencia*, PLATÓ (1966-1969), p. 1003-1179, i a *Critias o Atlántida*, PLATÓ (1966-1969), p. 1081-1201]

PLINI (2002). *Naturalis Historiæ.* Madrid: Cátedra. [Traducció de J. Cantó i I. Gómez: *Historia natural.* En línia i en castellà a <https://archichive.org/stream/historianatural00segogoog#page>; en llatí a <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Pliny_the_Elder/home.html> i en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/plineancien/index.htm]

PLUTARC, Luci Mestri (1932-1946). *Vides paral·leles.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. 15 v.

——— (1936). *On the fortune or the virtue of Alexander.* Vol. IV. Londres: Loeb, p. 379-487. [Traducció de F. C. Babbit. Vegeu també PLUTARC (1987), p. 326-344. I en línia en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/Plutarque/fortunealex.htm>]

——— (1987). *Moralia.* Boston: Little, Brown & Cia. [Sovint traduït com a *Qüestions relacionades amb els hàbits i els costums.* Traducció corregida per W. W. Goodwin, amb introducció de R. Waldo Emerson, *Plutarch's Morals*, en cinc volums. En línia a <http://www.attalus.org/info/moralia.html>]

POLIBI (1847). *Histoire générale.* París: Charpentier. [Traducció francesa de F. Bouchot en sis volums. En línia, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/polybe/> o a <https://books.google.es/books?id=QC41giWxi-8C&printsec>(vol. I) i <https://books.google.com.pr/books?id=DGYLAAAAYAAJ&printsec> (vol. II)]

——— (1922-1927). *The histories.* Cambridge: Harvard University Press. 6 v. [En línia a <https://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Polybius/> o a <http://www.perseus.tufts.edu/hoppertext?/doc=Perseus:text:1999.01.0234>]

——— (1925). *Història.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. 12 v. (1922-1925). [En francès, POLIBI (1847) i, en anglès, POLIBI (1922-1927)]

PÓLYA, George (1977). *Mathematical methods in science.* Victoria: Leon Bowden. [En línia a <https://books.google.es/books/about/Mathematical_Methods_in_Science.html?id=j5Rnl92SsLIC&redir_esc=y>]

Presocràtics (2011). *De Tales a Demòcrit. El pensament presocràtic*: *Fragments i testimonis*. Edició i traducció de J. Ferrer. Girona: Edicions de la Ela Geminada.

Procle de Lícia (1970) *A commentary on the first book of Euclid's 'Elements'*. Princeton: Princeton University Press. [Traducció anglesa i notes de G. R. Morrow; francesa, Eecke (1948); italiana, Timpanaro (1978); castellana, parcialment, Vera (1970), vol. ii, p. 1141-1184. En línia i en grec a <http://www.wilbourhall.org/millionbookspdfs/proclidiadochiin00procuoft.pdf>]

Ptolemeu, Claudi (1898). *Claudii Ptolemæi opera quæ exstant omnia, volume 1. Syntaxis mathematica*. Editat per J. L. Heiberg. Cambridge: Cambridge University Press. [En línia i en grec a <https://www.wilbourhall.org/pdfs/HeibergAlmagestComplete.pdf>. I en anglès a Toomer (1984)]

Rey, Abel (1948). *L'apogée de la science technique grecque*. París: Albin Michel. [En línia <https://books.google.es/books?id=77TGKu7HAaMMC&printsec>]

Rivault, David (1615). *Archimedis Opera quæ extant*. París: Clavdivm Morellum. [En línia a <https://books.google.es/books?id=tOBkmZ9YdOUC&pg>]

Russo, Lucio (2013). «Archimedes between legend and fact». *Lettera Matematica* (2013), vol. 1 (3), p. 91-95. [En línia a <http://link.springer.com/article/10.1007/s40329-013-0016-y>]

Sales, Joan (1956). *Incerta glòria*. Barcelona: Aymà. [Barcelona, Club Editor, 1971; reeditat el 2012]

Schlaudt, Oliver (2013). «Hölder, Mach, and the law of the lever: A case of well-founded non-controversy». *Philosophia Scientiæ*: *Travaux d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, 17 (1), p. 93-116. [En línia a <https://journals.openedition.org/philosophiascientiae/830>]

Schmidt, Wilhelm (1902). «Zur Textgeschichte der "Ochoumena" des Archimedes». *Bibliotheca Mathematica*, sèrie iii, vol. iii, p. 176-179.

Sèneca, Luci Anneu (1959). *Quæstiones naturales*. Llibre III. [Traducció catalana de C. Cardó, *Qüestions naturals*, Barcelona, Fundació Bernat Metge, 1959. En línia i en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/seneque/questionsnaturelles1.htm> i en llatí a <https://www.thelatinlibrary.com/sen/sen.qn1.shtml>]

Simplici (2002). *Simplicius. On Aristotle categories 7-8*. Londres: Bloomsbury. [En línia a <https://books.google.es/books?id=XpIjAwAAQBAJ&printsec>]

Smith, William (ed.) (1867). *A dictionary of Greek and Roman biography and mythology*. 3.v. [Il·lustracions a partir de planxes de fusta. En línia a <http://quod.lib.umich.edu/m/moa/acl3129.000*i*.001/255?pa

ge=root;size=100;view=image>, on *i* pren els valors 1, 2 i 3 dels volums corresponents]

Stanley, Richard P. (1997). «Hipparchus, Plutarch, Schröder and Hough». *American Mathematical Montly*, 104, p. 344-350. [En línia a <http://www-math.mit.edu/ rstan/papers/hip.pdf>]

Steinschneider, Maurizio (1863). *Intorno ad alcuni matematici del Medioevo ed alle opere da essi composte*. Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. [En línia a <https://books.google.es/books?id=L4p76xE_L5AC>]

Stevin, Simon P. (1583). *Problematum geometricorum, libri* v. Anwerp: Ioannem Bellerum. [En línia a <https://books.google.es/books?id=5PHsYsWJUugC&printsec>]

Sturm, Christoph (1667). *Des unvergleichlichen Archimedes sandrechnung, odertiefsinnige erfindung*. Nuremberg: Paul Fürstnes. [En línia a <https://books.google.es/books?id=rXlnAAAAcAAJ&pg>]

Suter, Heinrich (1899). «Der loculus Archimedius oder das syntemachion des Archimedes, arabisch und deutsch». *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, vol. ix, p. 491-500.

——— (1910-1911). «Das Buch Auffindung der Schnen im Krise von Abu 'L-Raihan Muhammed El-Biruni». *Übersetzt von H. Suter. Bibliotheca Mathematica*, vol. xi (3), p. 11-78.

Tannery, Paul (1881). «Sur le problème des boeufs d'Archimède». *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 5 (1), p. 25-30. [En línia a <http://www.numdam.org/article/BSMA_1881_2_5_1_25_1pdf>]

Tartaglia, Niccolò (1543). *Opera Archimedis syracusani philosophi et mathematici ingeniosissimi*. Venècia: Venturino Ruffinelli. [En línia a <https://books.google.es/books?id=mInET3ZZePwC>]

Tertul·lià (1852). *Œuvres de Tertullien*. París: Louis Vivès. [Traducció francesa d'A. E. Genoude. En línia a <http://www.tertullian.org/french/g2_02_de_anima.htm>. I en anglès a <https://www.roger-pearse.com/tertullian/works.htm>]

Thomas, Ivor (1939). *Greek mathematical works*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. [Reeditat l'any 1980 en dos volums. En línia a <https://archive.org/stream/selectionsillust01bulmuoft>, amb *i* igual a 1 o 2, per als volums i i ii]

Thuillier, Pierre (1988). *D'Archimède à Einstein*: *Les faces cachées de la invention scientifique*. París: Arthéme Fayard. 2 v. [Traducció castellana d'A. Correa, *De Arquimedes a Einstein*: *Las caras ocultas de la invención científica*, Madrid, Alianza Editorial, 1990]

Timpanaro, Maria (1978). *Commento al* i *libro degli 'Elementi' di Euclide*. Pisa: Giardini. [Amb introducció i notes de l'autora]

Toomer, G. J. (1984). *Ptolemy's 'Almagest'*. Londres: Duckworth. [En línia a <https://en.wikipedia.org/wiki/Almagest>. I, per a una presentació en llenguatge actual, Richard Fitzpatrick a <https://farside.ph.utexas.edu/Books/Syntaxis/Almagest.pdf>]

Torelli, Giuseppe (1769). *Iosephi Torelli Veronensis Geometric.* Verona: Heredis Augustinus Crattoni. [En línia a <https://books.google.es/books?id=VRR7GpNAI7IC>]

——— (1792). *Archimedis quæ supersunt omnia cum Eutocii ascalonitæ commentariis ex recensione.* Oxford: Clarendoniano. [En línia a <https://books.google.es/books?id=GnAwZ1AB0ngC>]

Torricelli, Evangelista (1644). *Opera geometrica.* Florència: A. Masse & L. de Landis. [En línia a <https://archive.org/stream/operageometrica00torrgoog>]

Tropfke, J. (1936). «Die siebeneckabhandlung des Archimedes». *Osiris*, i, p. 636-651.

Tucídides (1953-1981). *La guerra del Peloponès.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana a càrrec de J. Berenguer dels cinc primers volums i de M. Balasch els tres darrers. En línia i en castellà a <http://interclassica.um.es/index.php/interclassica/divulgacion/mapas/datos/personajes/autores_griegos/tucidides>. En francès a <http://remacle.org/bloodwolf/historiens/thucydide/table.htm>. I en grec i en anglès a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0199>]

Tzetzes (1826). *Chiliades.* Leipzig: Bibliotheca Gandavensis. [Edició de T. Kiessling. En línia i en anglès a <https://archive.org/details/TzetzesCHILIADES> o <http://www.theoi.com/Text/TzetzesChiliades1.html>. I en grec a <https://archive.org/details/historiarumvari00kiesgoog>]

Valeri Màxim, Publi (1471). *Dicta et facta memorabilia.* Magúncia: P. Schöffer. [En castellà, *Dichos y hechos memorables.* introducció, traducció i notes de S. López, M. L. Harto i J. Villalba, Madrid, Gredos, 2003. 2 v. <https://books.google.com.ar/books?id=gdj18toPwXMC>]

Valla, Giorgio (1501). *De expetendis et fugiendis rebus.* Venècia: Aldo Manuce. [En línia a <https://books.google.es/books?id=kB1LAAAAcAAJ> (vol. i) i <https://books.google.es/books/about/De_expetendis_et_fugiendis_opus.rebus_html?id=XixLAAAAcAAJ> (vol. ii)]

Vardi, Ilan (2007). *Archimedes, the sand rekonner.* [En línia a <http://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Ilan.Vardi/sand_reckoner.ps>]

Venatorius, Thomas Gechauff (1544). *Archimedis de insidentibus aquæ. Liber primus* [*secundus*]. Basilea: Hervagius. 2 v. [En línia a <https://books.google.es/books?id=BMn5_x17oywC>]

Vera, Francisco (1970). *Científicos griegos*. 2 v.

Victorí, Gai Mari (1871). *Ars grammatica*. Leipzig: O. Keil. [En línia a <https://archive.org/details/p1grammaticilatini06keil>]

Virgili (1956). *Bucòliques*. Editat per Miquel Dolç. Barcelona: Fundació Bernat Metge.

——— (1972). *Eneida*. Editat per Miquel Dolç. Barcelona: Fundació Bernat Metge. 4 v. (1972, 1975, 1977 i 1978). [En línia i en anglès a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3atext%3a1999.02.0054> i en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/poetes/virgile/eneide1.htm>]

Vitrac, Jean (1990). *Euclide*: *Les Éléments*: *Livres i à iv*. París: Presses Universitaires de France.

——— (1992). «A propos de la chronologie des ouvres d'Archimède». A Guillaumin (1992), p. 87-88.

——— (1994). *Euclide*: *Les éléments*: *Livres v à ix*. París: Presses Universitaires de France.

Vitruvi Pol·lió, Marc (1995). *De architectura: libri decem*. Madrid: Alianza. [Text en llatí i castellà. Traducció de J. L. Oliver, *Los diez libros de arquitectura*. En línia a <http://aparejadoresacc.com/wp-content/uploads/Vitruvio_Polion_Marco.pdf>. En anglès a <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Vivius/7*.html>. I en francès a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/Vitruve/index.htm>]

Waerden, Bartel Leendert van der (1954). *Science awakening*. Groningen: P. Noordhoff. [Reeditat per Oxford, Oxford University Press, 1961; per Nova York, John Wiley, 1963, i per Dordrecht, Països Baixos, Kluwer Academic Publishers, 1975 i 1988. En línia, parcialment, a <https://books.google.es/books?id=HK3vCAAAQBAJ>]

Zeuthen, Hieronimus Georg (1886). *Die lehre von den kegelschnitten im altertum*. Copenhaguen: Fischer-Benzon. [En línia a <https://books.google.es/books?id=g70J9FeVTSUC>]

Zonaràs, Joan (1868). *Epitome historiarum*. Vol. 1. Editat per Ludovicus Dindorfius. Leipzig: Teubner. [En línia i en grec a <https://books.google.es/books?id=UJkCAAAAYAAJ>]

Índex de mots i formes

Índex de noms propis: antropònims, topònims i altres noms

Antropònims

Topònims i altres noms

Índex d'obres i citacions

Índex de termes, expressions, nombres i símbols

Termes

Expressions

Nombres (en ordre creixent)

Símbols, igualtats i desigualtats

Índex general

9 788499 656977